ELASTICIDADES DA POBREZA: NOVAS FÓRMULAS DE CÁLCULO E AVALIAÇÃO DE DIFERENTES PRESSUPOSTOS

Rodrigo O. Orair*
Rodolfo Hoffmann**

O artigo apresenta as fórmulas de cálculo dos índices de pobreza de Foster, Greer e Thorbecke nas quais se supõe que a distribuição de renda é log-normal e mostra que essas fórmulas produzem boas estimativas desses índices no Brasil. Em seguida deduzem-se as expressões das respectivas elasticidades em relação à renda média e às diversas medidas de desigualdade. Finalmente, utilizando-se um painel de dados para 27 unidades da federação (UFs) de 1992 a 2004, mostra-se que as elasticidades-desigualdade das medidas de pobreza estimadas pelo método log-normal reproduzem melhor as variações observadas do que as elasticidades estimadas com base no tipo de mudança da curva de Lorenz suposto por Kakwani (1993).

1 INTRODUÇÃO

O objetivo deste artigo é apresentar, de forma pormenorizada, a dedução das expressões e os procedimentos para obtenção das estimativas das elasticidades-crescimento e elasticidades-desigualdade da classe de medidas de pobreza de Foster, Greer e Thorbecke[1] (1984), derivadas a partir da pressuposição de que a mudança na desigualdade segue a mudança na curva de Lorenz da distribuição log-normal.[2] O estudo pioneiro de Kakwani (1993) introduz as fórmulas das elasticidades para uma série de medidas de pobreza em relação ao rendimento médio e ao índice de Gini, esta última derivada a partir de um determinado padrão de mudança da desigualdade que estabelece que um aumento de $100\lambda\%$ no índice de Gini é obtido reduzindo-se a ordenada da curva de Lorenz de $L(p)$ para $L(p) - \lambda[p - L(p)]$, com p indicando a abscissa de um ponto da curva. Uma questão crucial, que cabe explicitar aqui, consiste no fato de que a especificação de um padrão de mudança da desigualdade, vinculando as mudanças na curva de Lorenz às mudanças nas medidas de desigualdade, é um requisito necessário para explorarmos o impacto das mudanças na desigualdade sobre a medida de pobreza. Uma vez especificada a forma de alteração da desigualdade, podemos estabelecer uma expressão que relacione as mudanças nas medidas de desigualdade, por exemplo, o índice de Gini, com as mudanças nas medidas de pobreza e derivar as elasticidades-desigualdade teóricas.

* Doutorando em Teoria Econômica do Instituto de Economia da Unicamp.

** Professor do Instituto de Economia da Unicamp.

1. Foster, Greer e Thorbecke (FGT).

2. As características desse padrão de mudança na desigualdade serão exploradas na seção 5.

Na literatura sobre esse tema, usualmente recorre-se às elasticidades em relação ao índice de Gini derivadas do padrão de mudança da desigualdade utilizado em Kakwani (1993), padrão que, para facilitar a exposição, denominaremos PK. O PK é utilizado, por exemplo, por Neder (2004) para determinar a elasticidade da pobreza em relação ao índice de Gini para as áreas rurais do Brasil em 2001. Trabalho recente de Barros *et al.* (2007), ao examinar as mudanças na distribuição de renda no Brasil entre 2001 e 2005, fez uso do PK sem usar essa denominação.[3] Dada a redução de 4,6% no índice de Gini observada no período, os autores constataram que a diferença entre as taxas de crescimento da renda dos 10% mais pobres e dos 10% mais ricos obtida com base no PK é muito maior do que a diferença observada.

Adotando padrão distinto de mudança na desigualdade, alguns trabalhos pressupõem que a mudança na desigualdade ocorre conforme a mudança na curva de Lorenz da distribuição log-normal, padrão denominado PLN ao longo deste trabalho. A utilização do PLN conduz a expressões das elasticidades-desigualdade distintas daquelas derivadas a partir do PK. Hoffmann (2005) argumenta que o PK corresponde a uma alteração muito intensa da desigualdade na cauda esquerda da distribuição e a uma alteração relativamente pequena na cauda direita da distribuição, o que pode fazer com que as a elasticidades-desigualdade da pobreza sejam superestimadas. Ressalte-se que a dedução das elasticidades-crescimento das medidas de pobreza independe do padrão de mudança da desigualdade estabelecido, de maneira que as expressões das elasticidades-crescimento deduzidas sob o PLN serão idênticas às elasticidades deduzidas sob o PK.

Hoffmann (1995) discute as relações entre pobreza absoluta, renda média e desigualdade na distribuição de renda admitindo que a distribuição de renda é log-normal, mas não obtém valores das elasticidades das medidas de pobreza. Também utilizando o PLN, Bourguignon (2002) apresenta as expressões da elasticidade-desigualdade para a proporção de pobres e para o índice de insuficiência de renda. Hoffmann (2005) analisa as elasticidades das medidas de pobreza em relação à renda média e ao índice de Gini, derivadas a partir do PLN, para a distribuição da renda domiciliar *per capita* nas unidades da federação (UFs) no Brasil nos anos de 1999, 2001 e 2002. Orair e Hoffmann (2006) deduziram uma expressão geral para a elasticidade-desigualdade da classe de medidas de pobreza de Foster, Greer e Thorbecke (1984) com $\alpha > 1$ sob o PLN.

Nesta versão ampliada do artigo de Orair e Hoffmann (2006) são apresentadas pormenorizadamente as deduções das expressões e os procedimentos para obtenção das estimativas das elasticidades das medidas de pobreza para a classe de medidas de FGT sob o PLN. Além disso, é deduzida expressão inédita da classe de medidas

3. O padrão de mudança na desigualdade está claramente descrito na nota de rodapé 2 daquele trabalho.

de pobreza FGT para a distribuição log-normal. Orair e Hoffmann (2006) concluíram que as estimativas das elasticidades-desigualdade sob o PLN são mais adequadas do que as obtidas com base no PK, tendo em vista os resultados de regressões que utilizaram as elasticidades teóricas para explicar as mudanças observadas no índice de insuficiência de renda e na medida de FGT com $\alpha = 2$, calculados adotando-se a linha de pobreza de R$ 150 nas 27 UFs no Brasil de 1992 a 2004. No presente artigo, a análise é ampliada, incluindo regressões para a proporção de pobres e calculando as medidas de pobreza com duas linhas de pobreza alternativas nos valores de R$ 75 e R$ 150. O objetivo principal desta análise de regressão é o de avaliar o grau de adequação da aplicação empírica das diversas fórmulas de cálculo das elasticidades e, secundariamente, avaliar qual padrão de mudança da desigualdade representa melhor as mudanças observadas nas medidas de pobreza – PK ou PLN.

O trabalho organiza-se da seguinte maneira: na próxima seção apresentamos as medidas de desigualdade para a distribuição log-normal; na seção 3 é deduzida a expressão geral da medida de pobreza de FGT para a distribuição log-normal, inédita na literatura sobre esse tema; a seção 4 é dedicada a uma análise do grau de exatidão das estimativas das medidas de pobreza obtidas admitindo-se que a distribuição de renda é log-normal; na seção 5 discutimos os padrões de mudança na desigualdade; na seção 6 são apresentadas as fórmulas de cálculo das elasticidades-crescimento e elasticidades-desigualdade das medidas de pobreza de FGT; e na seção 7 avaliamos o grau de adequação da aplicação empírica das diversas fórmulas de cálculo das elasticidades utilizando os dados da distribuição de renda no Brasil de 1992 a 2004.

2 MEDIDAS DE DESIGUALDADE PARA A DISTRIBUIÇÃO LOG-NORMAL

Vamos admitir que a distribuição do rendimento *x* seja log-normal, de maneira que ln *x* é normalmente distribuída com média θ e variância β^2. A função de distribuição ou proporção da população com renda até *x* é:

$$p = F(x) = \int_0^x f(y)\,dy = \Phi\left[\frac{\ln(x/\mu)}{\beta} + \frac{\beta}{2}\right] \tag{1}$$

e a respectiva proporção da renda total é dada por:

$$Y(x) = \frac{1}{\mu}\int_0^x yf(y)\,dy = \Phi\left[\frac{\ln(x/\mu)}{\beta} - \frac{\beta}{2}\right] \tag{2}$$

sendo Φ a função de distribuição de uma variável normal reduzida e μ a renda média. Essas expressões podem ser facilmente obtidas fazendo $r = 0$ e $r = 1$, respectivamente, na expressão (24) apresentada no apêndice A. A curva de Lorenz, que corresponde à relação entre p e $Y(x)$, será dada por:

$$L(p)=\Phi\left[Z(p)-\beta\right] \tag{3}$$

em que $Z(p)=\Phi^{-1}(p)=\frac{\ln(x/\mu)}{\beta}+\frac{\beta}{2}$.[4] O índice de Gini corresponde a:

$$G=1-2\int_0^{\infty}Y(x)f(x)dx=1-2\int_0^{\infty}\Phi\left[\frac{\ln(x/\mu)}{\beta}-\frac{\beta}{2}\right]\frac{1}{\beta x}\phi\left[\frac{\ln(x/\mu)}{\beta}+\frac{\beta}{2}\right]dx$$

na qual ϕ é a função de densidade de probabilidade da distribuição normal reduzida. Fazendo $u=\frac{\ln(x/\mu)}{\beta}+\frac{\beta}{2}$, com $du=\frac{1}{\beta x}dx$, obtemos:

$$G=1-2\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(u-\beta)\phi(u)du$$

Para resolver essa integral, vamos introduzir uma variável $W = X - Y$, onde X e Y são variáveis aleatórias independentes, cada uma delas com distribuição normal reduzida $N(0, 1)$. De acordo com a propriedade reprodutiva da distribuição normal, sabemos que W possui distribuição normal $N(0, 2)$. A função de distribuição da variável W será dada por:

$$P(W\le w)=P(X-Y\le w)=P(X\le w+y\,|\,Y=y)$$

$$\Phi\left(\frac{W}{\sqrt{2}}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{w+y}\phi(x)dx\,\phi(y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(w+y)\phi(y)dy$$

4. Ao longo do trabalho utilizaremos a letra Z (maiúscula) para indicar a inversa da função de distribuição da variável normal reduzida e z (minúsculo) para a linha de pobreza.

Suponha-se $X = u - \beta$, $Y = u$ e $W = X - Y = -\beta$. Por conseguinte,

$$\Phi\left(\frac{-\beta}{\sqrt{2}}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(u-\beta)\phi(u)\,du$$

Recorrendo-se a esse resultado, temos que:

$$G = 1 - 2\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(u-\beta)\phi(u)\,du = 1 - 2\Phi\left(\frac{-\beta}{\sqrt{2}}\right)$$

ou:

$$G = 2\Phi\left(\frac{\beta}{\sqrt{2}}\right) - 1 \tag{4}$$

A medida geral de desigualdade derivada da teoria da informação é (ver, por exemplo, Hoffmann, 1998, p. 175):

$$S = \frac{1}{\varepsilon(1-\varepsilon)}\left[1 - \int_{0}^{\infty}\left(\frac{x}{\mu}\right)^{1-\varepsilon} f(x)\,dx\right]$$

em que ε é o parâmetro de aversão à desigualdade. Fazendo $r = 1 - \varepsilon$, $y = x$ e $x = \infty$ no segundo membro da expressão (24) apresentada no apêndice A, segue-se a expressão da medida geral de desigualdade S para a distribuição log-normal:

$$S = \frac{1 - \exp\left[-\varepsilon(1-\varepsilon)\frac{\beta^2}{2}\right]}{\varepsilon(1-\varepsilon)} \tag{5}$$

A medida geral de desigualdade (*S*) inclui como casos particulares o *L* de Theil (*L*), o T de Theil (*T*), uma transformação do coeficiente de variação (*C*) e uma transformação da família de medidas de desigualdade de Atkinson (*A*). O quadro 1 mostra as expressões dessas medidas de desigualdade para a distribuição log-normal, medidas que podem ser deduzidas diretamente da expressão da medida geral de desigualdade em (5), e também apresenta a expressão do índice de Gini (*G*) para a distribuição log-normal. [5]

QUADRO 1
Medidas de desigualdade para a distribuição log-normal

	Medida de desigualdade	Expressão para a distribuição log-normal [a]	Fator multiplicativo
Índice de Gini	G	$G=2\Phi\left(\frac{\beta}{\sqrt{2}}\right)-1$	$\frac{d\beta/\beta}{dG/G}=\frac{G}{\beta\sqrt{2}\phi\left(\frac{\beta}{\sqrt{2}}\right)}$
Medida geral	$S=\frac{1-\int_0^{\infty}\left(\frac{x}{\mu}\right)^{1-\varepsilon}f(x)dx}{\varepsilon(1-\varepsilon)}$	$S=\frac{1-\exp\left[-\varepsilon(1-\varepsilon)\frac{\beta^2}{2}\right]}{\varepsilon(1-\varepsilon)}$	$\frac{d\beta/\beta}{dS/S}=\frac{S}{\beta^2}\exp\left[\varepsilon(1-\varepsilon)\frac{\beta^2}{2}\right]$
L de Theil	$L=\lim_{\varepsilon\to 1}S$	$L=\frac{\beta^2}{2}$	$\frac{d\beta/\beta}{dL/L}=\frac{L}{\beta^2}=\frac{1}{2}$
T de Theil	$T=\lim_{\varepsilon\to 0}S$	$T=\frac{\beta^2}{2}$	$\frac{d\beta/\beta}{dT/T}=\frac{T}{\beta^2}=\frac{1}{2}$
Coef. de variação	$C=\sqrt{2S(\varepsilon=-1)}$	$C=\sqrt{\exp\left(\beta^2\right)-1}$	$\frac{d\beta/\beta}{dC/C}=\frac{C^2}{\beta^2}\frac{1}{\exp\left(\beta^2\right)}$
Índice de Atkinson	$A=1-\left[1-\varepsilon(1-\varepsilon)S\right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}}$	$A=1-\exp\left(-\varepsilon\frac{\beta^2}{2}\right)$	$\frac{d\beta/\beta}{dA/A}=\frac{A\exp\left(\varepsilon\frac{\beta^2}{2}\right)}{\varepsilon\beta^2}$

[a] As expressões do *L* de Theil, *T* de Theil, coeficiente de variação e índice de Atkinson foram deduzidas a partir da suas relações com a expressão da medida geral *S*. Para se obter as expressões do *L* de Theil e *T* de Theil deve-se aplicar a regra de L'Hôpital.

5. Desnecessário assinalar que a expressão do índice de Gini para a distribuição log-normal é conhecida, podendo ser encontrada, por exemplo, em Aitchison e Brown (1957, p. 13). O mesmo vale para a expressão da medida geral de desigualdade para a distribuição log-normal em Cowell (1995), ainda que não apresente a dedução da expressão. Este artigo apresenta de maneira muito mais simples a dedução dessas expressões e das medidas de desigualdade a partir da medida geral de desigualdade. A vantagem de se utilizar a medida geral de desigualdade é que facilita a dedução das demais medidas de desigualdade, como o *L* de Theil, o *T* de Theil, o coeficiente de variação e o índice de Atkinson.

3 MEDIDAS DE POBREZA PARA A DISTRIBUIÇÃO LOG-NORMAL

A expressão da classe geral de medidas de pobreza proposta por Foster, Greer e Thorbecke (1984) é:

$$\varphi(\alpha)=\int_0^z\left(\frac{z-x}{z}\right)^\alpha f(x)dx \tag{6}$$

na qual z é a linha de pobreza e α é um parâmetro que estabelece como a insuficiência de renda $(x-z)$ de cada pobre afeta a medida de pobreza. Com o objetivo de obter a expressão da família de medidas de pobreza de FGT para a distribuição log-normal, vamos expandir a função $g(x)=\left(\frac{z-x}{z}\right)^\alpha$ em torno do ponto $x = 0$, utilizando a *expansão de Maclaurin*:

$$g(x)=\frac{g(0)}{0!}+\frac{g'(0)}{1!}x+\frac{g''(0)}{2!}x^2+\frac{g'''(0)}{3!}x^3+\ldots+\frac{g^{(\alpha)}(0)}{\alpha!}x^\alpha$$

$$\left(\frac{z-x}{z}\right)^\alpha=1-\alpha\frac{x}{z}+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\frac{x^2}{z^2}-\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}\frac{x^3}{z^3}+$$
$$+\ldots+(-1)^\alpha\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(1)}{\alpha!}\frac{x^\alpha}{z^\alpha}$$

$$\left(\frac{z-x}{z}\right)^\alpha=\sum_{r=0}^{\alpha}(-1)^r\binom{\alpha}{r}\frac{x^r}{z^r}$$

na qual $\binom{\alpha}{r}=\frac{\alpha!}{r!(\alpha-r)!}$. Temos então:

$$\varphi(\alpha)=\int_0^z\left(\frac{z-x}{z}\right)^\alpha f(x)dx=\sum_{r=0}^{\alpha}(-1)^r\binom{\alpha}{r}\frac{1}{z^r}\int_0^z x^r f(x)dx$$

Fazendo $x = z$ no segundo membro da expressão (24) apresentada no apêndice A e substituindo-a na expressão anterior, segue-se que a expressão da classe geral de medidas de FGT para a distribuição log-normal será dada por:

$$\varphi(\alpha)=\sum_{r=0}^{\alpha}(-1)^r\binom{\alpha}{r}\frac{\mu^r}{z^r}\exp\left[r(r-1)\frac{\beta^2}{2}\right]\Phi\left[\frac{\ln(z/\mu)}{\beta}+\left(\frac{1}{2}-r\right)\beta\right] \tag{7}$$

A família de medidas de FGT inclui como casos particulares a proporção de pobres e o índice de insuficiência de renda, quando o parâmetro α assume valores $\alpha = 0$ e $\alpha = 1$, respectivamente. O quadro 2 apresenta as expressões da proporção de pobres, do índice de insuficiência de renda e da medida de FGT com $\alpha = 2$ para a distribuição log-normal, obtidas diretamente da expressão (7). Vale ressaltar que esta é uma expressão inédita na literatura e uma maneira relativamente simples de se obter estimativas das medidas de pobreza de FGT para $\alpha \geq 0$ pois, uma vez estabelecida a linha de pobreza (z), requer apenas os valores do rendimento médio (μ) e do desvio-padrão do logaritmo dos rendimentos (β).

QUADRO 2
Medidas de pobreza para a distribuição log-normal

Medida de pobreza e valor de α	Expressão para a distribuição log-normal [a]
Proporção de pobres $(\alpha = 0)$	$\Phi\left[\frac{\ln(z/\mu)}{\beta}+\frac{\beta}{2}\right]$
Índice de insuficiência de renda $(\alpha = 1)$	$\Phi\left[\frac{\ln(z/\mu)}{\beta}+\frac{\beta}{2}\right]-\frac{\mu}{z}\Phi\left[\frac{\ln(z/\mu)}{\beta}-\frac{\beta}{2}\right]$
Medida de FGT $(\alpha = 2)$	$\Phi\left[\frac{\ln(z/\mu)}{\beta}+\frac{\beta}{2}\right]-2\frac{\mu}{z}\Phi\left[\frac{\ln(z/\mu)}{\beta}-\frac{\beta}{2}\right]+\frac{\mu^2}{z^2}\exp(\beta^2)\Phi\left[\frac{\ln(z/\mu)}{\beta}-\frac{3\beta}{2}\right]$

[a] Obtidas por substituição direta dos respectivos valores dos parâmetros na expressão (7).

4 AVALIAÇÃO DAS ESTIMATIVAS DAS MEDIDAS DE POBREZA

O objetivo desta seção será avaliar o grau de exatidão das estimativas das medidas de pobreza obtidas admitindo-se que a distribuição de renda é log-normal, sendo um passo prévio antes de avançar para a derivação das elasticidades-desigualdade a partir do PLN. Nas tabelas 1 e 2 são apresentados os valores das medidas de pobreza, calculados com dados da Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios (Pnad) do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) sobre rendimentos domiciliares *per capita* no Brasil, de 1992 a 2004, e suas estimativas obtidas admitindo-se que a distribuição de renda é log-normal para as linhas de pobreza de R$ 75 e R$ 150, respectivamente.[6] As medidas de pobreza utilizadas são a proporção de pobres, o índice de insuficiência de renda[7] e a medida de FGT com $\alpha = 2$. Dada a linha de pobreza (z), as estimativas das medidas de pobreza podem ser facilmente obtidas por substituição dos valores observados do rendimento médio (μ) e do desvio-padrão do logaritmo dos rendimentos (β) nas fórmulas apresentadas no quadro 2.

Verifica-se, nas tabelas 1 e 2, que os valores observados das medidas de pobreza e suas estimativas para o Brasil são relativamente próximos. Com exceção da

TABELA 1

Distribuição do rendimento domiciliar *per capita* no Brasil: rendimento médio (μ), desvio-padrão dos logaritmos da renda (β), valores observados e estimativas da proporção de pobres (*H*), índice de insuficiência de renda (*HI*) e medida de FGT com α = 2 para a distribuição log-normal, calculadas adotando-se a linha de pobreza de R$ 75 – 1992 a 2004

Ano	μ^a	β	H^b	H^c	(%)^d	HI^b	HI^c	(%)^d	FGT^b	FGT^c	(%)^d
1992	334,12	1,1177	0,2033	0,2184	7,41	0,0848	0,0891	5,02	0,0485	0,0493	1,78
1993	351,01	1,1375	0,2079	0,2153	3,59	0,0854	0,0886	3,73	0,0485	0,0494	1,70
1995	436,15	1,1123	0,1538	0,1523	–0,97	0,0569	0,0580	1,82	0,0296	0,0306	3,23
1996	445,59	1,1253	0,1621	0,1536	–5,21	0,0588	0,0590	0,35	0,0309	0,0314	1,41
1997	443,58	1,1291	0,1598	0,1563	–2,20	0,0593	0,0603	1,79	0,0315	0,0322	2,03
1998	448,01	1,1065	0,1456	0,1441	–1,01	0,0542	0,0541	–0,06	0,0276	0,0283	2,69
1999	422,33	1,0945	0,1558	0,1511	–3,00	0,0560	0,0568	1,53	0,0288	0,0297	3,23
2001	430,59	1,1022	0,1526	0,1505	–1,38	0,0558	0,0568	1,82	0,0295	0,0298	1,09
2002	429,11	1,0827	0,1419	0,1424	0,33	0,0508	0,0526	3,72	0,0262	0,0272	3,59
2003	404,61	1,0847	0,1525	0,1559	2,25	0,0557	0,0586	5,28	0,0296	0,0306	3,39
2004	417,08	1,0548	0,1303	0,1358	4,25	0,0465	0,0490	5,34	0,0245	0,0248	1,23

[a] Em reais de maio-junho de 2005.

[b] Calculado a partir dos microdados da Pnad.

[c] Obtidos pelas expressões do quadro 2.

[d] Desvio relativo (%) da estimativa da medida de pobreza em relação ao seu valor observado.

6. Considera-se a distribuição do rendimento domiciliar *per capita* para domicílios particulares permanentes com declaração não-nula do rendimento domiciliar (foram excluídos os domicílios com rendimento domiciliar nulo ou ignorado). Os rendimentos foram expressos em reais de maio-junho de 2005, utilizando-se como deflator um índice derivado do Índice Nacional de Preços ao Consumidor (INPC), conforme proposto por Corseuil e Foguel (2002), adotando-se o primeiro bimestre de vigência do salário mínimo (SM) de R$ 300 como período-base. As medidas de pobreza foram calculadas utilizando-se linhas de pobreza com valores de 1/4 e 1/2 desse SM. No ano de 2004 foram consideradas apenas as áreas urbanas dos estados da antiga região Norte (Rondônia, Acre, Amazonas, Roraima, Pará e Amapá), com intuito de manter uniformidade com o período anterior, já que até o ano de 2003 a Pnad coletava dados apenas das suas áreas urbanas.

7. O índice de insuficiência de renda é a medida de FGT com $\alpha = 1$.

TABELA 2

Distribuição do rendimento domiciliar *per capita* no Brasil: rendimento médio (μ), desvio-padrão dos logaritmos da renda (β), valores observados e estimativas da proporção de pobres (*H*), índice de insuficiência de renda (*HI*) e medida de FGT com α = 2 para a distribuição log-normal calculadas adotando-se a linha de pobreza de R$ 150 – 1992 a 2004

Ano	μ[a]	β	*H*[b]	*H*[c]	(%)[d]	*HI*[b]	*HI*[c]	(%)[d]	*FGT*[b]	*FGT*[c]	(%)[d]
1992	334,12	1,1177	0,4303	0,4374	1,64	0,2049	0,2122	3,55	0,1264	0,1316	4,11
1993	351,01	1,1375	0,4398	0,4291	–2,43	0,2081	0,2090	0,40	0,1278	0,1301	1,76
1995	436,15	1,1123	0,3603	0,3433	–4,73	0,1597	0,1549	–3,01	0,0928	0,0916	–1,26
1996	445,59	1,1253	0,3581	0,3428	–4,27	0,1595	0,1557	–2,38	0,0939	0,0925	–1,45
1997	443,58	1,1291	0,3614	0,3461	–4,22	0,1610	0,1579	–1,94	0,0947	0,0942	–0,56
1998	448,01	1,1065	0,3476	0,3315	–4,61	0,1539	0,1478	–3,98	0,0889	0,0867	–2,54
1999	422,33	1,0945	0,3644	0,3451	–5,30	0,1599	0,1545	–3,38	0,0924	0,0908	–1,74
2001	430,59	1,1022	0,3577	0,3425	–4,25	0,1563	0,1536	–1,73	0,0909	0,0905	–0,45
2002	429,11	1,0827	0,3514	0,3338	–5,02	0,1513	0,1471	–2,75	0,0860	0,0855	–0,54
2003	404,61	1,0847	0,3672	0,3548	–3,37	0,1588	0,1591	0,19	0,0918	0,0936	1,88
2004	417,08	1,0548	0,3403	0,3292	–3,26	0,1415	0,1423	0,57	0,0797	0,0815	2,24

[a] Em reais de maio-junho de 2005.

[b] Calculado a partir dos microdados da Pnad.

[c] Obtidos pelas expressões do quadro 2.

[d] Desvio relativo (%) da estimativa da medida de pobreza em relação ao seu valor observado.

proporção de pobres na linha de pobreza de R$ 75 no ano de 1992, o valor absoluto do desvio relativo da estimativa pelo método log-normal em relação ao respectivo valor observado, para todas as medidas de pobreza no período analisado, nunca é superior a 5,4%. No caso específico da medida de FGT com α = 2, medida que leva em consideração aspectos relacionados à desigualdade na distribuição de renda entre os pobres, extensão e intensidade da pobreza, o valor absoluto dos desvios relativos das estimativas das medidas de pobreza nunca supera 3,6%, excetuado somente o valor estimado no ano de 1992 para a linha de pobreza de R$ 150. Conclui-se que a utilização das estimativas das medidas de pobreza para a distribuição log-normal é razoável, já que não divergiram muito em relação aos valores observados, o que nos qualifica a prosseguir nas seções seguintes à análise das elasticidades utilizando a suposição de que a distribuição do rendimento *x* permaneça log-normal.

Essa não é uma constatação surpreendente. A discussão de formas funcionais apropriadas para representar a distribuição de renda remonta ao século XIX. Vilfredo Pareto (1897) foi o primeiro a propor um modelo de distribuição de renda na forma de função de densidade de probabilidade. Estudos empíricos mostraram que a distribuição de Pareto se ajustava bem apenas à cauda superior da distribuição, não se adequando à cauda inferior. Gibrat (1931) sugeriu a distribuição log-normal, mais tarde analisada por Aitchison e Brown (1957). A distribuição log-normal, por sua vez, apresentava ajuste apropriado na cauda inferior e na parte central da distribuição dos rendimentos, mas insatisfatório na cauda superior. Na medida em que as pesquisas avançaram, várias formas funcionais foram propostas com intuito de melhorar o ajustamento aos dados observados, adquirindo complexidade crescente. Entretanto, se o objeto do estudo restringe-se à análise da pobreza, pouco importa que o ajustamento para a distribuição como um todo seja apenas aproximado, desde que o ajuste na cauda inferior da distribuição de renda seja adequado.

Quando dispomos dos microdados, não há nenhuma razão para pressupor que a distribuição de renda tenha determinada forma, se o objetivo for apenas calcular medidas de desigualdade e pobreza. Mas se desejarmos fazer previsões das mudanças nas medidas de pobreza decorrentes de possíveis mudanças nas medidas de desigualdade, é necessário estabelecer a maneira como se dará essa mudança na desigualdade. Dado o fato de que a distribuição log-normal produz boas estimativas das medidas de pobreza, parece razoável considerar, naquelas previsões, o padrão de mudança na desigualdade associado a essa distribuição. A próxima seção discute esse padrão de mudança da desigualdade e a seção seguinte deriva as expressões das eslasticidades-desigualdade das medidas de pobreza a partir dessa pressuposição.

5 PADRÕES DE MUDANÇA NA DESIGUALDADE

Já observamos que, para derivar as elasticidades da pobreza em relação às medidas de desigualdade, é indispensável pressupor um determinado padrão de mudança na desigualdade, o que permite vincular as mudanças da curva de Lorenz às mudanças numa medida de desigualdade específica. O padrão de mudança na desigualdade mais utilizado na literatura foi apresentado em Kakwani (1993) e consiste em pressupor que uma alteração de 100λ% no índice de Gini é obtida mudando-se as ordenadas da curva de Lorenz de $L(p)$ para $L(p) - [p - L(p)]\lambda$, o que equivale a fazer:

$$dL(p) = -\left[p - L(p)\right]\frac{dG}{G}$$

Com base no padrão de mudança da desigualdade especificado por essa expressão podemos fazer:

$$dL'(p) = -[1 - L'(p)]\frac{dG}{G} = -\left[\frac{\mu - x(p)}{\mu}\right]\frac{dG}{G}$$

$$\frac{dL'(p)}{L'(p)} = -\left[\frac{\mu - x(p)}{x(p)}\right]\frac{dG}{G} \tag{8}$$

ou:

$$\frac{\Delta L'(p)}{L'(p)} = -\left(\frac{\mu - x_i}{x_i}\right)\frac{\Delta G}{G} \tag{9}$$

que é uma aproximação da expressão anterior para uma distribuição discreta. Note-se que as expressões (8) e (9) vinculam a mudança na curva de Lorenz a uma mudança numa medida de desigualdade específica, no caso o índice de Gini. Para facilitar a exposição, denominaremos o padrão de mudança da desigualdade relacionado a essas expressões PK.

É possível obter um padrão de mudança da desigualdade alternativo ao se pressupor que as mudanças na desigualdade acompanham as mudanças da curva de Lorenz de uma distribuição log-normal, conforme mostram as expressões seguintes. Tomando-se a derivada da curva de Lorenz para a distribuição log-normal em (3):

$$L'(p) = \phi[Z(p) - \beta]$$

Segue-se que:

$$\frac{dL'(p)}{L'(p)} = \beta[Z(p) - \beta]\frac{d\beta}{\beta} = \left[\ln(x/\mu) - \frac{\beta^2}{2}\right]\frac{d\beta}{\beta} \tag{10}$$

sendo $Z(p)=\dfrac{\ln(x/\mu)}{\beta}+\dfrac{\beta}{2}$ a inversa da função de distribuição da variável normal reduzida. A aproximação para uma distribuição discreta da expressão anterior é:

$$\frac{\Delta L'(p)}{L'(p)}=\left[\ln(x_i/\mu)-\frac{\beta^2}{2}\right]\frac{\Delta\beta}{\beta} \qquad (11)$$

As expressões (10) e (11) relacionam a mudança na curva de Lorenz com as alterações no desvio-padrão dos logaritmos dos rendimentos e foram obtidas pressupondo-se que a mudança na desigualdade ocorre conforme a mudança da curva de Lorenz de uma distribuição log-normal, razão pela qual denominaremos esse padrão de mudança da desigualdade PLN. Uma vantagem do PLN em relação ao anterior é que as mudanças da curva de Lorenz podem ser vinculadas às alterações em várias medidas de desigualdade, apenas multiplicando-se as expressões (10) e (11) pelos fatores apresentados na última coluna do quadro 1.

Para explorar melhor as distinções entre esses padrões de mudança na desigualdade, vamos admitir que a renda média μ não se altere e reescrever as equações em função das rendas das pessoas. A mudança da desigualdade no PK equivale a alterar a renda da *i*-ésima pessoa de x_i para:

$$x_i+m_i \text{ com } m_i=-(\mu-x_i)\frac{\Delta G}{G}$$

na qual m_i é o montante adicionado (ou deduzido) à renda da pessoa após a mudança na desigualdade e μ é o limite entre pobres e ricos sob o PK. Portanto, o PK estabelece que uma diminuição no índice de Gini ocorrerá por meio de acréscimos de montantes $|m_i|$ às rendas das pessoas pobres x_i (com $x_i<\mu$) e decréscimos de montantes $|m_i|$ nas rendas das pessoas ricas x_i (com $x_i>\mu$), ocorrendo o oposto no caso de um aumento no índice de Gini. As pessoas com rendimentos iguais ao limite entre os pobres e os ricos ($x_i=\mu$), por sua vez, não irão observar modificações em seus rendimentos após a mudança da desigualdade.

Já no PLN a mudança da desigualdade corresponde a alterar a renda da *i*-ésima pessoa de x_i para:

$$(1+t_i)x_i \quad \text{com} \quad t_i=\ln(x_i/x_l)\frac{\Delta\beta}{\beta} \quad \text{e} \quad x_l=\mu\exp(\beta^2/2)$$

sendo t_i a taxa de variação da renda da pessoa após a mudança da desigualdade e x_l o limite entre os ricos e os pobres sob o PLN. De acordo com esse padrão de mudança da desigualdade, a diminuição no desvio-padrão do logaritmo dos rendimentos vai determinar um aumento de $100|t_i|$% na renda das pessoas pobres x_i (com $x_i < x_l$) e uma redução de $100|t_i|$% na renda das pessoas ricas x_i (com $x_i > x_l$), ocorrendo o inverso quando houver aumento no desvio-padrão do logaritmo dos rendimentos. Semelhantemente ao caso anterior, a alteração da desigualdade não irá modificar as rendas das pessoas que recebem valor igual ao limite entre pobres e ricos ($x_i = x_l$). No entanto, cabe observar que o valor do limite x_l sob o PLN dependerá não apenas do valor do rendimento médio μ, como no caso anterior, mas também do fator $\exp\left(\beta^2/2\right) \geq 1$ que cresce com β. O limite x_l vai variar com o nível de desigualdade da distribuição dos rendimentos (medida pelo desvio-padrão do logaritmo dos rendimentos), se aproximando da renda média para baixos níveis de desigualdade e se afastando para maior desigualdade.

O PK e o PLN são, à primeira vista, igualmente arbitrários e restritivos. Em ambos, as mudanças nas rendas das pessoas dependem das mudanças numa determinada medida de desigualdade e do limite entre pobres e ricos. Uma diferença relevante é que o limite entre pobres e ricos, no primeiro, considera apenas a renda média, enquanto o segundo considera também a desigualdade na distribuição dos rendimentos. Outra distinção importante é que as alterações nos rendimentos das pessoas sob o PK são obtidas pela adição (ou dedução) de montantes (m_i) à sua renda, proporcionais ao *desvio* da renda da pessoa em relação à média, enquanto o PLN considera taxas de crescimento (t_i) que dependem da *relação* entre a renda da pessoa e o limite entre ricos e pobres x_l.[8]

Uma limitação do PLN é que não permite considerar o efeito da mudança na desigualdade sobre as pessoas com rendimento nulo, já que exige o cálculo do logaritmo desse valor. O PK também possui uma limitação quando as pessoas têm rendimentos nulos, ou mesmo para baixos rendimentos não-nulos, pois a dedução de montantes às suas rendas em resposta ao aumento da desigualdade pode tornar seus rendimentos negativos.

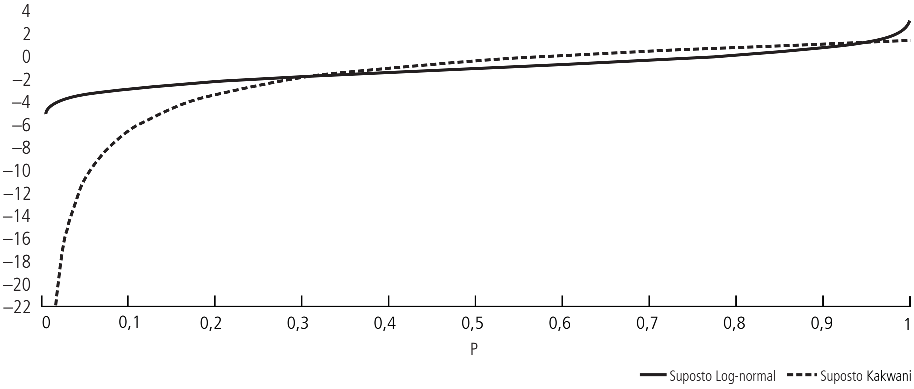
No PK o valor absoluto da variação relativa na renda de um rico será sempre inferior à mudança relativa no índice de Gini, ao passo que a variação relativa na renda de uma pessoa pobre tende a infinito quando x_i se aproxima de 0. No PLN, um aumento na desigualdade corresponde a um aumento na variância dos

8. Uma característica adicional desses padrões de mudança na desigualdade é que estabelecem certa simetria nas mudanças das rendas das pessoas. No PK o montante m_p adicionado à renda de uma pessoa pobre com renda x_p, após a redução da desigualdade, será de igual magnitude (em valor absoluto) e sinal contrário ao montante deduzido da renda de uma pessoa rica com renda x_r quando $x_r - \mu = \mu - x_p$. Para o PLN, a taxa de crescimento t_p da renda de uma pessoa pobre com renda x_p, após a redução da desigualdade, será de igual magnitude (em valor absoluto) e sinal contrário à taxa de redução da renda de uma pessoa rica com renda x_r quando $x_r/x_l = x_l/x_p$.

logaritmos das rendas (β^2). Em uma distribuição log-normal o aumento da variância corresponde a variações simétricas nos logaritmos das rendas, em torno do logaritmo da renda mediana, sendo que uma determinada variação no logaritmo corresponde a determinada variação relativa na renda. Mas como desejamos alterar a desigualdade sem alterar a média, será necessário mudar também o parâmetro θ.[9] Ainda assim, permanece a simetria no padrão de variações das rendas, como mostra o gráfico a seguir, que permite comparar as variações relativas para um aumento de 1% no índice de Gini, sob o PK e sob o PLN, partindo de uma distribuição log-normal com índice de Gini igual a 0,57.

Como o PK leva a alterações mais fortes na cauda esquerda, é previsível que a correspondente elasticidade-desigualdade da pobreza tenderá a ser maior do que a obtida com o PLN, pelo menos para medidas sensíveis à intensidade da pobreza. Trabalho recente de Barros *et al.* (2007), ao examinar as mudanças na distribuição de renda no Brasil entre 2001 e 2005, fez uso do Suposto Kakwani, sem usar essa denominação.[10] Dada a redução de 4,6% no índice de Gini observada no período, os autores constataram que a diferença entre as taxas de crescimento da renda dos 10% mais pobres e dos 10% mais ricos obtida com base no PK é muito maior do que a diferença observada. Mesmo em um período em que os programas de transferência de renda (como o Bolsa Família) tiveram um papel relevante na redução da desigualdade da distribuição de renda no Brasil, o PK leva a superestimar os benefícios para os pobres decorrentes dessa redução da desigualdade. É certo que o PK, mesmo sendo improvável sua ocorrência, poderia ser considerado um padrão

Variações percentuais nos quantis para se obter um aumento de 1% no índice de Gini, a partir de uma distribuição log-normal com índice de Gini igual a 0,57



9. Ver a expressão para a média da distribuição log-normal no apêndice A.

10. O padrão de mudança na desigualdade está claramente descrito na nota de rodapé 2 daquele trabalho.

desejável, se o objetivo fosse reduzir a pobreza por meio de reduções na desigualdade. Assim, ele é, necessariamente, um padrão indesejável quando ocorre um aumento da desigualdade.

6 ELASTICIDADES DAS MEDIDAS DE POBREZA

As variações nas medidas de pobreza podem ser decompostas em dois fatores determinantes: *a*) magnitude da taxa de crescimento econômico (crescimento do rendimento médio da população); e *b*) mudanças da desigualdade na distribuição dos rendimentos. É possível decompor as mudanças relativas na proporção de pobres e nas medidas de FGT com $\alpha > 0$ em dois termos aditivos, conforme as seguintes equações:

$$\frac{dH}{H} = -\frac{zf(z)}{H}\frac{d\mu}{\mu} - \frac{zf(z)}{H}\frac{dL'(H)}{L'(H)} \tag{12}$$

$$\frac{d\varphi(\alpha)}{\varphi(\alpha)} = -\frac{\alpha}{\varphi(\alpha)}\int_0^H \left(\frac{z-x}{z}\right)^{\alpha-1} \frac{x(p)}{z}\frac{d\mu}{\mu}dp - \\ -\frac{\alpha}{\varphi(\alpha)}\int_0^H \left(\frac{z-x}{z}\right)^{\alpha-1} \frac{x(p)}{z}\frac{dL'(p)}{L'(p)}dp \quad \text{para} \quad \alpha > 0 \tag{13}$$

O primeiro termo dessas equações corresponde ao componente-crescimento, que mede o impacto das mudanças do rendimento médio, e o segundo termo corresponde ao componente-distribuição, que mede o impacto das mudanças da desigualdade na distribuição dos rendimentos (modificações na curva de Lorenz) sobre a medida de pobreza.

Considerando-se o primeiro termo no segundo membro da expressão (12), a elasticidade-crescimento da proporção de pobres é:

$$\varepsilon[H \mid \mu] = -\frac{zf(z)}{H} \quad \text{para} \quad \alpha = 0 \tag{14}$$

Para as medidas de FGT com $\alpha > 0$, a partir do primeiro termo no segundo membro da expressão (9), a elasticidade em relação ao rendimento médio é:

$$\varepsilon\left[\varphi(\alpha|\mu)\right] = -\frac{\alpha}{\varphi(\alpha)}\int_0^H \left(\frac{z-x}{z}\right)^{\alpha-1}\frac{x}{z}dp =$$
$$= \frac{\alpha}{\varphi(\alpha)}\left[\int_0^z \left(\frac{z-x}{z}\right)^{\alpha} f(x)dx - \int_0^z \left(\frac{z-x}{z}\right)^{\alpha-1} f(x)dx\right]$$

$$\varepsilon\left[\varphi(\alpha)|\mu\right] = \alpha\left[\frac{\varphi(\alpha)-\varphi(\alpha-1)}{\varphi(\alpha)}\right] \quad \text{para} \quad \alpha > 0 \tag{15}$$

Para derivar as elasticidades-desigualdade da pobreza é indispensável pressupor um determinado padrão de mudança na desigualdade. Utilizando-se o PK, as elasticidades das medidas de pobreza em relação ao índice de Gini podem ser obtidas pela substituição da expressão (8) no segundo termo do segundo membro das expressões (12) e (13). Seguem-se a elasticidade da proporção de pobres em relação ao índice de Gini

$$\varepsilon[H|G] = -\frac{zf(z)}{H}\left(\frac{z-\mu}{z}\right) = \frac{(\mu-z)}{H}f(z) \tag{16}$$

e a elasticidade das medidas de FGT com $\alpha > 0$ em relação ao índice de Gini:

$$\varepsilon\left[\varphi(\alpha)|G\right] = -\frac{\alpha}{\varphi(\alpha)}\int_0^H \left(\frac{z-x}{z}\right)^{\alpha-1}\frac{x(p)}{z}\frac{\left[x(p)-\mu\right]}{x(p)}dp =$$
$$= -\frac{\alpha}{\varphi(\alpha)}\left[\int_0^H \left(\frac{z-x}{z}\right)^{\alpha-1}\frac{x(p)}{z}dp - \frac{\mu}{z}\int_0^H \left(\frac{z-x}{z}\right)^{\alpha-1}dp\right]$$

$$\varepsilon\left[\varphi(\alpha)|G\right] = \varepsilon\left[\varphi(\alpha)|\mu\right] + \alpha\frac{\mu}{z}\frac{\varphi(\alpha-1)}{\varphi(\alpha)} \quad \text{para} \quad \alpha > 0 \tag{17}$$

As expressões (14), (15), (16) e (17) foram apresentadas por Kakwani (1993); e a exposição das deduções anteriores é muito semelhante à do próprio autor. Vale lembrar que as elasticidades-desigualdade já apresentadas foram derivadas a partir do PK. Para derivar as elasticidades-desigualdade com base no PLN podemos utilizar um procedimento semelhante. Substituindo-se a expressão (10) com $p = H$ e a expressão (23) com $x = z$ no segundo termo do segundo membro da expressão (12), segue-se a elasticidade da proporção de pobres em relação ao desvio-padrão do logaritmo dos rendimentos:

$$\varepsilon[H|\beta] = -\frac{zf(z)}{H}\beta[Z(H)-\beta] = = -\frac{1}{H}\left[\frac{\ln(z/\mu)}{\beta} - \frac{\beta}{2}\right]\phi\left[\frac{\ln(z/\mu)}{\beta} + \frac{\beta}{2}\right] \quad (18)$$

É possível também deduzir que as elasticidades em relação ao desvio-padrão dos logaritmos dos rendimentos para as medidas de FGT com $\alpha = 1$ e $\alpha > 1$, sob o PLN, serão dadas por:[11]

$$\varepsilon[\varphi(\alpha=1)|\beta] = \frac{\beta}{\varphi(\alpha=1)}\phi\left[\frac{\ln(x/\mu)}{\beta} + \frac{\beta}{2}\right] \quad \text{para} \quad \alpha = 1 \quad (19)$$

$$\varepsilon[\varphi(\alpha)|\beta] = \frac{\alpha(\alpha-1)\beta^2}{\varphi(\alpha)}[\varphi(\alpha) - 2\varphi(\alpha-1) + \varphi(\alpha-2)] \quad \text{para} \quad \alpha > 1 \quad (20)$$

Bourguignon (2002) mostra expressões semelhantes a (18) e (19), mas sem apresentar a sua dedução. Este trabalho, além de apresentar a dedução dessas expressões, também inclui a fórmula geral da elasticidade das medidas de FGT em relação ao desvio-padrão dos logaritmos dos rendimentos para $\alpha > 1$. Uma vantagem de adotarmos o PLN é a possibilidade de inclusão das elasticidades em relação a várias medidas de desigualdade. Conforme podemos observar no quadro 1, as

11. Para as deduções dessas expressões, ver apêndice B.

medidas de desigualdade para a distribuição log-normal são funções do desvio-padrão dos logaritmos dos rendimentos. Seja S^* uma medida de desigualdade, que pode ser o índice de Gini ou qualquer membro da classe geral de medidas de desigualdade S. O fator multiplicativo $\frac{d\beta/\beta}{dS^*/S^*}$ nos permite relacionar as mudanças relativas nas respectivas medidas de desigualdade com as mudanças no desvio-padrão dos logaritmos dos rendimentos, de maneira que a elasticidade da medida de pobreza em relação à medida de desigualdade S^* será:

$$\varepsilon\left[\varphi(\alpha) \mid S^*\right] = \varepsilon\left[\varphi(\alpha) \mid \beta\right] \frac{d\beta/\beta}{dS^*/S^*}$$

Assim, as elasticidades das medidas de pobreza em relação ao índice de Gini e às medidas de desigualdade S podem ser obtidas multiplicando as respectivas elasticidades em relação ao desvio-padrão dos logaritmos dos rendimentos pelos fatores $\frac{d\beta/\beta}{dS^*/S^*}$, que estão expostos na última coluna do quadro 1. O quadro 3 reapresenta as fórmulas das elasticidades-crescimento e elasticidades-desigualdade das medidas de pobreza de FGT.

QUADRO 3
Elasticidades das medidas de pobreza de Foster, Greer e Thorbecke

Valor do parâmetro	Elasticidade-crescimento $\varepsilon[\varphi(\alpha)\mid\mu]$	Elasticidade-desigualdade PK $\varepsilon[\varphi(\alpha)\mid G]$	Elasticidade-desigualdade PLN $\varepsilon[\varphi(\alpha)\mid\beta]$
$\alpha = 0$	$-\frac{zf(z)}{H}$	$\frac{(\mu - z)}{H} f(z)$	$-\frac{1}{H}\left[\frac{\ln(z/\mu)}{\beta} - \frac{\beta}{2}\right]\phi\left[\frac{\ln(z/\mu)}{\beta} + \frac{\beta}{2}\right]$
$\alpha > 0$	$\alpha\left[\frac{\varphi(\alpha) - \varphi(\alpha-1)}{\varphi(\alpha)}\right]$	$\varepsilon[\varphi(\alpha)\mid\mu] + \alpha\frac{\mu}{z}\frac{\varphi(\alpha-1)}{\varphi(\alpha)}$	-
$\alpha = 1$	-	-	$\frac{\beta}{\varphi(\alpha=1)}\phi\left[\frac{\ln(z/\mu)}{\beta} + \frac{\beta}{2}\right]$
$\alpha > 1$	-	-	$\frac{\alpha(\alpha-1)\beta^2}{\varphi(\alpha)}[\varphi(\alpha) - 2\varphi(\alpha-1) + \varphi(\alpha-2)]$

Finalmente, substituindo-se as respectivas fórmulas das elasticidades nas expressões (8) e (9) que decompõem as mudanças relativas nas medidas de FGT em componente-crescimento e componente-distribuição, é possível deduzir que:

$$d\ln\varphi(\alpha)=\varepsilon\left[\varphi(\alpha)\,|\,\mu\right]d\ln\mu+\varepsilon\left[\varphi(\alpha)\,|\,S^{*}\right]d\ln S^{*} \tag{21}$$

expressão na qual S^* é uma medida de desigualdade, que pode ser o desvio-padrão dos logaritmos dos rendimentos, o índice de Gini ou qualquer membro da classe de medidas de desigualdade S. Nessa expressão, a elasticidade-desigualdade teórica $\varepsilon[\varphi(\alpha)|S^*]$ pode ser a elasticidade em relação ao índice de Gini derivada a partir do PK, em relação ao índice de Gini sob o PLN ou em relação a alguma das demais medidas de desigualdade sob o PLN. Ressalte-se que as expressões das elasticidades em relação ao índice de Gini sob o PK são distintas daquelas derivadas sob o PLN. Já as expressões das elasticidades-crescimento $\varepsilon[\varphi(\alpha)|\mu]$ independem da adoção de distintos padrões de mudança da curva de Lorenz.

7 AVALIAÇÃO DAS ESTIMATIVAS DAS ELASTICIDADES DAS MEDIDAS DE POBREZA

Nesta seção, a análise de regressão é utilizada com o objetivo principal de avaliar o grau de adequação da aplicação empírica das diversas fórmulas de cálculos das elasticidades. Secundariamente, procuraremos avaliar qual padrão de mudança da curva de Lorenz – PK ou PLN – representa melhor as mudanças observadas nas medidas de pobreza. Utilizaremos os dados advindos das Pnads no período 1992-2004 para a distribuição da renda *per capita* dos domicílios particulares permanentes com declaração não-nula do rendimento, convertidos em reais de maio-junho de 2005 pelo INPC corrigido. Foram calculados o rendimento médio, as medidas de desigualdade (desvio-padrão do logaritmo dos rendimentos, índice de Gini e L de Theil) e as medidas de pobreza (proporção de pobres, índice de insuficiência de renda e medida de FGT com $\alpha = 2$) das 27 UFs durante o período 1992-2004, excetuados os anos 1994 e 2000, nos quais a Pnad não foi realizada. As medidas de pobreza foram calculadas adotando-se duas linhas de pobreza alternativas, nos valores de 1/4 e 1/2 do SM de R$ 300 vigente no bimestre maio-junho de 2005, ou seja, R$ 75 e R$ 150 *per capita*. Com base nesses dados, obtivemos um painel com 270 observações das mudanças relativas nas medidas de pobreza, no rendimento médio e nas medidas de desigualdade.[12]

As elasticidades das medidas de pobreza foram calculadas utilizando-se dois métodos distintos, cujos procedimentos de cálculo são apresentados no apêndice C.

12. Tabelas com os 297 valores de cada medida de pobreza e desigualdade utilizada podem ser encontradas em Orair (2006).

No método I as elasticidades-desigualdade da pobreza são derivadas a partir do PK e no método II são derivadas a partir do PLN. Uma vantagem adicional de utilizarmos o PLN é a possibilidade de inclusão da elasticidade em relação ao *L* de Theil, que é uma medida de desigualdade mais sensível a alterações nas rendas dos pobres. Utilizaremos cinco elasticidades teóricas para cada medida de pobreza: 1) elasticidade em relação ao rendimento médio pelo método I; 2) elasticidade em relação ao rendimento médio pelo método II; 3) elasticidade em relação ao índice de Gini pelo método I derivada sob o PK; 4) elasticidade em relação ao índice de Gini pelo método II derivada sob o PLN; e 5) elasticidade em relação ao *L* de Theil pelo método II derivada sob o PLN.

Conforme a expressão (21), as mudanças nas medidas de pobreza $\varphi(\alpha)$ podem ser decompostas em dois termos que consideram explicitamente as elasticidades teóricas. Fazendo analogia direta com essa decomposição, utilizaremos o seguinte modelo de regressão:

$$\Delta \ln \varphi(\alpha)_{it} = \beta_1 \varepsilon\left[\varphi(\alpha) \mid \mu\right]_{it} \Delta \ln \mu_{it} + \beta_2 \varepsilon\left[\varphi(\alpha) \mid S^*\right]_{it} \Delta \ln S^*_{it} + e_{it}$$

em que e_{it} é um termo aleatório. A variável dependente $\Delta \ln \varphi(\alpha)_{it}$ é a mudança relativa na medida de pobreza. As duas variáveis explanatórias são o produto da elasticidade-crescimento $\varepsilon[\varphi(\alpha)|\mu]_{it}$ da medida de pobreza pela taxa de crescimento do rendimento médio $\Delta \ln \mu_{it}$ e o produto da elasticidade-desigualdade $\varepsilon[\varphi(\alpha)|S^*]_{it}$ pela mudança relativa na medida de desigualdade $\Delta \ln S^*_{it}$. Utilizaremos o método dos Mínimos Quadrados Ordinários (MQO) com correção dos desvios-padrão dos parâmetros para dados em painel.[13] Se as elasticidades teóricas são satisfatórias na explicação das mudanças observadas nas medidas de pobreza, espera-se que os valores dos coeficientes β_1 e β_2 não sejam estatisticamente distintos de 1 e o valor explicativo do modelo seja relativamente alto.

Os resultados das regressões que procuram explicar as mudanças nas medidas de pobreza, calculadas adotando-se as linhas de pobreza de R$ 75 e R$ 150, a partir da interação entre os valores das elasticidades teóricas e as mudanças observadas no rendimento médio e nas medidas de desigualdade, podem ser visualizados nas tabelas 3 e 4 (valor de *t* entre parênteses). As regressões utilizando-se as elasticidades em relação ao índice de Gini calculadas pelo método I e pelo método II nas tabelas 3 e 4 apresentaram valores não muito distintos para os coeficientes de determinação

13. Espera-se que nos dados em painel, com observações de uma mesma unidade ao longo do tempo, haja correlação entre resíduos contemporâneos (grandes desvios de uma unidade *i* no tempo *t* estejam associados a grandes desvios de uma unidade *j* no tempo *t*) e exista heterocedasticia (as variâncias dos desvios diferem de unidade para unidade). A correção dos desvios-padrão dos parâmetros permite obter intervalos de confiança apropriados. Ver Beck e Katz (1995).

TABELA 3
Brasil: poder explicativo das elasticidades teóricas na mudança total das medidas de pobreza (θ) calculadas adotando-se a linha de pobreza de R$ 75 nas UFs – 1992 a 2004
(Variável dependente: mudanças relativas na medida de pobreza)

Variável explanatória	Proporção de pobres			Índ. de insuf. de renda			Medida de FGT com $\alpha = 2$		
	Coef.	Intervalo de conf.[c]		Coef.	Intervalo de conf.[c]		Coef.	Intervalo de conf.[c]	
$\varepsilon[\theta\|\mu]^*\Delta\ln\mu$[a]	0,71343 (7,69)	0,53168	0,89517	0,80524 (8,74)	0,62467	0,98580	0,79211 (6,83)	0,56488	1,01935
$\varepsilon[\theta\|G]^*\Delta\ln G$[a]	0,38919 (6,87)	0,27811	0,50026	0,32739 (9,64)	0,26080	0,39398	0,26099 (7,82)	0,19561	0,32638
R^2	0,482			0,4859			0,3947		
$\varepsilon[\theta\|\mu]^*\Delta\ln\mu$[b]	0,93996 (7,88)	0,70627	1,17364	0,84013 (7,34)	0,61574	1,06452	0,77064 (5,19)	0,47954	1,06175
$\varepsilon[\theta\|G]^*\Delta\ln G$[b]	0,89677 (8,10)	0,67966	1,11387	0,71796 (8,69)	0,55595	0,87997	0,64869 (6,70)	0,45884	0,83855
R^2	0,5432			0,4794			0,3468		
$\varepsilon[\theta\|\mu]^*\Delta\ln\mu$[b]	1,03738 (11,07)	0,85364	1,22112	0,94306 (10,90)	0,77349	1,11263	0,89514 (7,43)	0,65913	1,13114
$\varepsilon[\theta\|L]^*\Delta\ln L$[b]	1,04851 (10,66)	0,85576	1,24125	0,88048 (12,78)	0,74547	1,01548	0,84563 (9,92)	0,67851	1,01276
R^2	0,7047			0,6729			0,5485		

Nota: Todos os modelos foram estimados pelo método dos MQOs com correções dos desvios-padrão para dados em painel.

[a] Elasticidade teórica obtida pelo método I sob o PK.

[b] Elasticidade teórica obtida pelo método II sob o PLN.

[c] Intervalo de 95% de confiança.

(R^2). O poder explicativo dessas regressões para a linha de pobreza de R$ 75 foi relativamente baixo, com os valores dos coeficientes de determinação contidos no intervalo 0,3468 a 0,5432. Quando adotamos a linha de pobreza de R$ 150, os valores dos coeficientes de determinação das regressões que utilizaram as elasticidades em relação ao índice de Gini aumentam para todas as medidas de pobreza, atingindo valores de 0,6327 a 0,8914.

Excetuando-se a regressão para a elasticidade da proporção de pobres na linha de pobreza de R$ 150, os valores dos coeficientes das elasticidades em relação ao índice de Gini pelo método I derivadas sob o PK são substancialmente inferiores a 1, enquanto os coeficientes das elasticidades em relação ao índice de Gini pelo método II derivadas sob o PLN estão mais próximos da unidade. Esses resultados indicam que os valores das elasticidades em relação ao índice de Gini obtidas a

TABELA 4
Brasil: poder explicativo das elasticidades teóricas na mudança total das medidas de pobreza (θ) calculadas adotando-se a linha de pobreza de R$ 150 nas UFs – 1992 a 2004
(Variável dependente: mudanças relativas na medida de pobreza)

Variável explanatória	Proporção de pobres			Índ. de insuf. de renda			Medida de FGT com $\alpha = 2$		
	Coef.	Intervalo de conf.[c]		Coef.	Intervalo de conf.[c]		Coef.	Intervalo de conf.[c]	
$\varepsilon[\theta\|\mu]*\Delta\ln\mu$[a]	0,92062 (13,78)	0,78970	1,05154	0,86859 (14,09)	0,74780	0,98939	0,84611 (11,77)	0,70520	0,98703
$\varepsilon[\theta\|G]*\Delta\ln G$[a]	1,00609 (9,93)	0,80761	1,20457	0,60740 (11,35)	0,50252	0,71228	0,45538 (10,38)	0,36937	0,54139
R^2	0,8052			0,7473			0,6564		
$\varepsilon[\theta\|\mu]*\Delta\ln\mu$[b]	1,08810 (22,73)	0,99426	1,18194	0,94775 (13,09)	0,80581	1,08970	0,89930 (9,87)	0,72075	1,07785
$\varepsilon[\theta\|G]*\Delta\ln G$[b]	1,13347 (16,34)	0,99749	1,26944	0,92323 (11,88)	0,77088	1,07559	0,82847 (10,28)	0,67058	0,98635
R^2	0,8914			0,7517			0,6327		
$\varepsilon[\theta\|\mu]*\Delta\ln\mu$[b]	1,11965 (21,93)	1,01960	1,21971	1,00965 (19,61)	0,90875	1,11055	0,97770 (15,04)	0,85028	1,10511
$\varepsilon[\theta\|L]*\Delta\ln L$[b]	1,08888 (14,57)	0,94236	1,23541	1,01438 (16,28)	0,89224	1,13653	0,96035 (14,73)	0,83259	1,08812
R^2	0,8761			0,8657			0,7946		

Notas: Todos os modelos foram estimados pelo método dos MQOs com correções dos desvios-padrão para dados em painel.

[a] Elasticidade teórica obtida pelo método I sob o PK.

[b] Elasticidade teórica obtida pelo método II sob o PLN.

[c] Intervalo de 95% de confiança.

partir do PLN estão mais próximos do valor observado e que os valores das elasticidades derivadas a partir do PK estão consideravelmente superestimados, excetuada unicamente a elasticidade da proporção de pobres na linha de pobreza de R$ 150. Hoffmann (2005) já destacou que o padrão de mudança da desigualdade utilizado por Kakwani (PK) pode conduzir a estimativas das elasticidades das medidas de pobreza em relação ao índice de Gini substancialmente mais altas do que os valores obtidos admitindo-se que a distribuição permaneça log-normal (PLN).

Numa perspectiva mais geral, os modelos que utilizaram a elasticidade em relação ao *L* de Theil pelo método II apresentaram os resultados mais satisfatórios entre os modelos analisados. Excetuada apenas a regressão para as mudanças da proporção de pobres na linha de pobreza de R$ 150, os intervalos de 95% de confiança de ambos os parâmetros nas regressões com o *L* de Theil contêm 1 e os valores dos coeficientes de determinação (R^2) das regressões foram maiores do que os valores obtidos pelos outros dois modelos. Para a linha de pobreza de R$ 150, o poder explicativo das regressões utilizando o *L* de Theil foi relativamente alto, com os coeficientes de determinação (R^2) nos valores de 0,8761 na regressão da proporção de pobres, 0,8657 no índice de insuficiência de renda e 0,7946 na medida de FGT com $\alpha = 2$. Para a linha de pobreza de R$ 75 os valores dos coeficientes de determinação foram 0,7047, 0,6729 e 0,5485, respectivamente.[14]

Podemos concluir que, quando utilizamos a medida *L* de Theil na linha de pobreza de maior valor, as elasticidades teóricas foram capazes de explicar muito bem as mudanças observadas nas medidas de pobreza. Já para a linha de pobreza de menor valor real, principalmente para a medida de FGT com $\alpha = 2$, parte considerável das mudanças nas medidas de pobreza permaneceu não explicada pelo modelo. Esse resultado é intuitivo. O *L* de Theil é uma medida mais sensível às modificações na cauda esquerda da distribuição e, por isso, as mudanças nessa medida de desigualdade captam melhor as mudanças na pobreza. Vale lembrar também que as mudanças nas medidas de pobreza consideram as alterações na cauda esquerda da distribuição de renda, delimitada pelo valor da linha de pobreza; enquanto as mudanças nas medidas de desigualdade consideram as alterações da distribuição de renda como um todo. Para uma linha de pobreza com maior valor real espera-se que as mudanças nas medidas de desigualdade se associem mais claramente aos efeitos das alterações na desigualdade sobre a pobreza. Por essas razões, apresentou um melhor ajuste aos dados observados a elasticidade-desigualdade teórica baseada em uma medida de desigualdade mais sensível ao que acontece na cauda esquerda da distribuição e calculada utilizando-se uma linha de pobreza de maior valor.

8 CONCLUSÕES

Neste artigo foram deduzidas expressões inéditas para a classe de medidas de pobreza de FGT e as elasticidades-desigualdade da pobreza para a distribuição log-normal. Preliminarmente, verificamos que medidas de pobreza calculadas admitindo que a distribuição de renda é log-normal são próximas dos valores obtidos diretamente dos dados, considerando a distribuição do rendimento domiciliar *per capita* no Brasil durante o período 1992-2004. Em seguida, baseados nos resultados das

14. Cabe enfatizar que estas regressões procuram explicar as variações nas medidas de pobreza a partir das variações na média e na medida de desigualdade. Se fosse feita uma regressão utilizando-se a medida de pobreza como variável dependente e a renda média e uma medida de desigualdade como variáveis explicativas, os coeficientes de determinação seriam substancialmente maiores. Para exemplificar, estimamos regressões com as 297 observações nas UFs do Brasil de 1992 a 2004 do logaritmo da proporção de pobres, do índice de insuficiência de renda e da medida de FGT com $\alpha = 2$, todas calculadas na linha de pobreza de R$ 75, contra o logaritmo da média e do *L* de Theil, e obtivemos coeficientes de determinação iguais a 0,951, 0,9595 e 0,9465, respectivamente.

regressões que utilizaram as estimativas das elasticidades das medidas de pobreza, concluímos que os modelos com as elasticidades em relação ao *L* de Theil pelo método II sob o PLN, na linha de pobreza de R$ 150, foram capazes de explicar razoavelmente bem as mudanças observadas nas medidas de pobreza nas 27 UFs no Brasil de 1992 e 2004. No entanto, para a linha de pobreza de menor valor real, parte considerável das mudanças nas medidas de pobreza permaneceu não explicada pelo modelo. Além disso, os resultados da análise de regressão sugerem que os valores das elasticidades em relação ao índice de Gini obtidos pelo método II sob o PLN estão mais próximos dos valores corretos do que as elasticidades do método I derivadas a partir do PK, que se mostraram quase sempre consideravelmente superestimadas.

Argumenta-se aqui que, ao menos para o caso brasileiro, a aplicação das estimativas das elasticidades da classe de medidas de FGT derivadas a partir do PK, que pressupõe um padrão de mudança da desigualdade baseado nas mudanças da curva de Lorenz de uma distribuição log-normal, é mais adequada do que a utilização das elasticidades-desigualdade derivadas por Kakwani (1993) e amplamente difundidas na literatura. Para exemplificar, tomemos os dados do período 2001-2004 para o Brasil que mostra reduções de 3,14% no rendimento médio, 3,85% no índice de Gini e 12,25% na medida de FGT com $\alpha = 2$ para a linha de pobreza de R$ 150. Utilizando-se o padrão de mudança da desigualdade apresentado por Kakwani (1993), as elasticidades teóricas fazem uma previsão, a partir dos dados de 2001, de queda de 27,2% na medida de pobreza, superestimando a queda efetivamente observada de 12,25%. Utilizando-se por sua vez a elasticidade derivada a partir do padrão de mudança da desigualdade baseado na mudança da curva de Lorenz de uma distribuição log-normal, obteve-se uma previsão de queda de 13,0% no valor da medida de pobreza, muito mais próxima ao que de fato ocorreu.[15]

ABSTRACT

The paper presents the expressions to compute the Foster, Greer and Thorbecke poverty indices assuming a log-normal income distribution and shows that these expressions produce good estimates of those indices for Brazil. Next, the paper derives expressions for the elasticities of those poverty measures with respect to the mean income and to inequality indices. Finally, using panel data for the 27 Brazilian states (or federation units) from 1992 to 2004, it is shown that the elasticities of the poverty measures with respect to inequality obtained with the log-normal method fit the data better than the elasticities estimated using Kakwani's (1993) assumption about the pattern of the Lorenz curve change.

15. A previsão da mudança na medida de pobreza corresponde ao valor da soma do produto da elasticidade em relação ao rendimento médio (–1,5499) pela taxa de variação na renda média (–3,14%) com o produto da elasticidade em relação ao índice de Gini (8,3292 para a elasticidade calculada sob o PK e 4,6505 sob o PLN) pela taxa de variação do índice de Gini (3,85%). As elasticidades foram obtidas diretamente das fórmulas apresentadas no quadro 3 e o fator multiplicativo no quadro 1. Os dados necessários ao cálculo dessas elasticidades estão disponíveis na tabela 2, à exceção do índice de Gini, cujos valores são 0,5873 em 2001 e 0,5647 em 2004.

REFERÊNCIAS

AITCHISON, J.; BROWN, J. A. *The lognormal distribution*: with special reference to its uses in economics. Cambridge University Press, 1957.

BARROS, R. P. de; CARVALHO, M.; FRANCO, S.; MENDONÇA, R. *A importância da queda recente da desigualdade na redução da pobreza*. Brasília: Ipea, 2007 (Texto para discussão, n. 1.256).

BECK, N.; KATZ, J. N. What to do (and not to do) with time-series cross-section data. *American Political Science Review*, v. 89, n. 3, p. 634-647, Sep. 1995.

BOURGUIGNON, F. *The growth elasticity of poverty reduction*: explaining heterogeneity across countries and time periods. 2002 (Delta Working Paper, n. 2002-2003).

CORSEUIL, C. H.; FOGUEL, M. N. *Uma sugestão de deflatores para rendas obtidas a partir de algumas pesquisas domiciliares do IBGE*. Brasília: Ipea, 2002 (Texto para discussão, n. 897).

COWELL, F. A. *Measuring inequality*. Londres: Prentice Hall/Harvester Wheatsheaf, 1995.

DATT, G. *Computational tools for poverty measurement and analysis*. Washington, D.C.: International Food and Nutrition Institute, 1998.

FOSTER, J.; GREER, J.; THORBECKE, E. A class of decomposable poverty measures. *Econometrica*, v. 52, n. 3, p. 761-766, 1984.

GIBRAT, R. *Les inégalités economiques*. Paris: Libraire du Recueil Sirey, 1931.

HOFFMANN, R. Relações entre pobreza absoluta, renda média e desigualdade da distribuição de renda. *Pesquisa e Planejamento Econômico,* v. 25, n. 2, p. 337–358, ago. 1995.

_______. *Distribuição de renda*: medidas de desigualdade e pobreza. São Paulo, Editora da Universidade de São Paulo, 1998.

_______. Elasticidade da pobreza em relação à renda média e à desigualdade no Brasil e nas unidades da federação. *Economia*, v. 6, n. 2, p. 255-289, jul. 2005.

KAKWANI, N. Poverty and economic growth: with application to Côte d'Ivoire. *Review of Income and Wealth*, s. 39, v. 2, p. 121-139, June 1993.

NEDER, H. D. Desenvolvimento de metodologias estatísticas aplicadas aos dados das Pnads. In: CAMPANHOLA, C.; GRAZIANO DA SILVA, J. (Orgs.). *O novo rural brasileiro*: rendas das famílias rurais, v. 5. Brasília: Embrapa, 2004.

ORAIR, R. O. *Como crescimento e desigualdade afetam a pobreza?* 2006. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Economia, Unicamp, 2006.

ORAIR, R. O.; HOFFMANN, R. *Como crescimento e desigualdade afetam a pobreza*? 2006. Trabalho apresentado no XI Encontro Nacional de Economia Política, 13 a 16, jun. 2006, Vitória, ES.

PARETO, V. *Cours d'economie politique*. Paris, F. Pichon, 1987.

THEIL, H. *Economics and information theory*. Amsterdam, North-Holland, 1967.

(Originais recebidos em agosto de 2007. Revistos em outubro de 2007.)

APÊNDICE A

DISTRIBUIÇÃO LOG-NORMAL

Diz-se que uma variável aleatória positiva x tem distribuição log-normal com dois parâmetros θ e β^2 se $y = \ln x$ é normalmente distribuída com média θ e variância β^2. A distribuição log-normal com dois parâmetros é indicada por $\Lambda(\theta;\ \beta^2)$. A função de densidade da distribuição de x é:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\beta x} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \theta}{\beta}\right)^2\right] \qquad x > 0$$

Da função geratriz de momentos $\mu_r = E\,(e^{ry})$ da distribuição normal, o r-ésimo momento com relação à origem corresponde a:

$$\mu_r = E\left(e^{ry}\right) = E\left(X^r\right) = e^{r\theta + r^2\beta^2/2}$$

Fazendo $r = 1$ nesta expressão, a média será:

$$\mu = E(X) = e^{\theta+\beta^2/2}$$

Tomando-se logaritmo e rearranjando-se os termos:

$$\theta = \ln\mu - \beta^2/2$$

Substituindo-a na primeira expressão, temos:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\beta x} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x/\mu)}{\beta} + \frac{\beta}{2}\right)^2\right] \qquad x > 0$$

em que a função de densidade de probabilidade da distribuição de *x* é uma função do desvio-padrão do logaritmo (β) e da média (μ). Reescrevendo a expressão anterior:

$$f(x)=\frac{\mu^r}{x^r}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\beta x}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x/\mu)}{\beta}+\frac{\beta}{2}\right)^2+r\ln(x/\mu)\right]$$

$$f(x)=\frac{\mu^r}{x^r}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\beta x}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\ln(x/\mu)}{\beta}\right)^2+(1-2r)\ln(x/\mu)+\left(\frac{\beta}{2}\right)^2\right]\right\}$$

Completando o quadrado no expoente, obteremos:

$$\left[\frac{\ln(x/\mu)}{\beta}+\left(\frac{1}{2}-r\right)\beta\right]^2-r(r-1)\beta^2=\left(\frac{\ln(x/\mu)}{\beta}\right)^2+(1-2r)\ln(x/\mu)+\left(\frac{\beta}{2}\right)^2$$

Daí:

$$f(x)=\frac{\mu^r e^{r(r-1)\frac{\beta^2}{2}}}{x^r}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\beta x}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{\ln(x/\mu)}{\beta}+\left(\frac{1}{2}-r\right)\beta\right]^2\right\}$$

Finalmente, temos uma forma alternativa de apresentar a função de densidade da distribuição log-normal:

$$f(x)=\frac{\mu^r e^{r(r-1)\frac{\beta^2}{2}}}{x^r}\frac{1}{\beta x}\phi\left[\frac{\ln(x/\mu)}{\beta}+\left(\frac{1}{2}-r\right)\beta\right] \tag{22}$$

sendo ϕ a função de densidade de probabilidade da distribuição normal reduzida.

Para $r = 0$, temos:

$$f(x) = \frac{1}{\beta x}\phi\left[\frac{\ln(x/\mu)}{\beta} + \frac{\beta}{2}\right] \tag{23}$$

Utilizando-se a expressão (20), podemos também obter:

$$\int_0^x y^r f(y)dy = \mu^r e^{r(r-1)\frac{\beta^2}{2}} \int_0^x \frac{1}{\beta y}\phi\left[\frac{\ln(y/\mu)}{\beta} + \left(\frac{1}{2} - r\right)\beta\right]dy$$

Fazendo $u = \dfrac{\ln(y/\mu)}{\beta} + \left(\dfrac{1}{2} - r\right)\beta$ e $du = \dfrac{1}{\beta y}dy$ na integral:

$$\int_0^x y^r f(y)dy = \mu^r e^{r(r-1)\frac{\beta^2}{2}} \int_{-\infty}^{\frac{\ln(x/\mu)}{\beta} + \left(\frac{1}{2} - r\right)\beta} \phi(u)du$$

$$\int_0^x y^r f(y)dy = \mu^r e^{r(r-1)\frac{\beta^2}{2}} \Phi\left[\frac{\ln(x/\mu)}{\beta} + \left(\frac{1}{2} - r\right)\beta\right] \tag{24}$$

na qual Φ é a função de distribuição de uma variável normal reduzida. As expressões (22) a (24) foram utilizadas nas deduções realizadas ao longo do trabalho.

APÊNDICE B

ELASTICIDADE-DESIGUALDADE SOB O SUPOSTO LOG-NORMAL

De acordo com o segundo membro do segundo termo da expressão (13) e o padrão de mudança da desigualdade em (10), a elasticidade da medida de FGT com $\alpha > 0$ em relação ao desvio-padrão dos logaritmos dos rendimentos sob o PLN é:

$$\varepsilon[\varphi(\alpha) \mid \beta] = -\frac{\alpha\beta}{\varphi(\alpha)} \int_0^H \left(\frac{z - x}{z}\right)^{\alpha - 1} \frac{x(p)}{z}\left[Z(p) - \beta\right]dp$$

Lembrando que:

$$Z(p) = \frac{\ln(x/\mu)}{\beta} + \frac{\beta}{2}$$

e

$$\left(\frac{z-x}{z}\right)^{\alpha-1}\frac{x}{z} = \left(\frac{z-x}{z}\right)^{\alpha-1} - \left(\frac{z-x}{z}\right)^{\alpha}$$

obtemos:

$$\begin{aligned}\varepsilon[\varphi(\alpha)|\beta] = \frac{\alpha\beta}{\varphi(\alpha)}\Bigg\{&\int_0^z \left(\frac{z-x}{z}\right)^{\alpha}\left[\frac{\ln(x/\mu)}{\beta} + \frac{\beta}{2}\right] f(x)dx - \\ &- \int_0^z \left(\frac{z-x}{z}\right)^{\alpha-1}\left[\frac{\ln(x/\mu)}{\beta} + \frac{\beta}{2}\right] f(x)dx\Bigg\} - \\ &- \frac{\alpha\beta^2}{\varphi(\alpha)}\left[\int_0^z \left(\frac{z-x}{z}\right)^{\alpha} f(x)dx - \int_0^z \left(\frac{z-x}{z}\right)^{\alpha-1} f(x)dx\right] \quad (25)\end{aligned}$$

Consideremos a seguinte integral:

$$\int_0^z \left(\frac{z-x}{z}\right)^{\alpha}\left[\frac{\ln(x/\mu)}{\beta} + \frac{\beta}{2}\right] f(x)dx$$

Integrando por partes, podemos fazer $u = -\beta\left(\frac{z-x}{z}\right)^{\alpha}$, com $du = \alpha\beta\left(\frac{z-x}{z}\right)^{\alpha-1}\frac{1}{z}dx$, e $v = xf(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\beta}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{\ln(x/\mu)}{\beta} + \frac{\beta}{2}\right]^2\right\}$, com $dv = -\frac{1}{\beta}\left[\frac{\ln(x/\mu)}{\beta} + \frac{\beta}{2}\right] f(x)dx$.

Por conseguinte,

$$\int_0^z \left(\frac{z-x}{z}\right)^{\alpha} \left[\frac{\ln(x/\mu)}{\beta} + \frac{\beta}{2}\right] f(x)dx = -\beta \left(\frac{z-x}{z}\right)^{\alpha} xf(x)\Big|_0^z -$$
$$-\alpha\beta \int_0^z \left(\frac{z-x}{z}\right)^{\alpha-1} \frac{x}{2} f(x)dx$$

Observando que o primeiro termo da expressão é nulo e desenvolvendo o segundo termo, obtemos:

$$\int_0^z \left(\frac{z-x}{z}\right)^{\alpha} \left[\frac{\ln(x/\mu)}{\beta} + \frac{\beta}{2}\right] f(x)dx = \alpha\beta \left[\int_0^z \left(\frac{z-x}{z}\right)^{\alpha} f(x)dx -\right.$$
$$\left.-\int_0^z \left(\frac{z-x}{z}\right)^{\alpha-1} f(x)dx\right]$$

Temos então:

$$\int_0^z \left(\frac{z-x}{z}\right)^{\alpha} \left[\frac{\ln(x/\mu)}{\beta} + \frac{\beta}{2}\right] f(x)dx = \alpha\beta\left[\varphi(\alpha) - \varphi(\alpha-1)\right] \tag{26}$$

Analogamente, podemos fazer:

$$\int_0^z \left(\frac{z-x}{z}\right)^{\alpha-1} \left[\frac{\ln(x/\mu)}{\beta} + \frac{\beta}{2}\right] f(x)dx = (\alpha-1)\beta\left[\varphi(\alpha-1) - \varphi(\alpha-2)\right] \tag{27}$$

Para α = 1, substituindo (21) e (24) em (23):

$$\varepsilon\left[\varphi(\alpha=1)|\beta\right]=\frac{\beta}{\varphi(\alpha=1)}\left\{\beta\left[\varphi(\alpha=1)-\varphi(\alpha=0)\right]-\right.$$
$$\left.-\int_0^z\left[\frac{\ln(x/\mu)}{\beta}+\frac{\beta}{2}\right]f(x)dx\right\}-$$
$$-\frac{\beta^2}{\varphi(\alpha=1)}\left[\varphi(\alpha=1)-\varphi(\alpha=0)\right]$$

$$\varepsilon\left[\varphi(\alpha=1)|\beta\right]=-\frac{\beta}{\varphi(\alpha=1)}\int_0^z\left[\frac{\ln(x/\mu)}{\beta}+\frac{\beta}{2}\right]\frac{1}{\beta x}\phi\left[\frac{\ln(x/\mu)}{\beta}+\frac{\beta}{2}\right]dx$$

Segue-se que a elasticidade da medida de FGT com α = 1 será dada por:

$$\varepsilon\left[\varphi(\alpha=1)|\beta\right]=\frac{\beta}{\varphi(\alpha=1)}\phi\left[\frac{\ln(x/\mu)}{\beta}+\frac{\beta}{2}\right]\quad \text{para}\quad \alpha=1$$

Para α > 1, as expressões (24) e (25) podem ser substituídas diretamente na expressão (23):

$$\varepsilon\left[\varphi(\alpha)|\beta\right]=\frac{\alpha^2\beta^2}{\varphi(\alpha)}\left[\varphi(\alpha)-\varphi(\alpha-1)\right]-\frac{\alpha(\alpha-1)\beta^2}{\varphi(\alpha)}\left[\varphi(\alpha-1)-\varphi(\alpha-2)\right]-$$
$$-\frac{\alpha\beta^2}{\varphi(\alpha)}\left[\varphi(\alpha)-\varphi(\alpha-1)\right]$$

Segue-se a expressão da elasticidade em relação ao desvio-padrão dos logaritmos dos rendimentos das medidas de FGT com α > 1:

$$\varepsilon\left[\varphi(\alpha)|\beta\right]=\frac{\alpha(\alpha-1)\beta^2}{\varphi(\alpha)}\left[\varphi(\alpha)-2\varphi(\alpha-1)+\varphi(\alpha-2)\right]\quad \text{para}\quad \alpha>1$$

APÊNDICE C

PROCEDIMENTOS DE CÁLCULO DAS ELASTICIDADES

Neste apêndice descrevemos os dois métodos alternativos de cálculo das estimativas das elasticidades das medidas de pobreza.

Método I

O método I utiliza as fórmulas das elasticidades-crescimento e das elasticidades-desigualdade derivadas sob o PK. Definida a linha de pobreza (z), as elasticidades das medidas de FGT com $\alpha > 0$ podem ser obtidas pela substituição direta dos valores do rendimento médio (μ) e das medidas de pobreza calculados dos microdados nas respectivas fórmulas de cálculo apresentadas no quadro 3.

O mesmo procedimento não pode ser repetido para as elasticidades da proporção de pobres, pois, nesse caso, necessitamos da estimativa da densidade $f(x)$ quando $x = z$. Se os microdados estão disponíveis, podemos estimar $f(x)$ por meio da metodologia de Kernel ou núcleo, que é o procedimento não-paramétrico de estimação de densidade mais comumente utilizado. Neste trabalho utilizamos o estimador Kernel com função K gaussiana e largura ótima da janela b para obter a estimativa $\hat{f}(z)$.[16] As elasticidades da proporção de pobres são obtidas pela substituição dos valores de μ, z, $\hat{f}(z)$ e do valor observado da medida de pobreza nas fórmulas apresentadas no quadro 3.[17]

Método II

O método II utiliza as fórmulas das elasticidades-desigualdade derivadas sob o suposto PLN e as estimativas das medidas de pobreza admitindo que a distribuição de renda é log-normal. As estimativas das medidas de pobreza são obtidas pela substituição dos valores do rendimento médio (μ), linha de pobreza (z) e desvio-padrão do logaritmo dos rendimentos (β) nas expressões do quadro 2.

As estimativas das elasticidades em relação ao rendimento médio e ao desvio-padrão do logaritmo dos rendimentos sob o PLN são obtidas substituindo-se os

16. A largura ótima corresponde ao valor de b que minimiza a soma dos quadrados dos desvios se os dados forem gaussianos e a função kernel gaussiana for utilizada. Portanto, não é ótima num sentido global.

17. Outra alternativa para obtenção da estimativa de $f(z)$ quando $x = z$ é por meio dos métodos baseados nas curvas de Lorenz parametrizadas que foram desenvolvidos para casos em que os dados da distribuição estão disponíveis sob a forma de dados agrupados. A abordagem paramétrica consiste em, a partir de certas coordenadas obtidas dos dados agrupados, reconstruir a curva de Lorenz estimando-se os parâmetros de uma especificação da sua forma funcional. Com base nos parâmetros estimados, pode-se obter uma estimativa de $f(z)$ quando $x = z$ tomando-se a segunda derivada da curva de Lorenz ajustada para toda a distribuição de renda, isto é, ajustada *globalmente*. Para uma discussão mais pormenorizada, ver Datt (1998). Já o método não-paramétrico consiste em estimar a densidade da distribuição em determinados pontos por meio de uma função Kernel ponderada que suavize os intervalos entre os pontos empiricamente observados, fornecendo uma estimativa ajustada localmente. Se os microdados estão disponíveis, a opção preferencial deve ser pela utilização do método não-paramétrico pois fornece uma estimativa local que, em geral, será mais precisa. Neste trabalho em que os microdados estão disponíveis optamos pelo método não-paramétrico.

valores de μ, z, β e das estimativas das medidas de pobreza nas fórmulas do quadro 3.[18] Para se obter as elasticidades em relação às demais medidas de desigualdade (S^*), que pode ser o índice de Gini ou qualquer membro da classe de medidas de desigualdade S, é necessário calcular previamente os valores dos fatores multiplicativos $\frac{d\beta/\beta}{dS^*/S^*}$ pela substituição dos valores da medida de desigualdade e de β nas expressões da última coluna do quadro 1. As elasticidades em relação às respectivas medidas de desigualdade sob o PLN são obtidas pela multiplicação das elasticidades em relação ao desvio-padrão do logaritmo dos rendimentos pelos fatores $\frac{d\beta/\beta}{dS^*/S^*}$. Na seção 7 optamos por utilizar as elasticidades em relação ao índice de Gini, com o intuito de compará-las com aquelas obtidas no método I, e as elasticidades em relação ao L de Theil, que é uma medida de desigualdade mais sensível à cauda esquerda da distribuição de renda.

18. A obtenção dos valores das estimativas das medidas de pobreza não é requisito necessário para o cálculo das elasticidades sob o PLN, podendo ser utilizado também o próprio valor observado das medidas de pobreza. Neste trabalho utilizamos as estimativas das medidas de pobreza apenas para avaliar essa possibilidade e diferenciar os valores das elasticidades-crescimento do método II das obtidas no método I. Vale lembrar que em termos das elasticidades-crescimento, as expressões utilizadas nesses dois métodos são idênticas e os valores das elasticidades em relação à média apenas diferem pelo fato de o primeiro ter utilizado estimativas das medidas de pobreza e o último os seus valores observados no cálculo das elasticidades.