

UM MODELO ECONOMETRICO COM PARÂMETROS VARIÁVEIS PARA A CARGA TRIBUTÁRIA BRUTA BRASILEIRA TRIMESTRAL

Mario Jorge Cardoso de Mendonça*
Adolfo Sachsida*
Luis Alberto Medrano**

Este estudo tem por objetivo estimar um modelo econométrico linear com parâmetros variáveis para a análise da carga tributária bruta brasileira (CTBB) trimestral no período 1995-2009. A utilização desse tipo de modelo é justificada pelo fato de o sistema tributário nacional ter sido submetido a sucessivas mudanças durante boa parte do período em questão. Tais alterações ocorreram mormente em alíquotas e bases de incidência de tributos preexistentes. Ocasionalmente, somaram-se a elas eliminações (temporárias ou não) de alguns tributos e a criação de outros. As principais conclusões deste estudo são: *i)* o Produto Interno Bruto (PIB) é certamente a principal variável explicativa da dinâmica da CTBB no período em questão; *ii)* a elasticidade-PIB da CTBB parece estar próxima da unidade ou um pouco abaixo disso para duas medidas do PIB real utilizadas; *iii)* a parcela da CTBB autônoma em relação ao PIB teve mudança relevante durante todo este último período, possivelmente indicando contínuas melhorias nos procedimentos de fiscalização adotados pelas autoridades tributárias e/ou aumentos na formalização da economia; e, finalmente, *iv)* o modelo com parâmetro variando é o que melhor se ajusta ao problema aqui tratado para modelar o comportamento da CTBB.

1 INTRODUÇÃO

A carga tributária bruta (CTB) de uma determinada economia é dada pela soma dos recursos que o governo recolhe compulsoriamente do setor privado. Tudo mais permanecendo constante, aumentos na CTB reduzem a renda disponível do setor privado e, portanto, os recursos disponíveis para o financiamento das despesas de consumo e investimento de famílias e firmas. No entanto, incrementos na CTB aumentam (comumente, pelo menos) os recursos à disposição do governo e, por conseguinte, permitem diminuições no nível de endividamento público e aumentos na oferta de bens e serviços públicos à população. Assim, a dinâmica da CTB é um determinante crucial das dinâmicas de diversas outras grandezas macroeconômicas relevantes.

Infelizmente, a modelagem econométrica da CTB brasileira (CTBB) e de suas componentes é muito dificultada pelas constantes mudanças em alíquotas e bases de incidência de tributos preexistentes. Somem-se a isto ocasionais cessamentos e suspensões de alguns tributos e a criação de outros. Tais mudanças têm caracterizado a administração tributária do país no período pós-Plano Real. Não surpreende,

* Técnico de Planejamento e Pesquisa da Diretoria de Estudos e Políticas Macroeconômicas (Dimac) do Ipea.

** Pesquisador-bolsista do Programa de Pesquisa para o Desenvolvimento Nacional (PNPD) na Coordenação de Finanças Públicas (CFP) da Dimac/Ipea.

pois, que a literatura brasileira com especificações econométricas explícitas para a CTBB e seus principais elementos seja relativamente pequena e que os resultados relatados sejam frequentemente apenas exploratórios.

Este trabalho tem como objetivo contribuir para a literatura sobre o tema, apresentando um modelo econométrico linear com coeficientes variáveis para uma série trimestral da CTBB no período 1995-2008. A utilização de um modelo com coeficientes variáveis – discutido, entre outros, por West e Harrison (1997) – é justificada pela conjectura – que parece muito plausível *a priori* – de que as sucessivas mudanças no sistema tributário nacional estão associadas a mudanças recorrentes também nas elasticidades relevantes, de modo a tornar contraindicado o uso de especificações com parâmetros fixos.

A utilização de modelos com coeficientes variáveis para a modelagem de séries tributárias não é inédita na literatura brasileira (ver, por exemplo, HERNANDEZ, 1998; PORTUGAL; PORTUGAL, 2001). Mas, até onde se sabe, estes modelos jamais foram aplicados à série trimestral da CTBB.¹ Outra inovação do estudo, acredita-se, é a opção por modelar o componente sazonal da série da CTBB de forma endógena específica com base na representação de Fourier (WEST; HARRISON, 1997). Decidiu-se, ainda, estimar o modelo a partir de procedimentos bayesianos (GAMERMAN; LOPES, 1997; KIM; NELSON, 1999; WEST; HARRISON, 1997), que, dentre outras vantagens, permitem a obtenção de estimativas mais confiáveis em pequenas amostras do que métodos frequentistas (GELMAN *et al.*, 2003, p. 696).

Tendo em vista as considerações de Schettini *et al.* (2010), que apontam para a possibilidade de distorções associadas ao uso de diferentes índices de preço para deflacionar as variáveis econômicas, estimamos especificações para duas medidas distintas do Produto Interno Bruto (PIB) real. Na primeira delas, tomamos o índice do PIB real do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), (INDPIB), e na segunda usamos o PIB deflacionado pelo Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA), aplicando, assim, o mesmo deflator usado no cálculo da carga tributária real.²

Antecipando as conclusões, primeiro, observa-se que, ao longo do período estudado, o comportamento do PIB parece ter sido o principal determinante da dinâmica da CTBB. Segundo, os resultados mostraram que os valores obtidos da

1. Portugal e Portugal (2001) também trabalham com dados trimestrais, mas referentes apenas à arrecadação do Tesouro.

2. Tais diferenças entre o IPCA e o deflator implícito do PIB ocorrem principalmente pois: *i)* existem diferenças nas estruturas de ponderação dos índices e no peso das regiões; *ii)* a atualização das ponderações do deflator implícito do PIB ocorre anualmente, ao passo que tal ponderação é fixa no caso do IPCA – só é alterada em caso de uma nova Pesquisa de Orçamento Familiar (POF) –; e *iii)* os ajustes de consistência realizados pelo IBGE podem modificar tanto os valores nominais quanto os volumes do consumo final das famílias, alterando assim o deflator implícito.

elasticidade-PIB da CTBB para as duas medidas do PIB real foram muito próximas. Contudo, o resultado obtido com o índice do IBGE se situou em torno da unidade enquanto a elasticidade obtida com a variável PIB se mostrou um pouco menos elástica, ficando em torno de 0.90. Terceiro, diferentemente do que se supunha, não existe indicação de que esta elasticidade tenha sofrido variação acentuada ao longo do período. Em quarto lugar, pôde-se verificar que a parcela da CTBB autônoma em relação ao PIB tem se alterado durante o período. Por fim, verificou-se, após um exaustivo estudo, que o modelo onde tanto o termo autônomo como aquele referente à elasticidade do PIB é o que alcança a melhor especificação para modelar a CTBB.

O crescimento da parcela autônoma da CTBB pode ser uma indicação de contínuas melhorias nos procedimentos de fiscalização adotados pelas autoridades tributárias e/ou do crescimento exógeno verificado no grau de formalização da economia. Com efeito, grande parte dos modelos que consideram o termo autônomo da equação de regressão um parâmetro fixo termina por concluir que o valor da elasticidade-PIB da CTBB é significativamente maior que 1 (SANTOS; RIBEIRO; GOBETTI, 2008). Interpreta-se que este resultado se deve ao fato de que modelos com coeficientes fixos “forçam todo o peso” do crescimento recente da CTBB no PIB, subestimando (ou mesmo ignorando) melhorias na fiscalização tributária e incrementos no grau de formalização da economia.

Além desta introdução, o texto é constituído de outras quatro partes. A seção 2 apresenta alguns fatos estilizados acerca do tamanho e da composição da CTBB no ano de 2006. Na terceira seção, apresentam-se uma especificação econométrica e as motivações teóricas desta, bem como a descrição dos dados utilizados. Detalhes sobre a metodologia econométrica utilizada foram acrescentados em anexos. Os resultados obtidos por meio desta especificação – como várias outras especificações alternativas – são apresentados e analisados na quarta seção. Por fim, a seção 5 traz breves notas à guisa de conclusão.

2 EM QUE CONSISTE A CTBB?

A literatura brasileira é rica em metodologias alternativas de cálculo da CTBB. Neste estudo, será utilizada a metodologia das Contas Nacionais do IBGE, que tem as vantagens de: *i*) ser compatível com as diretrizes das Nações Unidas; *ii*) ser relativamente bem documentada; *iii*) ter se mantido razoavelmente constante nos últimos 15 anos; e, portanto, *iv*) ser comparável internacionalmente. De acordo com o IBGE (2008a, tabela sinótica 20), os tributos brasileiros podem ser divididos em cinco categorias: *i*) impostos sobre produtos; *ii*) outros impostos ligados à produção; *iii*) impostos sobre a renda e o patrimônio; *iv*) contribuições sociais efetivas; e *v*) impostos sobre o capital (tabela 1). A chamada CTB é simplesmente a soma dos itens *i* a *v*, dividida pelo PIB em um dado período contábil (tabela 1).

Em 2006, a CTBB de R\$ 808,6 bilhões representou 34,1% do PIB daquele ano, que atingiu R\$ 2.369,8 bilhões.

TABELA 1
Componentes da CTBB em 2006
(Em R\$ bilhões)

	Total	Federal	Estadual	Municipal
Total	808,6	541,6	219,1	47,8
Impostos sobre produtos	336,6	146,6	171,9	18,0
Outros impostos ligados à produção	30,5	16,3	7,9	6,3
Impostos sobre a renda e a propriedade	220,9	181,8	22,5	16,6
Contribuições previdenciárias (INSS ¹ + RPPS ² + FGTS ³ + PIS/PASEP ⁴)	216,8	196,9	15,7	4,2
Impostos sobre o capital	3,8	0,0	1,1	2,7

Fonte: IBGE (2008a, tabela sinótica 20).

Notas: ¹ Instituto Nacional do Seguro Social (INSS).

² Regime Próprio de Previdência Social (RPPS).

³ Fundo de Garantia do Tempo de Serviço (FGTS).

⁴ Programa de Integração Social/Programa de Formação do Patrimônio do Servidor Público (PIS/PASEP).

O restante desta seção discute o tamanho e a composição desses grandes grupos de tributos. São dois os propósitos deste esforço de recuperação histórica. Em primeiro lugar, sublinhar o fato de a CTBB ser um agregado complexo, formado por dezenas de tributos com lógicas e histórias diferentes. Em segundo lugar, enfatizar que as sucessivas mudanças na legislação tributária implicaram transformações muito significativas na composição da CTBB. Consequentemente, influenciaram na resposta relativa desta última variável a, por exemplo, mudanças no PIB ao longo do período em análise. Ambos os pontos são insumos cruciais para a correta interpretação dos resultados apresentados nas seções seguintes.

2.1 Impostos sobre produtos

São sete os principais impostos sobre produtos: *i*) Imposto sobre Circulação de Mercadorias e Prestação de Serviços (ICMS) (estadual); *ii*) Contribuição para o Financiamento da Seguridade Social (Cofins); *iii*) Imposto sobre Produto Industrializado (IPI); *iv*) Imposto sobre Serviços de Qualquer Natureza (ISS) (municipal); *v*) Imposto sobre Importações (II); *vi*) Imposto sobre Operações Financeiras (IOF); e *vii*) Contribuição de Intervenção no Domínio Econômico (Cide). Apenas o ICMS e a Cofins, somados, responderam por mais de três quartos de todos os impostos sobre produtos e por pouco menos de um terço da CTBB total em 2006. Ademais, os fatos geradores e a incidência destes dois tributos, e mesmo do ISS, podem ser tratados, em uma primeira aproximação, como iguais. Com efeito, ambos os tributos incidem (em boa parte pelo menos) sobre o valor agregado das empresas em geral. Logo, parece razoável supor que a arrecadação destes tributos

segue mais ou menos de perto a dinâmica do PIB. Note-se, entretanto, que, ao contrário do que ocorreu com o ICMS (estadual), a legislação da Cofins mudou consideravelmente no período 1995-2008. Houve aumento de alíquotas em 1999 e novamente em 2003-2004, desta feita em conjunto com uma radical mudança na sistemática de recolhimento da Cofins, com a redução da tributação sobre o faturamento e a criação de um regime de incidência não cumulativa.

Voltando-se a atenção para os demais impostos sobre produtos, verifica-se inicialmente que é natural supor que os IIs variem de acordo com o valor total destas últimas (que, por sua vez, é positivamente correlacionado ao PIB). Mas devemos lembrar que os IIs sofrem alterações também em virtude de acordos comerciais com outros países, ou ainda dependendo de alguma política nacional de estímulo a determinado setor específico. Os demais impostos sobre produtos são mais idiossincráticos. A título de ilustração: a arrecadação do IPI não depende apenas do PIB industrial (que é positivamente correlacionado com o PIB total, diga-se), mas também de considerações relativas à política industrial, setorial e de emprego. As recentes isenções concedidas ao setor automobilístico e a “linha branca” de eletrodomésticos atestam esta afirmação. Situações parecidas ocorrem com o IOF e a Cide-combustíveis. A arrecadação do IOF não depende exclusivamente do volume de operações financeiras registradas na economia (que, uma vez mais, é positivamente correlacionado com o PIB total), mas também de considerações relacionadas à política monetária. Ademais, as alíquotas do IOF são majoradas em períodos nos quais a cobrança da Contribuição Provisória sobre Movimentação ou Transmissão de Valores e de Créditos e Direitos de Natureza Financeira (CPMF) é cancelada, tal como ocorreu no início de 1999 e no início de 2008. Igualmente, a arrecadação da Cide-combustíveis – criada apenas em 2002, em mais um esforço de ajuste fiscal – não depende somente do consumo de combustíveis e lubrificantes, também positivamente correlacionada com o PIB total. Ela se subordina, outrossim, à política do governo para os preços destes itens e da própria administração tributária das empresas produtoras, notadamente a Petrobras.

Em suma, a análise tributo a tributo dos impostos sobre produtos sugere fortemente que a arrecadação destes impostos é positivamente correlacionada com o PIB. Indica, ademais, que dificilmente a elasticidade-PIB da arrecadação dos impostos sobre produtos permaneceu constante durante o período 1995-2008, tendo em vista a criação da Cide-combustíveis (e as constantes mudanças em suas alíquotas e bases de incidência), do IOF, do IPI e da Cofins. No caso desta última, houve mudança inclusive no regime de tributação. Também não devemos nos esquecer ainda de que em vários momentos ao longo do período 1995-2008 ocorreram alterações importantes no ICMS, notadamente durante o período mais agudo de guerra fiscal entre os estados.

2.2 Contribuições previdenciárias e outros impostos ligados à produção

A maior parte das contribuições previdenciárias, tanto na iniciativa privada quanto no setor público, incide sobre os rendimentos do fator trabalho, quer dizer, sobre a folha de pagamentos das firmas e dos governos. Isto é verdade, ainda, para as contribuições para o FGTS, que tecnicamente não são receitas públicas, e sim uma poupança compulsória dos trabalhadores e, em virtude disto, propriedade deles. A inclusão do PIB como variável explicativa da arrecadação desses tributos somente pode ser justificada pela hipótese de tal variável estar positivamente correlacionada com a massa de salários.

Entretanto, nem todas as contribuições previdenciárias incidem sobre a folha de pagamentos. Exceções importantes são o Sistema Integrado de Imposto e Contribuições das Microempresas e das Empresas de Pequeno Porte (Simples) e as contribuições para o PIS/PASEP, que somados atingiram R\$ 31,4 bilhões, ou pouco menos de 15% do total das contribuições previdenciárias em 2006. A rigor, o Simples, instituído em 1999 e modificado sucessivas vezes desde então, é um regime tributário diferenciado, simplificado e favorecido, que permite a micro e pequenas empresas (MPEs) pagarem um único tributo – sobre o faturamento – em substituição a vários outros: Imposto de Renda Pessoa Jurídica (IRPJ), Cofins, contribuições previdenciárias patronais etc. Na verdade, o Simples engloba o IRPJ, a Contribuição Social sobre o Lucro Líquido (CSLL), a Cofins, o PIS, contribuições previdenciárias patronais, o IPI (no caso de contribuinte desse imposto), o ICMS e o ISS (estes dois últimos, desde que o estado e o município tenham celebrado convênio com a União). A receita do Simples classificada como contribuição previdenciária é somente uma parte, ainda que a maior parte, do total recolhido ao Simples, sendo que o percentual destinado a essa rubrica aumenta gradativamente com o aumento do faturamento anual da empresa. Assim, a receita do Simples é dividida entre os vários tributos que a compõem e não é classificada totalmente como receita previdenciária. As contribuições para o PIS/PASEP, por sua vez, são em boa parte cobradas sobre o valor adicionado das firmas, mas apenas desde 2003, quando foi alterado seu regime tributário, tal como ocorreu com a Cofins. São classificadas como previdenciárias unicamente porque servem para capitalizar fundos com algumas características (nominais, pelo menos) previdenciárias. A inclusão do PIB como variável explicativa destes tributos se deve, portanto, à hipótese de que ele é positivamente correlacionado tanto com o faturamento das MPEs quanto com o valor adicionado das médias e grandes empresas.

Os relativamente pequenos Outros Impostos Ligados à Produção (OILPs) se dividem em dois grandes grupos. O primeiro deles é formado por tributos que, tal como ocorre com grande parte das contribuições previdenciárias, incidem sobre a folha de pagamentos, notadamente as contribuições para o salário-educação e para

o Sistema S.³ Destarte, o que foi dito sobre as contribuições previdenciárias (com exceção do Simples e do PIS/PASEP) é válido para estes tributos, cuja arrecadação somada atingiu R\$ 13 bilhões em 2006. Os demais OILPs (cuja arrecadação somou R\$ 17,4 bilhões em 2006) são formados por taxas setoriais diversas (por exemplo, fiscalização de telecomunicações, vigilância sanitária, poder de polícia etc.) com pouca ou nenhuma relação com o PIB.

Em síntese, pode-se dizer que: *i*) a maior parte da arrecadação das contribuições previdenciárias responde positivamente ao PIB; *ii*) uma pequena parte delas é autônoma com relação ao PIB; e *iii*) as quebras estruturais ocorridas na legislação incidente sobre as contribuições previdenciárias foram relativamente menos importantes do que as ocorridas com os impostos sobre produtos.

2.3 Tributos sobre a renda, o patrimônio e o capital

São quatro os principais tributos brasileiros sobre a renda, o patrimônio e o capital (IRPCs): o imposto de renda (IR), a CSLL das pessoas jurídicas, o Imposto sobre a Propriedade de Veículos Automotores (IPVA – estadual) e o Imposto Predial e Territorial Urbano (IPTU – municipal).

Quanto à arrecadação do IR, ela é usualmente dividida em seis componentes, quais sejam, o IR da pessoa física; o IR da pessoa jurídica; o IR retido na fonte sobre os rendimentos do trabalho; o IR retido na fonte sobre ganhos de capital; o IR retido na fonte sobre remessas de divisas ao exterior; e os outros tipos de IR retido na fonte. Com efeito, a arrecadação do IR atingiu R\$ 136 bilhões em 2006, ou pouco menos de 60,5% da arrecadação total dos IRPCs naquele ano. Para efeito de comparação, cumpre registrar que a CSLL – um tributo em quase tudo similar ao IR da pessoa jurídica (com a importante diferença de ser destinado primordialmente ao financiamento da seguridade social) – arrecadou R\$ 26,7 bilhões (ou 11,9% do total dos IRPCs), o IPVA arrecadou R\$12,3 bilhões (ou 5,5% dos IRPCs) e o IPTU arrecadou R\$ 13,3 bilhões (ou cerca de 5,9% dos IRPCs) naquele mesmo ano.

Além desses tributos, vale destacar a agora extinta CPMF. Cobrada entre 1997 e 2007, com uma significativa mudança de alíquota em meados de 1999, arrecadava pouco mais de 1% do PIB em média e representava perto de 15% de toda a arrecadação dos IRPCs. Tanto a criação quanto a extinção da CPMF representaram importantes *quebras estruturais* na série da CTBB. Finalmente, devem-se citar os impostos sobre transmissões *causa mortis* ou *inter vivos* (estaduais), cuja arrecadação atingiu R\$ 3,7 bilhões em 2006, ou 1,6% dos IRPCs.

3. Esse sistema abrange, entre outras, as seguintes entidades: Serviço Nacional de Aprendizagem Rural (Senar); Serviço Nacional de Aprendizagem do Comércio (SENAC); Serviço Social do Comércio (SESC); Serviço Nacional de Aprendizagem do Cooperativismo (SESCOOP); Serviço Nacional de Aprendizagem Industrial (Senai); Serviço Social da Indústria (Sesi); Serviço Social de Transporte (SEST); Serviço Nacional de Aprendizagem do Transporte (SENAT); Serviço Brasileiro de Apoio às Micro e Pequenas Empresas (Sebrae).

Conclui-se, assim, ser natural conceber que as arrecadações do IR e CSLL dependem positivamente do PIB, dada a correlação positiva entre o PIB e os lucros das firmas e a massa salarial da economia. O mesmo é verdadeiro no caso da CPME, enquanto foi cobrada. No entanto, parece lícito supor que as arrecadações (menores) do IPTU, IPVA e dos impostos sobre transmissões *causa mortis e inter vivos* sejam relativamente autônomas em relação ao PIB.

3 AS ESPECIFICAÇÕES ECONÔMÉTRICAS E OS DADOS UTILIZADOS

Claro está que a arrecadação de um determinado tributo depende positivamente tanto da alíquota quanto do montante do fato gerador. Dito de outro modo, é natural supor, à guisa de exemplo, que, tudo mais permanecendo constante, a arrecadação do II crescerá com o volume das importações, ou que a arrecadação do IOF crescerá com o volume das operações de crédito. Note-se, todavia, que o elevado número de tributos existentes no Brasil faz com que a estimação da CTBB tributo a tributo seja por demais trabalhosa, tornando comum a utilização do PIB como *proxy* para os fatos geradores de todos os tributos brasileiros (ver PORTUGAL; PORTUGAL, 2001; HERNANDEZ, 1998; SANTOS; RIBEIRO; GOBETTI, 2008). Naturalmente, espera-se que elevações e quedas no PIB real estejam associadas às elevações e quedas na arrecadação tributária real.

A inflação é outro fator usualmente listado como uma variável explicativa importante da dinâmica da CTB medida em termos reais. Seu sinal é incerto, contudo. Se, por um lado, elevações da inflação podem diminuir a arrecadação (real) caso os pagamentos (nominais) de tributos sejam recolhidos com atraso pelos contribuintes (TANZI, 1977), por outro, tais elevações reduzem o valor real das faixas de isenção (admitindo-se que elas fiquem fixas em níveis nominais), por exemplo, do IR. Com isso, alarga-se a base de arrecadação do imposto e, desta forma, a própria arrecadação tributária. Em resumo, não surpreende que a inflação afete as receitas públicas de modos diferentes em contextos diferentes.

Vários estudos (HAKKIO; RUSH, 1991; BOHN, 1991, 1998) buscam explicar a dinâmica dos fluxos das receitas e dos gastos correntes do governo a partir de considerações sobre as implicações dinâmicas destes fluxos sobre o endividamento público. A hipótese básica dos estudos é a de que os governos fixam suas receitas e gastos de modo a manter o endividamento público sob controle, por assim dizer. Parece válido, pois, acrescentar o comportamento da dívida líquida do setor público (DLSP) aos determinantes (potenciais, ao menos) da dinâmica da CTBB.

Tendo em vista as considerações apresentadas, optou-se por iniciar a investigação econométrica com a especificação do Modelo Linear Dinâmico – Dynamic Linear Model (DLM) – que aparece na equação (1). A introdução da “constante” nesta especificação não é ingênua, já que, como visto na seção 2, pode-se supor

que uma parcela da arrecadação tributária – aquela devida à tributação sobre o patrimônio, por exemplo –, não está relacionada a nenhum dos fatores descritos anteriormente.

$$CTBB_t = b_0(t) + b_1(t)PIB_t + b_2(t)DLSP_t + b_3(t)INFLA_t + S_t + v_t$$

$$b_i(t) = \varphi_i b_i(t-1) + w_i(t), \quad i = 0, \dots, 3 \quad (1)$$

onde $v(t) \sim N(0, V)$, $w_i(t) \sim N(0, W_i)$, para $i = 0, \dots, 3$, enquanto φ_i é o componente autorregressivo da equação de estado para cada b_i . S_t é o componente sazonal, que é modelado de acordo com a representação de Fourier (WEST; HARRISON, 1997), de modo que:

$$S_t = \sum_{j=1}^2 \left[a_j \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi j t}{4} \right) + b_j \cos \left(\frac{2\pi j t}{4} \right) \right] = Z_t \gamma$$

onde:

$$Z_t = \left(\operatorname{sen} \left(\frac{2\pi t}{4} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi 2t}{4} \right) \cos \left(\frac{2\pi t}{4} \right) \cos \left(\frac{2\pi 2t}{4} \right) \right)^T$$

e:

$$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$$

De modo a fazer com que as estimativas obtidas expressem os valores das elasticidades, empregou-se aqui a transformação logarítmica, excetuando-se a variável INFLACÃO. Os dados trimestrais se referem ao período de janeiro de 1995 a dezembro de 2008 e são mostrados graficamente no anexo A. Conforme pode ser visto, a CTBB apresenta um destacado padrão sazonal tanto em valores reais quanto em relação ao PIB. Daí a necessidade de incluir o componente sazonal supracitado no modelo. Tendo em vista o fato de que, devido às questões metodológicas, o índice do PIB real medido pelo IBGE é levemente inconsistente com a série da CTBB empregada neste estudo quando tomado como fato gerador desta última, iremos inicialmente usar o PIB em valor real como medida preferencial para o fato gerador. A seguir, o exercício será revisto tomando desta vez o índice calculado pelo IBGE. Uma vantagem disto é que podemos mais facilmente comparar nosso resultado

com os de outros estudos, tendo em vista que este indicador é o que comumente se emprega na literatura. Assim, as variáveis usadas neste estudo são as seguintes:

- CTBB: carga tributária bruta brasileira nominal deflacionada pelo IPCA medido pelo IBGE.
- DLSP: valor real da dívida líquida do setor público consolidado deflacionada pelo Índice Geral de Preços – Disponibilidade Interna (IGP-DI), calculada pelo Banco Central do Brasil (BCB).
- INFLACÃO: taxa de inflação calculada partir da variação da média do IPCA no trimestre.
- PIB: produto interno bruto medido a preços de mercado e deflacionado pelo IPCA.
- INDPIB: índice do produto interno bruto medido a preços de mercado calculado pelo IBGE.

Devemos ressaltar que o procedimento bayesiano adotado para a estimação do DLM, elimina o problema da ordem de integração das séries bem como diminui a relevância do tamanho da amostra. Diversos autores (DEJONG; WHITEMAN, 1991; KOOP, 1992; SIMS, 1988; SIMS; UHLIG, 1991) advogam vigorosamente em favor da alternativa bayesiana sobre a abordagem clássica mais tradicional usada no que se refere à questão da raiz unitária. Por exemplo, é conhecido que os testes Augmented Dickey Fuller (ADF) são de baixa potência diante das alternativas plausíveis, especialmente no que se refere à hipótese alternativa de tendência estacionária. A abordagem bayesiana, por outro lado, revelaria que as hipóteses de raiz unitária e de tendência estacionária apresentariam probabilidade bastante similares quanto às suas funções de distribuição *a posteriori*. Assim, a abordagem bayesiana fornece um sumário mais razoável da informação amostral que a abordagem clássica.

Um outro problema com os testes clássicos de raiz unitária é o da descontinuidade gerada na teoria assintótica (SIMS, 1988). A abordagem bayesiana desde que baseada na função de distribuição *a posteriori* não apresenta o problema da descontinuidade. Koop (1994) assinala que, na abordagem clássica, os valores críticos gerados a partir de pequenas amostras podem diferir substancialmente dos valores críticos assintóticos. A abordagem bayesiana, desde que condicional à amostra observada, fornece resultados para pequenas amostras mais exatas. Em resumo, o problema da raiz unitária não é um ponto crítico na estatística bayesiana.

Por fim, diferentemente da abordagem clássica, a prática bayesiana não é dependente do teorema central do limite, o que elimina o uso de propriedades assintóticas (GELMAN *et al.*, 2003, p. 696). Isso traz consigo uma importante vantagem em termos da habilidade de obter estimativas mais confiáveis num

contexto de pequenas amostras e alta dimensionalidade paramétrica. Este ponto, por sua vez, é fundamental no caso brasileiro, onde séries de variáveis macroeconômicas realmente confiáveis somente estão disponíveis a partir do aparecimento do Plano Real.

4 RESULTADOS

Nesta seção são apresentados os resultados da estimação do modelo inicial definido pela equação (1), assim como os resultados oriundos de especificações alternativas. A metodologia econométrica utilizada nas estimações é relativamente complexa. Uma descrição sucinta acerca da implementação do nosso modelo está descrita no anexo B.

Após um exaustivo estudo procurando identificar o melhor conjunto de variáveis capaz de modelar a CTBB, observamos que nem a inflação nem a DLSP acrescentam informação relevante ao modelo. Em todas as especificações onde estas variáveis foram utilizadas a mediana do intervalo de confiança (IC) se situou em torno de zero ao longo de todo o período, sendo somente o PIB se mostrado como variável significativa na equação da CTBB. Deste modo, considerou-se como melhor alternativa tomar como referência especificações em que somente o PIB ou o INDPIB aparece como variável explicativa.

Com o objetivo de deixar claras as implicações de se usar medidas alternativas do produto e de se permitir (ou não) que cada parâmetro varie no tempo, uma estratégia utilizada aqui e também de sorte a obter a melhor especificação foi testar um conjunto de cinco modelos: *i*) um modelo básico tendo a variável INDPIB e todos os parâmetros variando; *ii*) um modelo 2 que se diferencia do básico apenas pelo uso da variável PIB; *iii*) um modelo 3 que se diferencia do modelo básico apenas pela imposição de um parâmetro fixo para o INDPIB; *iv*) um modelo 4 que se diferencia do básico apenas pela imposição de um parâmetro fixo para o intercepto; e *v*) um modelo 5 que se distingue do modelo básico pela imposição de parâmetros fixos para o intercepto e o INDPIB.

A seleção do melhor modelo foi feita com base sobretudo nos critérios de erro quadrático médio (EQM) e desvio absoluto médio (DAM), que avaliam a projeção fora da amostra (neste caso, implementada quatro passos à frente). Em todos os modelos, a sazonalidade foi tratada a partir da aplicação da representação de Fourier conforme definida na seção 3.

As tabelas 2 e 3 mostram, respectivamente, os valores obtidos para os critérios EQM e DAM com relação ao grau de ajustamento do modelo implementado dentro da amostra, bem como aquele gerado a partir da previsão feita quatro passos à frente fora dela.

TABELA 2

Ajustamento do modelo

	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3	Modelo 4	Modelo 5
EQM	0,0012	0,0001	0,000615	0,0034494	0,02573504
DAM	0,0316	0,0334	0,07375	0,1683688	0,4929952

Fonte: Elaboração dos autores.

TABELA 3

Previsão quatro passos à frente fora da amostra

	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3	Modelo 4	Modelo 5
EQM	0.0001	0.0012	0.002603	0.029418	0.00403807
DAM	0.0334	0.0316	0.04753	0.107508	0.06056104

Fonte: Elaboração dos autores.

Em ambas as tabelas é perceptível que os modelos 1 e 2 são os que apresentam melhor desempenho segundo os critérios EQM e DAM. Tomando por base o grau de ajustamento do modelo, verifica-se que o modelo 2 é o mais ajustado segundo o EQM, enquanto isso ocorre no modelo 1, caso se observe o valor do DAM. No caso da previsão fora da amostra, o que se verifica é exatamente o contrário. Os ajustamentos dos modelos 3 e 4 mostraram ajustamento e previsão fora da amostra sensivelmente piores que nos modelos 1 e 2. De acordo com os resultados das tabelas 2 e 3 justifica-se o emprego da regressão com parâmetros variáveis para modelar a CTBB, pelo fato de os modelos 1 e 2 serem superiores qualquer que seja o critério utilizado quando comparados àqueles em que existam parâmetros fixos.

Os gráficos 1 e 2 mostram, respectivamente, a evolução do coeficiente estimado do INDPIB e do intercepto para o modelo 1. O gráfico 3, por sua vez, mostra a evolução do coeficiente do PIB para o modelo 2. Nestes gráficos são mostrados o IC a 95% assim como sua mediana. Pode ser visto nestes gráficos que a elasticidade da carga tributária para ambas as *proxies* de renda tem se mantido praticamente constante ao longo de todo o período. Contudo, de modo que o leitor possa melhor visualizar, apresentamos no anexo C os gráficos em que aparece apenas a mediana deste coeficiente. É interessante notar que mesmo acontecendo numa escala diminuta existe um crescimento ao longo do tempo deste parâmetro. Nota-se ainda que a elasticidade da CTBB em relação à variável PIB é menos elástica que aquela medida em relação ao INDPIB. Para a primeira temos valores inicial e final de 0,88 e 0,91, enquanto para a segunda temos para valores inicial e final, respectivamente, 0,95 e 1,01. A tabela 4 apresenta o IC para a elasticidade do INDPIB para o modelo 3. Por fim, os resultados para os demais modelos são apresentados no anexo D.

GRÁFICO 1
Mediana e IC 95% a posteriori de β (INDPIB)

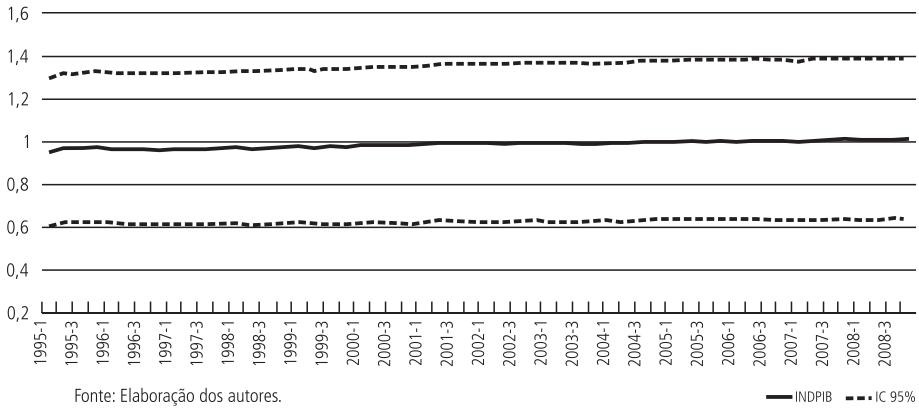


GRÁFICO 2
Mediana e IC a posteriori de β_0 (intercepto)

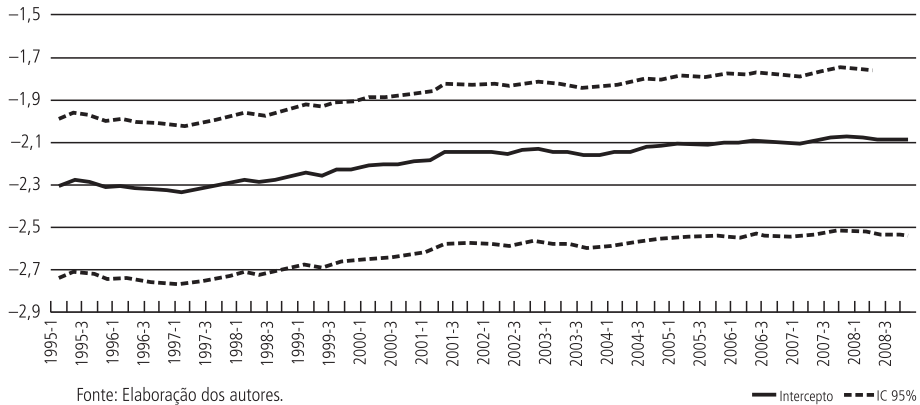


GRÁFICO 3
Mediana e IC a posteriori de β_1 (PIB)

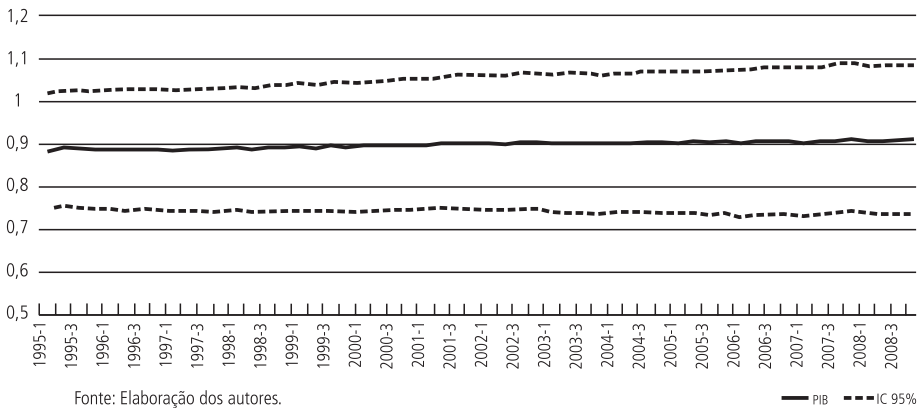


TABELA 4
Estimativas INDPIB fixo (modelo 3)

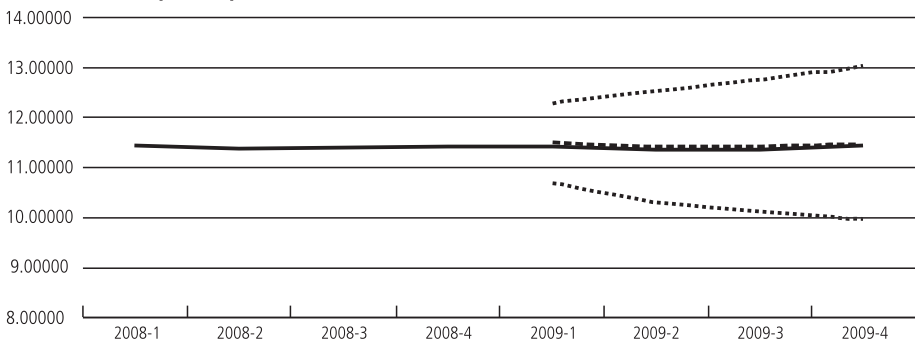
θ	E(θ)	IC 95%		R
Beta 1	0.9435	0.8612	1.060735	1,0002

Fonte: Elaboração dos autores.

Em relação ao intercepto, contudo, observa-se um crescimento mais firme. Neste caso, o valor médio inicial ficou próximo a 2,00, enquanto o valor médio final se situou em 2,40, conforme se observa no gráfico 1. Uma interpretação econômica para isto pode ser feita a partir do reconhecimento de que fatores não explicitamente incluídos no modelo estariam agindo para fomentar o crescimento da carga tributária. Esses fatores podem incluir a diminuição do grau de informalidade da economia, o crescimento do emprego formal – tal como reportado por Corseuil e Foguel (2009) – ou, ainda, indicar uma eficiência maior na arrecadação tributária (melhora dos procedimentos de fiscalização, por exemplo).

O gráfico 4 ilustra a previsão quatro passos à frente fora da amostra para o modelo 2, enquanto o ajustamento do mesmo modelo é demonstrado no gráfico 5. Neste gráfico, pode-se observar o alto grau de ajustamento. A tabela 5 replica o gráfico 4, mostrando os valores após os valores serem revertidos do log. O baixo erro de previsão em todos os casos revela a qualidade da previsão obtida.

GRÁFICO 4
Previsão para o período Q1/2009-Q4/2009



Fonte: Elaboração dos autores.

— CTB95 - - - Mediana IC 95% IC 95%

A tabela 6 mostra a média e o IC de 95% para a variância V da equação do modelo 2, os coeficientes da sazonalidade $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ e γ_4 , assim como as variâncias W_1, W_2 e W_3 e os coeficientes autorregressivos ϕ_1, ϕ_2 e ϕ_3 das equações que descrevem a variação dos parâmetros do modelo ao longo do tempo (seção 3). Por fim, a tabela 6 apresenta o resultado da estatística Gelman-Rubin R para se conferir a

convergência dos parâmetros gerados por meio do processo de estimação do modelo – o chamado algoritmo Monte Carlo Markov *Chains* (MCMC) (ver anexo B). A estatística R é obtida a partir de múltiplas cadeias markovianas obtidas com o referido processo de estimação. A convergência é alcançada quando o valor de R se situa próximo a 1, abaixo do nível crítico. Cadeias independentes foram geradas para 15 mil simulações. Em todos os casos as cadeias convergiram.

GRÁFICO 5
Ajustamento do modelo

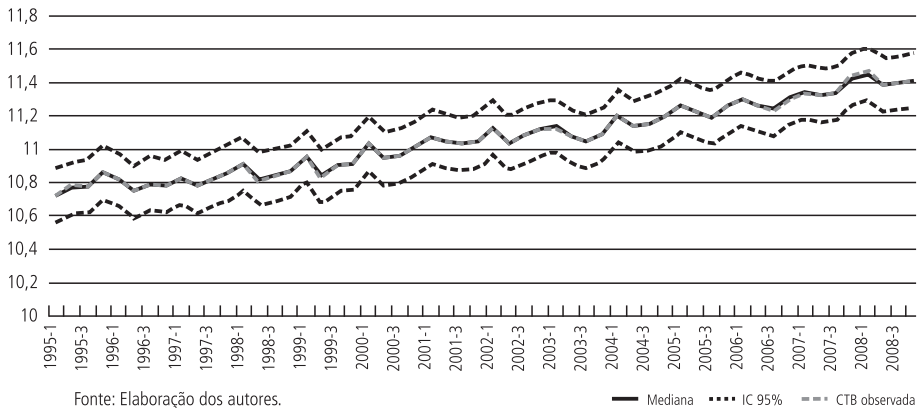


TABELA 5
Previsão quatro passos à frente
(Em R\$ milhões)

Período	CTBB	Previsão	Erro de previsão (%)
2009/01	91.680	97.792	6,67
2009/02	84.997	90.435	6,40
2009/03	84.948	91.069	7,49
2009/04	93.194	94.069	0,94

Fonte: Elaboração dos autores.

TABELA 6
Estimativas pontuais e ICs de 95% de para V , W , Γ e ϕ

θ	$E(\theta)$	IC 95%		R
V	0,010696	0,004717	0,020488	1,003945
W_1	0,014318	0,005224	0,031011	1,007219
W_2	0,001187	0,000821	0,001672	0,999788
γ_1	0,071133	-0,02387	0,168906	1,009629
γ_2	-0,00663	-1,63802	1,693714	0,999783
γ_3	0,007329	-0,09643	0,110495	1,005529
γ_4	-0,01976	-0,07697	0,033584	0,999875

Fonte: Elaboração dos autores.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nas seções anteriores foi apresentado e contextualizado um modelo econométrico linear com parâmetros variáveis para a dinâmica da CTBB trimestral. Tanto no que toca ao ajustamento dentro da amostra, quanto no que se refere à qualidade das previsões do modelo fora da amostra, os resultados obtidos com o modelo foram muito satisfatórios. Em particular, o erro de previsão do modelo fora da amostra do valor total da CTBB em 2008 foi inferior a 8% para todos os períodos projetados para 2009.

Alguns estudos apresentam valores para a elasticidade da CTBB em relação ao PIB situadas em torno da unidade (HERNANDEZ, 1998; PORTUGAL; PORTUGAL, 2001). Outros estudos que consideram o termo autônomo da equação de regressão um parâmetro fixo terminam por concluir que o valor da elasticidade-PIB da CTBB é significativamente maior que 1 (SANTOS; RIBEIRO; GOBETTI, 2008). Neste estudo, estimamos o mesmo modelo usando duas *proxies* distintas para o fato gerador da CTBB. Os resultados indicam que a elasticidade da CTBB em relação ao produto real parece realmente ser unitária ou então próximo disso. A elasticidade obtida usando o índice do PIB medido pelo IBGE indicou o valor da unidade, enquanto este parâmetro cai para próximo de 0,90 quando a elasticidade da CTBB é tomada em relação ao PIB deflacionado pelo IPCA. Assim, os resultados do presente trabalho se aproximam daqueles encontrados em Hernandez (1998) e Portugal e Portugal (2001) se afastando um pouco daquilo obtido por Santos, Ribeiro e Gobetti (2008).⁴

A questão que se coloca é: por que os estudos citados acima encontram resultados distintos em relação à elasticidade do PIB no modelo da carga tributária? De modo a tratar esta questão, foram estimadas outras especificações do modelo tal como é apresentado no início da seção 4. Os resultados mostraram que o modelo mais bem especificado, segundo os critérios adotados, é o modelo com parâmetros variando no tempo tanto para a elasticidade da *proxy* da renda como para o termo autônomo. Tendo em vista este resultado, constatamos que ambos os parâmetros sofrem variação no tempo, embora isso seja mais perceptível em relação ao termo autônomo. O resultado obtido para a elasticidade da renda não sofre tanta distorção em relação ao modelo básico onde os parâmetros não variam no tempo quando permitimos mudança no intercepto, mas quando mantemos a elasticidade da renda como parâmetro fixo. Contudo, a alteração para o coeficiente do termo autônomo em relação ao modelo básico é acentuada quando se permite que este coeficiente varie no tempo.

4. Deve-se ter em mente que Hernandez (1998) e Portugal e Portugal (2001) usam uma amostra de dados cuja dimensão temporal e frequência são distintas daquela utilizada por nós, enquanto Santos, Ribeiro e Gobetti (2008) fazem uso da mesma base de dados.

O diagnóstico que encontramos é que métodos econométricos que não permitem variação contínua em todos os parâmetros do modelo não são indicados para estimação de um modelo da CTBB porque, como mencionado na introdução, a evolução da CTBB é um fenômeno que está sujeito a contínuas mudanças oriundas de vários fatores.

Por fim, deve-se atentar para o fato de que a previsão da CTBB foi feita tendo em vista o conhecimento prévio das variáveis exógenas no horizonte de previsão, o que não ocorre numa situação real em que se deseja fazer a previsão para o futuro. Neste caso, teríamos de prever as variáveis exógenas antes de incorporá-las ao modelo da CTBB, o que geraria mais uma fonte de erro. Porém, isso não invalida o estudo no sentido de se determinar quais são as principais variáveis condicionantes da CTBB bem como a elasticidade da carga tributária em relação ao PIB, parâmetro fundamental na elaboração da política macroeconômica.

ABSTRACT

This article estimates a linear econometric model with variable parameters for the analysis of the Brazilian quarterly gross tax burden in the period 1995-2008. The choice of this particular model was motivated by the changes happened in the Brazilian tax system during these years – most frequently in the scope, design, and size of pre-existing taxes, the elimination of some of these taxes and/or the creation of new ones. The main conclusions of the paper are that: *i*) GDP is, quite certainly, the main explanatory variable of the dynamics of the quarterly tax burden during the period in question; *ii*) the GDP-elasticity of the Brazilian tax burden appears to have fluctuated around values close to unity; *iii*) the fraction of the Brazilian tax burden that does not depend on GDP (or on any other variable, for that matter) increased quite significantly during the most recent years – possibly due to continuous improvements in the ability of the Brazilian government to collect tax revenues and/or the increase in the formal sector of the economy; and finally *iv*) the model with variable parameters is the most appropriate to deal with this problem considering the criteria adopted.

REFERÊNCIAS

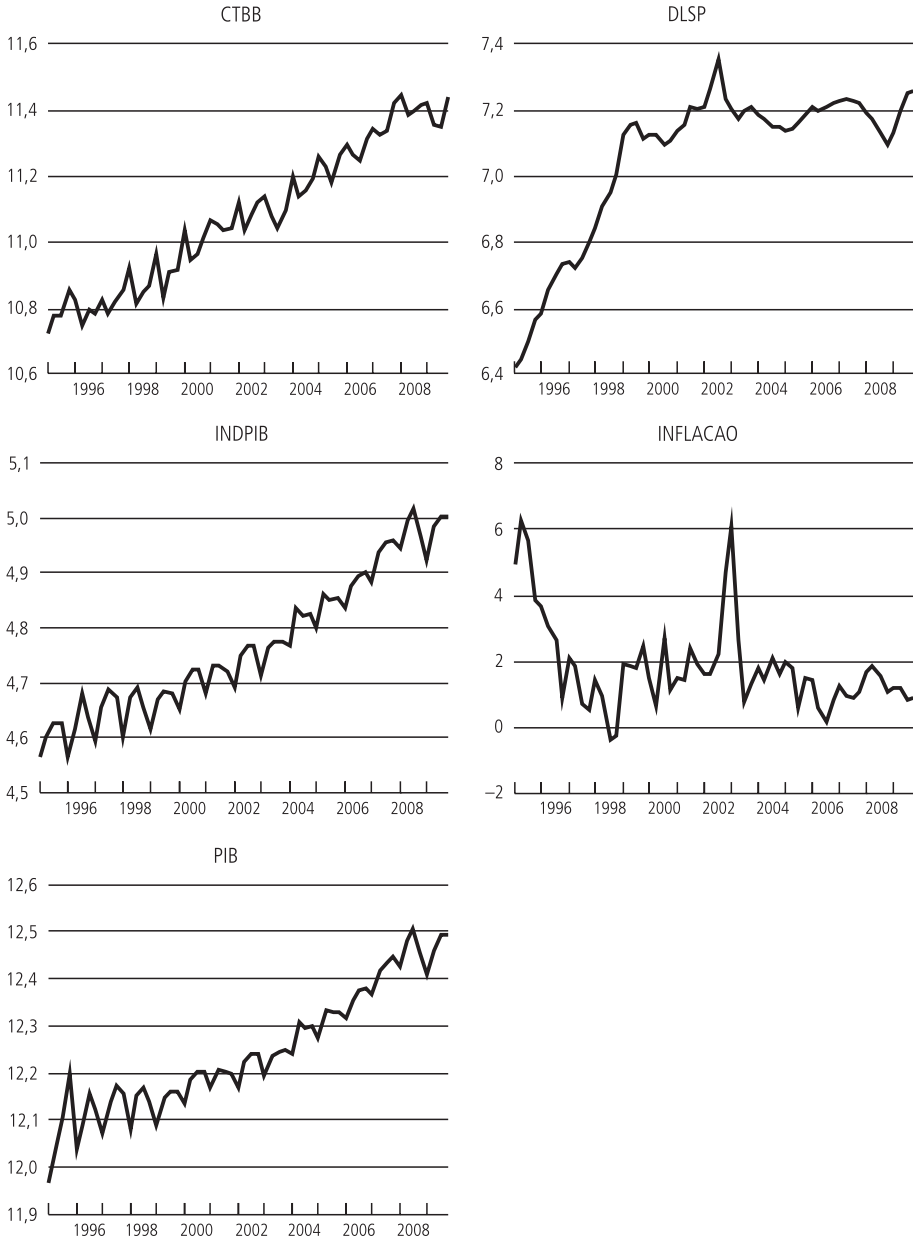
- BOHN, H. The sustainability of budget deficits with Lump-Sum and with income-based taxation. **Journal of Money, Credit and Banking**, v. 23, n. 3, p. 581-604, 1991.
- _____. The behavior of U.S. public debt and deficits. **The Quarterly Journal of Economics**, n. 113, p. 949-963, 1998.
- BRASIL. Ministério da Fazenda. Secretaria da Receita Federal. **Carga Tributária no Brasil 2008**. Brasília, 2009.
- CARTER, C. K.; KOHN, R. On gibbs sampling for state space models. **Biometrika**, v. 81, n. 3, p. 541-553, 1994.
- CORSEUIL, C. H. L.; FOGUEL, M. N. O aumento da formalização das relações de trabalho como consequência da expansão econômica. **Mercado de Trabalho – conjuntura e análise**, Rio de Janeiro: Ipea, v. 39, maio 2009 (Nota Técnica).

- DEJONG, N.; WHITEMAN, C. H. The case for trend-stationarity is stronger than we thought. **Journal of Applied Econometrics**, n. 6, p. 413-421, 1991.
- FRÜHWIRTH-SCHNATTER, S. Data augmentation and dynamic linear models. **Journal of Time Series Analysis**, n. 15, p. 183-202, 1994.
- GAMERMAN, D.; LOPES, H. **Markov chain Monte Carlo**. Chapman & Hall, 1997.
- GELMAN, A. *et al.* **Bayesian data analysis**. Chapman & Hall/CRC, 2003.
- GELMAN, A., RUBIN, D. R., Interference from iterative simulation using multiple sequences (with discussion). **Statist. Sci.**, n. 7, p. 457-511, 1992.
- HAKKIO, C.; RUSH, M. Is the budget deficit too large? **Economic Inquiry**, v. 29, n. 7, p. 429-445, 1991.
- HERNANDEZ, B. **Um modelo econométrico da conta corrente do governo no Brasil**. Rio de Janeiro: Ipea, 1998 (Texto de Discussão, n. 1951/95).
- IBGE. **Sistema de Contas Nacionais Brasil 2002-2006**. Rio de Janeiro: Coordenação de Contas Nacionais, 2008a.
- _____. **Sistema de Contas Nacionais: Brasil**. 2. ed. Rio de Janeiro, 2008b (Série Relatórios Metodológicos, v. 24).
- KIM, C. J.; NELSON, C. R. **State-space models with regime switching**. Massachusetts: The MIT Press, 1999.
- KOOP, V. G. "Objective" Bayesian unit root tests. **Journal of Applied Econometrics**, v. 7, p. 65-82, 1992.
- PORTUGAL, C.; PORTUGAL, M. Os efeitos da inflação sobre o orçamento do governo: uma análise empírica. **Estudos Econômicos**, v. 31, n. 2, p. 239-283, 2001.
- SANTOS, C. H. M.; RIBEIRO, M. B.; GOBETTI, S. W. **A evolução da carga tributária bruta brasileira no período 1995-2007: tamanho, composição e especificações econométricas agregadas**. Brasília: Ipea, 2008 (Texto para Discussão, n. 1.350).
- SCHETTINI, B. P. *et al.* **Novas evidências empíricas sobre a dinâmica trimestral do consumo agregado das famílias brasileiras no período 1995-2009**. Brasília: Ipea, 2010 (Texto para Discussão). No prelo.
- SIMS, C. Bayesian skepticism on unit root econometrics. **Journal of Economic Dynamics and Control**, v. 12, n. 2-3, p. 463-474, 1988.
- _____.; UHLIG, H. Understanding unit rooters: a helicopter tour. **Econometrica**, v. 59, n. 6, p. 1.591-1.599, 1991.
- TANZI, V. Inflation, lags in collection, and the real value of tax revenue. **International Monetary Fund Staff Papers**, Washington, v. 24, n. 1, 1977.
- WEST, M.; HARRISON, J. **Bayesian forecasting and dynamic models**. New York: Springer Verlag, 1997.

(Originais submetidos em julho de 2009. Última versão recebida em fevereiro de 2011.
Aprovada em abril de 2011.)

ANEXO A

GRÁFICO A.1

Gráfico das variáveis

Fonte: Elaboração dos autores.

ANEXO B

A METODOLOGIA DE ESTIMAÇÃO UTILIZADA NESTE TRABALHO

B.1 Modelo de regressão linear dinâmico

A forma geral do DLM pode ser definida da seguinte forma:

$$y_t = X_t \theta_t + S_t + v_t' \quad (\text{B.1})$$

$$\theta_t = \Gamma_1 \theta_{t-1} + \dots + \Gamma_p \theta_{t-p} + \omega_t' \quad (\text{B.2})$$

onde y_t é a variável endógena e X_t é um vetor $k \times 1$ de variáveis exógenas. Este modelo permite ainda a presença de um componente sazonal, S_t , que pode ser modelado segundo a representação do tipo de Fourier (WEST; HARRISON, 1997), de modo que

$$S_t = \sum_{j=1}^2 \left[a_j \sin\left(\frac{2\pi jt}{4}\right) + b_j \cos\left(\frac{2\pi jt}{4}\right) \right] = Z_t \varphi$$

onde:

$$Z_t = \left(\sin\left(\frac{2\pi t}{4}\right) \sin\left(\frac{2\pi 2t}{4}\right) \cos\left(\frac{2\pi t}{4}\right) \cos\left(\frac{2\pi 2t}{4}\right) \right)^T$$

e:

$$\varphi = (a_1 \ a_2 \ b_1 \ b_2)$$

sendo θ_t o vetor $k \times 1$ de parâmetros que segue um processo autorregressivo de ordem p , em que os coeficientes estão contidos na matriz diagonal Γ_i , $k \times k$, $i = 1, \dots, p$. Supõe-se que $\omega_t' \sim N(0_{k \times 1}, W_{k \times k})$ e $v_t' \sim N(0, V)$, admitindo-se ainda que ω_t' e v_t' não são correlacionados. Por simplicidade, admite-se também que $W = \text{diag}(w_1, \dots, w_k)$.

A ideia da aplicação da forma de Fourier para tratar sazonalidade está ligada ao fato de que qualquer padrão cíclico pode ser representado em termos da combinação

linear de funções periódicas. Outra motivação para o uso desta abordagem, além da flexibilidade, é a facilidade de se obter interpretação, já que as trajetórias em forma de ondas podem ser associadas aos variados padrões observados na prática. Mais uma forma de tratar a sazonalidade seria introduzi-la diretamente na equação de estado. Neste caso, a equação (B.2) assumiria a seguinte forma:

$$\theta_t = \Gamma_1 \theta_{t-1} + \dots + \Gamma_p \theta_{t-p} + S_t + \omega'_t \quad (\text{B.2}')$$

Por fim, a sazonalidade pode tomar uma forma dinâmica. Neste caso, seria possível ter-se um modelo no qual a equação da medida é dada da seguinte forma:

$$y_t = F_t \theta_t^* + v'_t$$

onde:

$$F = [X_t, Z_t]$$

e:

$$\theta_t^* = [\theta_t, \varphi_t]$$

Será feito agora uso da seguinte notação para encaixar as equações numa forma mais compacta, que reduz o sistema expresso pelas equações (B.1)/(B.2) numa forma de espaço-estado de ordem um:

$$\underline{\theta}_t = \begin{bmatrix} \theta_t \\ \theta_{t-1} \\ \vdots \\ \theta_{t-p+1} \end{bmatrix}_{kp \times 1}, \quad G = \begin{bmatrix} \Gamma_1 & \Gamma_2 & \cdots & \Gamma_{p-1} & \Gamma_p \\ I_k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_k & 0 \end{bmatrix}_{kp \times kp}, \quad \underline{\omega}_t = \begin{bmatrix} \omega'_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{kp \times 1}$$

e:

$$F'_t = \begin{bmatrix} X'_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{kp \times 1}$$

Visto isso, tem-se que:

$$y_t = F_t \underline{\theta}_t + z_t \varphi + v_t' \quad (\text{B.3})$$

$$\underline{\theta}_t = G \underline{\theta}_{t-1} + \underline{\omega}_t \quad (\text{B.4})$$

onde (B.3) representa a equação da medida ou do movimento, enquanto (B.4) define a equação de estado.

A função de verossimilhança de (θ, G, φ, V) é dada por

$$p(y/\theta, G, \varphi, V) = (2\pi)^{-T/2} V^{T/2} \exp\left(-\frac{1}{2V} \sum_{t=1}^T (y_t - F_t \underline{\theta}_t - z_t \varphi)^2\right)$$

onde:

$$y = (y_1 \dots y_T), \theta = (\underline{\theta}_1 \dots \underline{\theta}_T)$$

e:

$$\Gamma = (\Gamma_1 \dots \Gamma_p)$$

B.2 Procedimento de inferência

Nesta seção, é realizado um procedimento de inferência baseado no paradigma bayesiano. Inicialmente apresentam-se distribuições *a priori* para todos os parâmetros. Em seguida, o algoritmo MCMC é utilizado para obter amostras *a posteriori* de todos os parâmetros do modelo.

Distribuição *a priori*

Por simplicidade, distribuições *a priori* conjugadas são utilizadas para todos os parâmetros. A distribuição *a priori* para θ_t é especificada na equação (B.4) e completada pela informação inicial θ_0 , tal que $\theta_0 \sim N(m_0, C_0)$, onde m_0 e C_0 são hiperparâmetros conhecidos. As distribuições *a priori* para os parâmetros V, W, Γ e φ são as seguintes: *i*) $V \sim GI(n_V/2, n_V S_V/2)$; *ii*) $w_j \sim GI(n_W/2, n_W S_W/2), j = 1, \dots, k$; *iii*) $\Gamma_j \sim N(m_\Gamma, S_\Gamma), j = 1, \dots, p$; e *iv*) $\varphi \sim N(m_\varphi, S_\varphi)$, onde $n_V, S_V, n_W, S_W, m_\Gamma, S_\Gamma, m_\varphi$ e S_φ são hiperparâmetros conhecidos.

Os valores dos hiperparâmetros utilizados foram: $m_0 = 0$, $C_0 = 100$, $n_V = 2$, $n_V S_V = 0.1$, $n_W = 2$, $n_W S_W = 0.1$, $m_\Gamma = 0$, $S_\Gamma = 100$, $m_\phi = 0$, $S_\phi = 100$.

Inferência *a posteriori*

A distribuição *a posteriori* conjunta de $(\theta, \Gamma, \phi, V, W)$ é dada por:

$$p(\theta, G, \phi, V, W | y) \propto \prod_{t=1}^T p(y_t | \underline{\theta}_t, \phi, V) \\ \prod_{t=1}^T p(\underline{\theta}_t | \underline{\theta}_{t-1}, W, G) p(\underline{\theta}_0 | m_0, C_0) P(\phi) p(V) p(W) p(\Gamma)$$

a qual é analiticamente intratável e, por conseguinte, a inferência *a posteriori* exata é feita utilizando-se o esquema MCMC. Neste caso, o vetor da variável de estado é amostrado conjuntamente, utilizando-se o algoritmo Forward Filtering Backward Sampling (FFBS) de Carter e Kohn (1994) e Frühwirth-Schnatter (1994). Para o resto de parâmetros Γ , ϕ , V e W , todas as distribuições condicionais completas são distribuições normais ou distribuições gama inversa. Todas as distribuições condicionais completas estão listadas a seguir:

- A distribuição condicional de V é:

$$(V | \theta, W, \phi, \Gamma) \sim GI(n_V^* / 2, n_V^* S_V^* / 2)$$

onde:

$$n_V^* = n_V + T$$

e:

$$n_V^* S_V^* = n_V S_V + \sum_{t=1}^T (y_t - F_t \underline{\theta}_t - z_t \phi)^2$$

- A distribuição condicional de $W = \text{diag}(w_1, \dots, w_k)$ é:

$$(w_j | \theta, V, \phi, \Gamma) \sim GI(n_W^* / 2, n_W^* S_W^* / 2) \text{ para } j = 1, \dots, k$$

onde:

$$n_W^* = n_W + T - 1$$

e:

$$n_W^* S_W^* = n_W S_W + \sum_{t=2}^T (\underline{\theta}_t - G \underline{\theta}_{t-1})^T (\underline{\theta}_t - G \underline{\theta}_{t-1})$$

- A distribuição condicional de $\Gamma = (\Gamma_1 \dots \Gamma_p)$ é:

$$(\Gamma_j | \theta, V, W, \varphi) \sim N(m_\Gamma^*, S_\Gamma^*) \text{ para } j = 1, \dots, k$$

onde:

$$S_\Gamma^* = (S_\Gamma^{-1} I_{p \times p} + w_j^{-1} H_j^T H_j)^{-1}$$

$$m_\Gamma^* = S_\Gamma^{-1} (S_\Gamma^{-1} I_{p \times p} \mathbf{1}_p + w_j^{-1} B_j^T H_j)$$

para:

$$H_j = \begin{pmatrix} \theta_{p,j} & \theta_{p-1,j} & \cdots & \theta_{1,j} \\ \theta_{p+1,j} & \theta_{p,j} & \cdots & \theta_{2,j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \theta_{T-1,j} & \theta_{T-2,j} & \cdots & \theta_{T-p,j} \end{pmatrix}$$

e:

$$B_j = \begin{pmatrix} \theta_{p+1,j} \\ \theta_{p+2,j} \\ \vdots \\ \theta_{T,j} \end{pmatrix}$$

- A distribuição condicional de φ é:

$$(\varphi | \theta, V, W, \Gamma) \sim N(m_\varphi^*, S_\varphi^*)$$

onde:

$$S_\varphi^* = (S_\varphi^{-1} I_{4 \times 4} + V^{-1} Z^T Z)^{-1}$$

e:

$$m_\varphi^* = S_\varphi^{-1} (S_\varphi^{-1} I_{4 \times 4} 1_4 + V^{-1} Z^T (y - F\theta))$$

Os estados $\theta_1, \dots, \theta_T$ são amostrados conjuntamente, utilizando-se o algoritmo FFBS, condicional sobre Γ , φ , V e W . A distribuição condicional completa conjunta segue a decomposição retrospectiva $p(\theta | y) = p(\theta_T | D_T) \prod_{t=1}^{T-1} p(\theta_t | \theta_{t+1}, D_t)$, onde $D_T = \{y_1, y_2, \dots, y_T\}$, $t = 1, \dots, T$ e D_0 representam a informação inicial. Iniciando com $\theta_0 \sim N(m_0, C_0)$, através do filtro de Kalman pode ser mostrado que $\theta_t | D_t \sim N(m_t, C_t)$, onde $m_t = a_{t-1} + A(y_t - f_t - z_t \varphi)$, $C_t = R_t - A_t Q_t A_t'$, $a_t = G m_{t-1}$, $R_t = G C_{t-1} G' + W$, $f_t = F_t' a_t + z_t \varphi$, $Q_t = F_t' R_t F_t + V$ e $A_t = R_t F_t Q_t^{-1}$ para $t = 1, \dots, T$; θ_T é amostrado de $p(\theta_T | D_T)$ (passo denominado *forward filtering*). Para $t = T-1, T-2, \dots, 2, 1$, θ_t é amostrado de $p(\theta_t | \theta_{t+1}, D_t) = N(\tilde{a}_t, \tilde{C}_t)$, onde $\tilde{a}_t = m_t + B_t (f_{t+1} - a_{t+1})$, $\tilde{C}_t = C_t - B_t R_{t+1} B_t'$ e $B_t = C_t G' R_{t+1}^{-1}$ (passo denominado *backward sampling*).

Previsão de modelo de regressão linear dinâmico

Fazer previsão nesta classe de modelos é teoricamente direto. Frequentemente, surge o interesse de aprender a densidade preditiva h passos à frente, $p(y_{T+h} | y)$, ou seja,

$$p(y_{T+h} | y) = \int p(y_{T+h} | \underline{\theta}_{T+h}, \varphi, V) p(\underline{\theta}_{T+h} | \underline{\theta}_T, W, \Gamma) p(\underline{\theta}_T, W, \Gamma, V | y) d\underline{\theta}_{T+h} d\underline{\theta}_T d\varphi dV dW d\Gamma$$

onde:

$$(y_{T+b} | \underline{\theta}_{T+b}, \varphi, V) \sim N(F_{T+b}, V), (\underline{\theta}_{T+b} | \underline{\theta}_T, W, \Gamma) \sim N(\mu_b, V_b), \mu_b = G^b \underline{\theta}_T$$

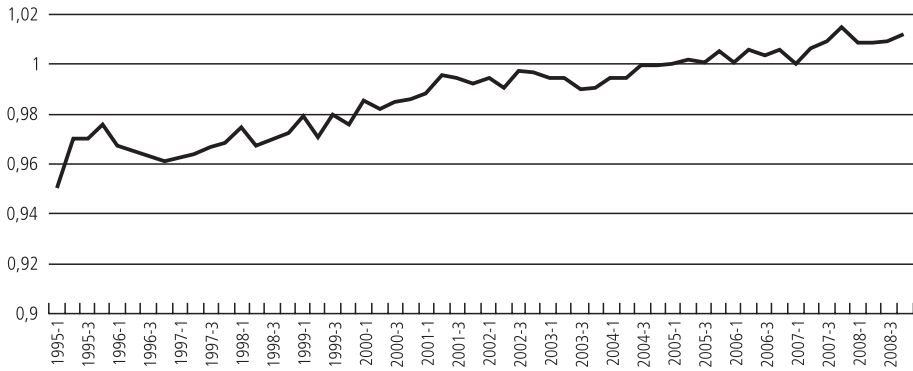
e:

$$V_b = \sum_{j=1}^b G^{j-1} W (G^{j-1}) \quad \text{para } b > 0$$

Portanto, se $\{(\underline{\theta}_T^{(1)}, \varphi^{(1)}, V^{(1)}, W^{(1)}, \Gamma^{(1)}), \dots, (\underline{\theta}_T^{(L)}, \varphi^{(L)}, V^{(L)}, W^{(L)}, \Gamma^{(L)})$ é uma amostra de $p(\underline{\theta}_T, W, \Gamma, V | y)$, é fácil amostrar $\underline{\theta}_{T+b}^{(j)}$ de $p(\underline{\theta}_{T+b} | \underline{\theta}_T^{(j)}, W^{(j)}, \Gamma^{(j)})$, para todo $j = 1, \dots, L$, tal que $p(y_{T+b} | y) = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L p(y_{T+b} | \underline{\theta}_{T+b}^{(j)}, \varphi^{(j)}, V^{(j)})$ é a aproximação via Monte Carlo de $p(y_{T+b} | y)$. Analogamente, se $y_{T+b}^{(j)}$ é amostrado de $p(y_{T+b} | \underline{\theta}_{T+b}^{(j)}, \varphi^{(j)}, V^{(j)})$, para $j = 1, \dots, L$, então $\{y_{T+b}^{(1)}, \dots, y_{T+b}^{(L)}\}$ representa uma amostra de $p(y_{T+b} | y)$.

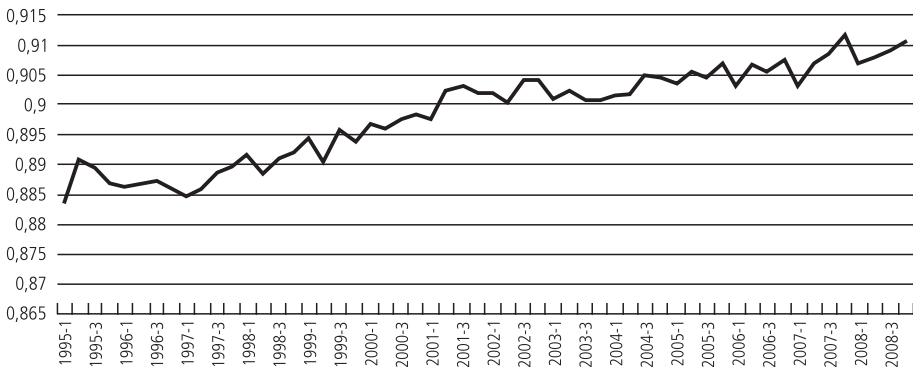
ANEXO C

GRÁFICO C.1
Evolução da mediana *a posteriori* de β_1 (INDPIB)



Fonte: Elaboração dos autores.

GRÁFICO C.2
Evolução da mediana *a posteriori* de β_1 (PIB)



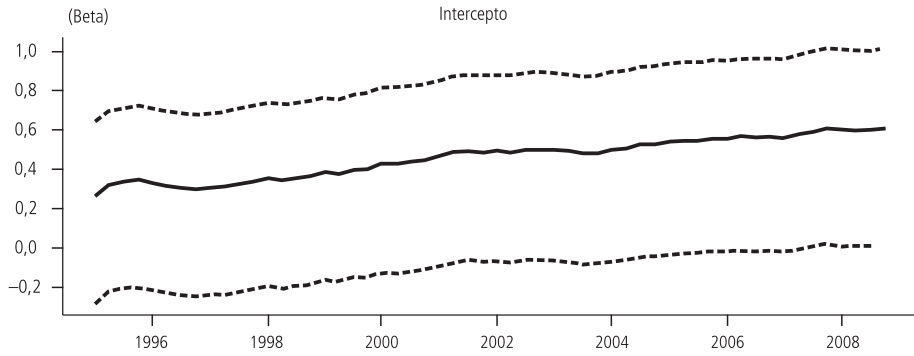
Fonte: Elaboração dos autores.

ANEXO D

RESULTADOS DOS MODELOS 3 a 5

GRÁFICO D.1

Modelo 3: INDPIB fixo

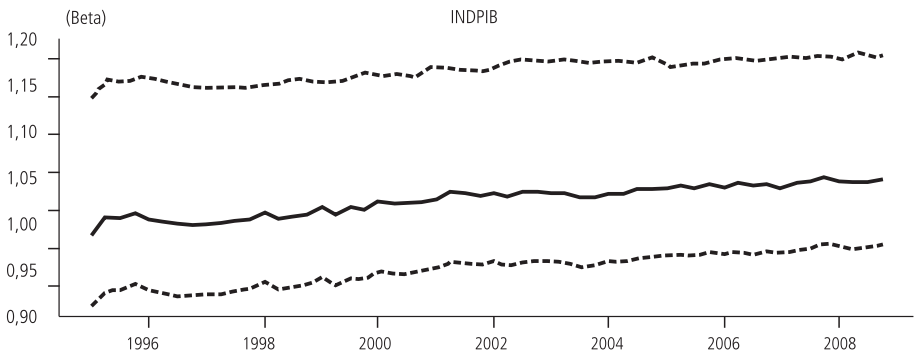


θ	$E(\theta)$	IC 95%	
Beta 1	0,943521	0,8612248	1,060735

Fonte: Elaboração dos autores.

GRÁFICO D.2

Modelo 4: constante fixa



θ	$E(\theta)$	IC 95%	
Intercepto	0,123943	-0,71426	0,529692

Fonte: Elaboração dos autores.

Modelo 5: constante fixa e INDPIB fixo

θ	$E(\theta)$	IC 95%	
Intercepto	-3.357206	-3.928881	-2.793624
Beta 1	1.746078	1.627032	1.867461

Fonte: Elaboração dos autores.

ANEXO E

TABELA E.1

Dados trimestrais referentes ao período janeiro de 1995-dezembro de 2009

	CTBB	PIB	INDPIB	Inflação	DLSP
1995-1	10.72	11.96	4.56	4.92	6.42
1995-2	10.78	12.05	4.60	6.28	6.44
1995-3	10.77	12.10	4.63	5.67	6.50
1995-4	10.86	12.19	4.63	3.88	6.57
1996-1	10.82	12.04	4.56	3.64	6.58
1996-2	10.75	12.09	4.61	3.03	6.66
1996-3	10.79	12.16	4.68	2.64	6.70
1996-4	10.78	12.12	4.64	0.92	6.73
1997-1	10.83	12.07	4.59	2.10	6.74
1997-2	10.78	12.14	4.65	1.83	6.72
1997-3	10.82	12.17	4.69	0.72	6.75
1997-4	10.85	12.16	4.67	0.52	6.80
1998-1	10.92	12.08	4.60	1.47	6.85
1998-2	10.82	12.15	4.67	0.96	6.91
1998-3	10.85	12.17	4.69	-0.35	6.95
1998-4	10.87	12.14	4.66	-0.27	7.01
1999-1	10.96	12.09	4.61	1.94	7.13
1999-2	10.83	12.14	4.67	1.90	7.15
1999-3	10.91	12.16	4.68	1.79	7.16
1999-4	10.91	12.16	4.68	2.41	7.12
2000-1	11.04	12.13	4.65	1.49	7.13
2000-2	10.94	12.18	4.70	0.69	7.13
2000-3	10.96	12.20	4.72	2.70	7.10
2000-4	11.01	12.20	4.72	1.13	7.11
2001-1	11.07	12.17	4.68	1.50	7.14
2001-2	11.05	12.21	4.73	1.43	7.16
2001-3	11.03	12.20	4.73	2.36	7.21

(continua)

(continuação)

	CTBB	PIB	INDPIB	Inflação	DLSP
2001-4	11.05	12.20	4.72	1.93	7.20
2002-1	11.12	12.17	4.69	1.63	7.21
2002-2	11.03	12.22	4.75	1.59	7.26
2002-3	11.08	12.24	4.77	2.20	7.35
2002-4	11.12	12.24	4.77	4.69	7.23
2003-1	11.14	12.19	4.71	6.03	7.20
2003-2	11.08	12.23	4.76	2.65	7.17
2003-3	11.05	12.25	4.78	0.79	7.20
2003-4	11.09	12.25	4.78	1.32	7.21
2004-1	11.20	12.24	4.77	1.78	7.19
2004-2	11.14	12.31	4.83	1.46	7.18
2004-3	11.16	12.30	4.82	2.11	7.15
2004-4	11.19	12.30	4.82	1.63	7.15
2005-1	11.26	12.27	4.80	1.97	7.14
2005-2	11.23	12.33	4.86	1.79	7.14
2005-3	11.18	12.33	4.85	0.63	7.16
2005-4	11.26	12.33	4.85	1.52	7.19
2006-1	11.30	12.32	4.84	1.43	7.21
2006-2	11.27	12.35	4.88	0.63	7.20
2006-3	11.25	12.38	4.90	0.19	7.21
2006-4	11.32	12.38	4.90	0.85	7.22
2007-1	11.34	12.37	4.89	1.28	7.23
2007-2	11.32	12.42	4.94	0.92	7.24
2007-3	11.33	12.43	4.95	0.89	7.23
2007-4	11.43	12.44	4.96	1.08	7.22
2008-1	11.45	12.43	4.94	1.64	7.19
2008-2	11.39	12.48	5.00	1.80	7.17
2008-3	11.40	12.50	5.02	1.55	7.13
2008-4	11.41	12.45	4.97	1.05	7.10
2009-1	11.43	12.41	4.93	1.22	7.13
2009-2	11.35	12.46	4.98	1.23	7.20
2009-3	11.35	12.49	5.00	0.81	7.25
2009-4	11.44	12.49	5.00	0.89	7.26

Fonte: Elaboração dos autores.