

Uma metodologia para a estimação do risco no mercado acionário brasileiro: preço Arrow-Debreu*

JOE AKIRA YOSHINO**

Um dos desafios na área de engenharia financeira é verificar como o processo de difusão difere na prática da volatilidade constante que é assumida no modelo de Black e Scholes. Este trabalho procura estimar a função densidade de probabilidade (FDP) na medida risco-neutro do Índice da Bolsa de Valores de São Paulo (Ibovespa). Para tanto, usamos as metodologias desenvolvidas por Derman e Kani (1994) e Shimko (1993). As FDPs estimadas permitem inferir o risco não-estável no mercado acionário. Essas estimativas são úteis tanto para a administração do risco como para o apreamento das opções no Ibovespa.

1 - Introdução

O risco esperado pelos agentes econômicos no futuro, decorrente das aplicações no mercado acionário, pode estar contido nos preços das opções nas ações. A estimação desse risco é um insumo valioso tanto para o apreamento das opções como para a administração do risco.

O mercado faz uma previsão do risco de modo que possa antecipar se uma opção estará em dinheiro ou não. O preço da opção é o valor presente do seu lucro esperado na medida risco-neutro (Q-Martingale).

Um considerável esforço tem sido despendido pelos engenheiros financeiros para modelar e estimar o processo estocástico que represente de fato a volatilidade do objeto subjacente, que no nosso caso será o Índice da Bolsa de Valores de São Paulo (Ibovespa).

Para estimar uma volatilidade que muda no tempo e que seja derivada de uma função densidade de probabilidade (FDP) não-log-normal, comparamos essa FDP com a assumida pela fórmula de Black e Scholes (1973) — FDP log-normal

* O autor agradece a David Orosco (aluno da Escola Politécnica da USP) pela sua valiosa colaboração como assistente de pesquisa. Agradece também a José A. Scheinkman pelas críticas e pelos comentários feitos, aos participantes do XXI Encontro da SBE-2000 (Sociedade Brasileira de Econometria) e aos pareceristas anônimos da revista *Pesquisa e Planejamento Econômico* do IPEA.

** Professor de Economia e Finanças da Universidade de São Paulo e Mestrado Profissionalizante do IME-FEA.

com volatilidade constante. Um critério de comparação seria medir as áreas sob as caudas esquerdas dessas distribuições — casos de crises. Essas áreas medem o risco de mercado sob o critério VaR (*Value at Risk*), que foi primeiro desenvolvido pela J. P. Morgan/Reuters.

Testamos duas abordagens para estimar a FDP implícita: métodos de Derman e Kani e de Shimko. Nossa principal conclusão é que os modelos que consideram a volatilidade implícita melhoram as medidas do risco no mercado acionário juntamente com a estimativa da volatilidade histórica.

Este artigo está organizado em cinco seções, incluindo esta introdução. A Seção 2 fornece os conceitos básicos da literatura. A Seção 3 descreve os dados utilizados. Na Seção 4 são mostrados os resultados empíricos. A Seção 5 apresenta as conclusões. Finalmente, para os propósitos pedagógicos e práticos, o Apêndice mostra: *a*) os detalhes para estimar a superfície de volatilidade — “curvas de sorriso”; e *b*) o código na linguagem C++ para implementar o método de Shimko de modo que se obtenham as FDPs implícita e risco-neutro.

2 - Fundamentos dos modelos para a estimação dos preços Arrow-Debreu no mercado acionário brasileiro

2.1 - Preços Arrow-Debreu

Um conceito básico são os modelos de Arrow (1964) e de Debreu (1959). O ativo contingente de Arrow-Debreu paga amanhã R\$ 1 se um estado específico da natureza ocorrer e nada se ocorrer qualquer outro estado. O preço de um ativo Arrow-Debreu é o valor presente do lucro esperado (valor descontado de se obter R\$ 1 em um particular estado multiplicado pela probabilidade de ocorrer esse estado).

O ativo Arrow-Debreu inspira duas abordagens em termos de apreçamento de ativos na literatura denominada *financial economics*: primeiro, os modelos de equilíbrio geral com agente representativo. Nesse sentido, ver Lucas (1978), Rubinstein (1994), Hansen e Richard (1987) e Hansen e Jagannathan (1991); segundo, os modelos de equilíbrio parcial ou modelos de não-arbitragem, tais como os modelos de Black e Scholes (1973) — o pai da área denominada *financial engineering* — e de Merton (1973). A abordagem de equilíbrio geral produz melhores modelos teóricos, mas cujos resultados empíricos deixam a desejar em relação aos modelos de não-arbitragem. Assim, devido à natureza empírica deste artigo, adotamos a segunda abordagem para estimar o risco no mercado acionário brasileiro.¹

O objetivo deste artigo é estimar os preços Arrow-Debreu dos ativos contingentes aos estados da natureza no mercado acionário brasileiro. Essa metodologia

1 Para maiores detalhes, ver Cox e Ross (1976).

foi iniciada por Banz e Miller (1978), Breeden e Litzenberger (1978) e Ross (1976). Existem três abordagens na literatura para estimar os preços Arrow-Debreu ou, de forma equivalente, as suas FDPs. Na primeira abordagem, são utilizados os modelos de Black e Scholes e de Merton. Eles admitem que os preços dos ativos seguem um movimento browniano geométrico, a volatilidade é constante (independentemente do tempo e do objeto subjacente). A taxa de juro sem risco é também constante. Os resultados são uma FDP log-normal e uma forma fechada para a equação diferencial estocástica que descreve a evolução do objeto subjacente. Na segunda abordagem, utiliza-se uma FDP parametrizada. Nesse sentido, ver Jarrow e Rudd (1982), Shimko (1993), Derman e Kani (1994), Longstaff (1992) e Madan e Milne (1994). Na terceira abordagem, procura-se estimar não-parametricamente a FDP. Essa linha de pesquisa deve-se a Ait-Sahalia e Lo (1995). Na prática, a abordagem não-paramétrica procura fazer histogramas da FDP, mas requer muito mais dados com relação aos métodos paramétricos. Portanto, a utilização do primeiro método é infactível nos períodos de *crashes*.

Uma clara vantagem dos modelos de volatilidade implícita é que permitem construir as superfícies de volatilidade. Essas superfícies mudam com a maturidade da opção e com o valor da opção (*moneyness*).² Assim, podemos ter um valioso instrumento em um mundo não-Black e Scholes.

O desafio é inferir a FDP risco-neutro para os retornos dos ativos financeiros com o uso das correspondentes opções que vencem no futuro. Este artigo utiliza dois métodos populares para inferir a FDP: *a*) a árvore binomial implícita de Derman e Kani; e *b*) a técnica de interpolação de Shimko.

Mesmo que os ativos Arrow-Debreu não sejam transacionados, na prática, eles podem ser replicados ao investir em uma combinação de *calls* europeias para formar um *straddle*. Chi-Fu e Litzenberger (1988) mostram que há necessidade de mercados completos (número de ativos linearmente independentes igual ao número de estados) para poder sintetizar os ativos Arrow-Debreu com base nos ativos complexos.³

Mostraremos a seguir que os preços Arrow-Debreu podem representar uma versão discreta da FDP risco-neutro. Compreender esse conceito será fundamental para utilizar corretamente os preços Arrow-Debreu com o propósito de apreçamento dos derivativos de acordo com as superfícies de volatilidade (mundo não-Black e Scholes ou volatilidade não-constante). Ao utilizar uma árvore binomial com n -níveis, seja P_i^* a probabilidade risco-neutro de se atingir o nó final i . Assim:

$$P_i^* = \left(\frac{n!}{j!(n-j)!} \right) q^j (1-q)^{n-j} \quad (1)$$

2 *Moneyness* representa o valor da opção, que é medido pelo preço de exercício da opção sobre o preço a termo do objeto subjacente.

3 Para maiores detalhes, ver também Banz e Miller (1978), Breeden e Litzenberger (1978) e Ross (1976).

onde j é o número de ramos para cima para atingir o nó i ; e $j = 0, 1, \dots, n$.

Observe-se que a probabilidade q representa a probabilidade Q-Martingale de transição de acordo com um processo de difusão risco-neutro. Essa probabilidade depende de dois fatores: *a*) da taxa de juro sem risco; e *b*) da volatilidade local em um nó particular. Se esses dois fatores são constantes, temos o caso específico que foi desenvolvido por Cox, Ross e Rubinstein (1979). Eles mostram que o valor de uma *call* europeia ao utilizar a árvore binomial pode ser expresso por:

$$call = \sum_{j=0}^N \left(\frac{n!}{j!(n-j)!} \right) q^j (1-q)^{n-j} \frac{1}{(1+rf * \Delta t)} \max(0, S_{j+1-K}) \quad (2)$$

Sob uma probabilidade risco-neutro, temos a versão discreta do modelo de Black e Scholes:

$$call = \sum_{i=1}^{N+1} P_i^* \frac{1}{(1+rf \Delta t)} \max(0, S_i - K) \quad (3)$$

onde P_i^* é a probabilidade risco-neutro de se alcançar um nó particular i na data de exercício da opção. A probabilidade P_i^* corresponde a um ponto discreto na FDP risco-neutro. Ao ser obtida a “curva de sorriso” para a volatilidade local, torna-se muito mais fácil representar a FDP risco-neutro pelos preços Arrow-Debreu. Então, temos:

$$call = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i^{n+1} \max(0, S_i - K) \quad (4)$$

O preço Arrow-Debreu λ_i^{n+1} representa o valor presente de uma opção que paga R\$ 1 no futuro, dado que S_i é o preço da ação em um estado terminal específico. Esse preço é igual ao valor descontado na probabilidade risco-neutro de se alcançar o nó i no nível $n + 1$ da árvore.

2.2 - A relação entre os preços das opções e as funções de densidade dos preços-estado

O modelo de Black e Scholes admite que a evolução dos preços das ações em um intervalo de tempo infinitesimal é descrita por um movimento browniano geométrico.⁴

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW \quad (5)$$

onde:

S é o preço da ação;

μ é um retorno esperado constante (tendência temporal); e

dW é um processo de Wiener com média zero e variância igual a dt .

O processo de difusão correspondente pode ser representado pela seguinte FDP-log normal:⁵

$$[Ln(S_T) - Ln(S_t)] \sim N\left(\left[r - \frac{\sigma^2}{2}\right](T-t), \sigma^2(T-t)\right)$$

$$\rho^*(S_T | S_t) = \frac{1}{S_T \sqrt{2\pi(T-t)}} \exp\left\{-\frac{\left(Ln(S_T) - Ln(S_t) - \left[r - \frac{\sigma^2}{2}\right](T-t)\right)^2}{2\sigma^2(T-t)}\right\} \quad (6)$$

4 O modelo de Black e Scholes tem uma importante característica: o preço de uma opção não depende da aversão ao risco do investidor, pois uma opção pode ser replicada por um portfólio sem risco composto de ações e dívidas; pelo argumento de não-arbitragem, a opção deve valer o mesmo que a carteira replicante, que faz um perfeito *hedge* para a opção.

5 Para obter essa fórmula, aplique o lema de Itô na equação (5) e faça a mudança de medida da probabilidade original para a medida Q-Martingale. Para tanto, há necessidade de recorrer ao teorema de Cameron-Martin-Girsanov e ao derivativo Randon-Nikodym [ver Baxter e Rennie (1996)].

De acordo com Cox e Ross (1976), temos que o valor-padrão de qualquer opção no objeto S pode ser escrito como:

$$f(S_t, t) = \exp(-r(T-t)) \int_0^{\infty} g(S_T) \rho^*(S_T | S_t) dS_T \quad (7)$$

onde:

S_t representa o valor possível do ativo na data T ;

$g(S_T)$ é a função de lucro do derivativo na data T ;

$\rho^*(S_T | S_t)$ é a FDP risco-neutro; e

r é a taxa de juro sem risco.

Se substituirmos a equação (6) na (7), obtemos a fórmula de Black e Scholes para uma opção europeia. Estamos considerando um processo de difusão que é descrito pela equação (5), que implica uma FDP risco-neutro conforme a equação (6). Contudo, a equação (7) permite analisar o problema de apreçamento de um derivativo sem considerar um processo de difusão em particular para o objeto subjacente.

Se pudermos inferir a FDP risco-neutro, seremos capazes de fazer perfeitamente o apreçamento correto da sua opção.⁶ A equação (7) pode ser utilizada para inferir a relação entre o preço de mercado de um derivativo e a função $\rho^*(S_T | S_t)$. Em particular, para uma *call* europeia, temos:

$$call(S_t, t) = \exp(-r(T-t)) \int_K^{\infty} (S_T - K) \rho^*(S_T | S_t) dS_T \quad (8)$$

onde K é o preço de exercício.

Ross (1976) demonstrou como relacionar o preço de uma *call* a uma FDP risco-neutro. Breeden e Litzenberger (1978) mostraram que a segunda derivada parcial do preço da opção com relação ao preço de exercício, e calculada no preço de exercício, é igual à FDP risco-neutro e descontada. O *long-run* da RiskMetrics fornece um exercício de como extrair a FDP risco-neutro com base em um *straddle* formado por *calls*. Assim, temos:

$$\rho^*(S_T) = \frac{\partial^2 call(S_t, t)}{\partial K^2} \exp(r(T-t)) \quad (9)$$

6 Fazer hipóteses sobre a FDP risco-neutro terminal em vez do processo de difusão para o objeto subjacente é uma abordagem mais geral. Um processo de difusão implica uma única FDP mas a recíproca não é verdadeira — uma FDP particular é consistente com vários processos de difusão.

Essa equação ajuda a obter a FDP risco-neutro sem fazer hipóteses sobre a dinâmica acerca do preço do objeto subjacente.

2.3 - Árvore binomial implícita

A abordagem desenvolvida por Derman e Kani (1994) move para a frente, na árvore binomial, ao introduzir em cada nó um preço observado da opção de modo que possa determinar o caminho para o próximo período. Esse caminho é caracterizado pela probabilidade de transição (volatilidade local) entre nós consecutivos. Uma generalização do modelo de Black e Scholes pode ser obtida ao substituir a equação (5) pela seguinte equação:

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma(S, t) \sigma dW \quad (10)$$

onde $\sigma(S, t)$ é a função de volatilidade local que não é mais constante, mas muda com o nível do preço da ação e no tempo. Essa modelagem foi inspirada no fato estilizado em uma crise — diminuição nos preços das ações e aumento da sua volatilidade.

Derman e Kani (1994) inferem numericamente $\sigma(S, t)$ ao calibrar os preços observados das opções com a “curva de sorriso”. Abordagens similares foram utilizadas por Rubinstein (1994) e Dupire (1994).

Árvores binomiais podem ser utilizadas como ferramentas para simular, em um modo discreto, o processo de difusão risco-neutro do objeto subjacente. Para cada nível da árvore os nós representam os valores de estado factíveis para um ativo. Nessa árvore, cada nó pode ter dois possíveis estados futuros dependendo da probabilidade de transição. O Gráfico 1 mostra a relação básica em uma árvore binomial, de acordo com Cox, Ross e Rubinstein (1979).

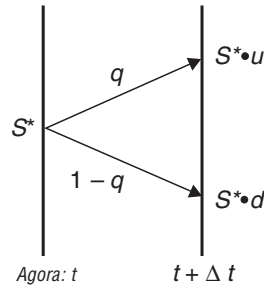
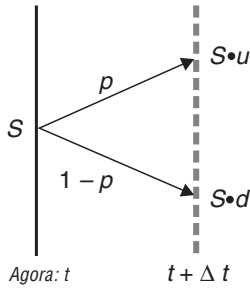
Em um mundo risco-neutro, as probabilidades de transição entre os nós dependem do juro sem risco e da volatilidade local. Enfatizamos que a volatilidade local imputada para a transição entre os nós é a mesma que a volatilidade utilizada pela fórmula de Black e Scholes. Deve ser observado também que a volatilidade tem escala temporal.

GRÁFICO 1

Relações básicas na árvore binomial

Dinâmica atual
 $dS = \mu S dt + \sigma S dZ$

Dinâmica risco-neutro
 $dS^* = rf S^* dt + \sigma S^* dZ$



$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} = 1/u$$

$$p = \frac{(1 + \mu \cdot \Delta t) - d}{(u - d)}$$

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} = 1/u$$

$$q = \frac{(1 + rf \cdot \Delta t) - d}{(u - d)}$$

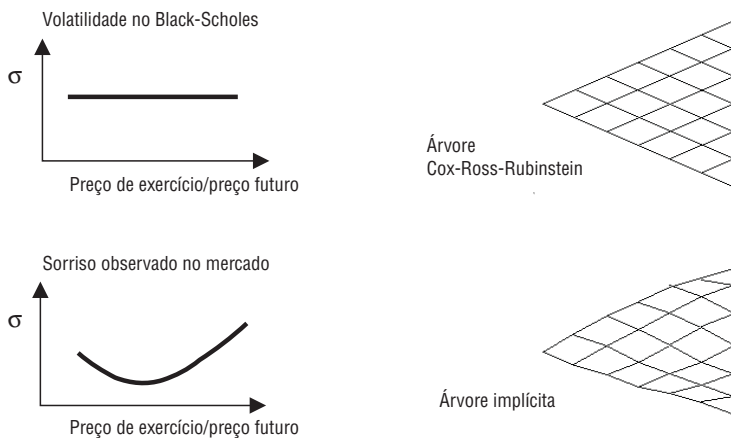
2.4 - Volatilidade implícita versus volatilidade local

O modelo de Cox, Ross e Rubinstein (1979) de árvore binomial somente é capaz de simular o processo de difusão risco-neutro no caso de inexistir a curva de sorriso. Mas a volatilidade não é constante, ou seja, ela muda com o preço da ação e no tempo. Assim, temos, no caso geral, diferentes probabilidades de transição entre os nós.⁷

A volatilidade implícita representa a incerteza durante a vida de um ativo. Se tivermos uma curva de sorriso plana, a volatilidade local é igual à volatilidade implícita. O Gráfico 2 mostra como a árvore binomial é relacionada com o sorriso de volatilidade.

⁷ O conceito de volatilidade local implica diferentes probabilidades de transição, dependendo do nó. Esse fenômeno é chamado também de “*move volatility*” por Rubinstein (1994).

GRÁFICO 2
Relação entre o sorriso de volatilidade e a árvore binomial



2.5 - Volatilidade implícita: curva de sorriso

Para o apreçamento de uma opção, o único parâmetro que não é observável é a volatilidade do objeto subjacente. Por outro lado, ao observar os preços das opções podemos inferir a volatilidade implícita.

A fórmula de Black e Scholes pode ser representada $C_{BS}(S, \sigma, r, \tau, K)$ para uma *call* com preço de exercício K , tempo para maturidade τ , volatilidade constante σ e um juro sem risco r . Mas os preços observados das opções muitas vezes não são consistentes com a fórmula de Black e Scholes.

Os *traders* chamam a volatilidade constante de volatilidade implícita endógena ($\sigma_{\text{implícito}}$), que faz a fórmula teórica de Black e Scholes igual ao preço de mercado da opção C_{Mercado} . Em outras palavras, para qualquer opção, $\sigma_{\text{implícito}}$ iguala $C_{\text{Mercado}} = C_{BS}(S, \sigma, r, \tau, K)$.

Para esse propósito, um algoritmo útil é o de Newton-Raphson ao computar o Vega (Λ) para um valor inicial $\sigma_{(0)}$:

$$\Lambda_0 = \frac{\partial C_{BS}(S, \sigma, r, \tau, K)|_{\sigma = \sigma_{(0)}}}{\partial \sigma} \quad (11)$$

onde σ é atualizado ao usar

$$C_{\text{Mercado}} - C_{BS}(\sigma_{(0)}) = \Lambda_0 [\sigma_{(1)} - \sigma_{(0)}] \quad (12)$$

Continue a iterar ao usar $\sigma_{(1)}$ para atualizar $\sigma_{(2)}$ e assim por diante. Pare quando $C_{\text{Mercado}} - C_{BS}(S, \sigma, r, \tau, K) \leq 10^{-46,8}$

No mundo real, os *traders* fazem um truque ao usar a fórmula de Black e Scholes. Eles sabem que a volatilidade não é constante, podendo mudar com a maturidade e o preço de exercício. Os *traders* avaliam as opções em dinheiro — *in-the-money* (ITM) — e fora do dinheiro — *out-of-the-money* (OTM). Essas opções têm volatilidades diferentes das opções sem lucro — *at-the-money* (ATM). Dessa forma, eles constroem a superfície de volatilidade, que é representada por uma função que relaciona a volatilidade implícita às seguintes variáveis: *a*) *moneyness* (K/S); e *b*) tempo restante até a maturidade τ .

2.6 - Abordagem de Shimko para inferir a FDP risco-neutro e a respectiva volatilidade implícita

Existem várias alternativas para estimar a FDP risco-neutro com base nos preços observados das opções: *a*) hipóteses podem ser feitas acerca do processo estocástico que descreve a mudança nos preços do objeto subjacente para inferir a FDP risco-neutro; *b*) hipóteses paramétricas podem ser feitas acerca da FDP risco-neutro e os preços observados são “casados” com a fórmula de Black e Scholes; *c*) a FDP risco-neutro pode ser derivada de uma fórmula paramétrica tanto para os preços das *calls* como para a superfície de volatilidade; e *d*) a FDP pode ser estimada não-parametricamente. Essa última abordagem deve-se a Ait-Sahalia e Lo (1995). Tais alternativas são descritas por Bahra (1997).

Estimamos a FDP risco-neutro ao usar a equação (9), que requer uma interpolação da fórmula da *call* (S, t). Essa tarefa pode ser feita utilizando dois métodos: *a*) parametricamente, ao impor uma forma funcional específica para os preços observados da *call* e estimando seus parâmetros por meio de estimadores de mínimos quadrados não-lineares; e *b*) não-parametricamente, aplicando a técnica de Kernel [ver Härdle (1990)].

Shimko (1993) interpola ao considerar o domínio da volatilidade implícita, em vez do domínio no preço da *call*, de modo que utilize o sorriso de volatilidade para obter a FDP. Em uma dada maturidade, a superfície de volatilidade é utilizada para obter uma curva suave para a volatilidade implícita *versus* preços de

8 Para maiores detalhes, ver as notas de aulas de Ait-Sahalia (1998).

exercícios. De fato, Shimko (1993) testa várias formas funcionais para a volatilidade implícita.

Na próxima etapa, a fórmula de Black e Scholes é utilizada para inverter a curva de sorriso interpolada. O preço da *call* é resolvido como uma função contínua dos preços de exercício.

Nesse estágio, a função dos preços das *calls* pode ser diferenciada duas vezes para obter a FDP implícita e risco-neutro no intervalo entre o menor e o maior preço de exercício. Finalmente, para as partes faltantes das caudas da FDP, Shimko (1993) encaixa uma distribuição log-normal.⁹

3 - Descrição dos dados

Utilizamos os dados das opções transacionadas na BM&F. Deve ser observado que o mercado de balcão no mercado de opções no Ibovespa tornou-se ilíquido após os *crashes* recentes no mercado emergente. Consideramos somente os dados disponíveis no *site* da BM&F. Existem dados diários das transações em termos de preços maiores, menores, fechamento das opções, futuros e à vista dos ativos subjacentes.¹⁰

Quanto ao período analisado, estamos evitando os dados durante as crises asiática e russa devido à ausência de transações. Seleccionamos os períodos P1 e P2 no Gráfico 3. Esses períodos são os mesmos que foram utilizados por Campa, Chang e Refalo (1999). Eles estimaram a FDP risco-neutro para a taxa de câmbio do real contra o dólar. Esses períodos compreendem dois anos antes da crise asiática.¹¹

9 O problema do método de Shimko é impor uma volatilidade constante em uma região crítica — a cauda esquerda. O problema original é o tratamento a ser aplicado aos dados faltantes. Esse problema decorre da iliquidez do mercado nos períodos de *crashes*.

10 Nos períodos analisados, na BM&F foram realizadas transações somente de opções européias no futuro daquele índice. Os dados consistem em registros diários dos valores das opções nos futuros e nos futuros do Ibovespa. Foram utilizados preços de fechamento. Há grandes disparidades em termos do número de negociações de *calls* e *puts*. No período analisado, tivemos 273 dias de transações para essas opções, com 1.192 negociações para *calls* e 444 para *puts*. Trabalhamos somente com as *calls* devido à redundância das *puts* decorrente da paridade *call/put*. Mas quando não obtivemos dados disponíveis para as *calls*, usamos as *puts* via paridade entre elas. Como *proxy* para o ativo sem risco, utilizamos o mercado futuro de Depósitos Interbancários Diários. O objeto subjacente desse contrato futuro é o CDI, que é definido como taxas médias diárias capitalizadas. A fonte de dados é a Cetip. Com base nesses dados, estimamos a estrutura a termo do zero cupom.

11 O efeito contágio da crise asiática na economia brasileira começou em julho de 1997 e seu efeito persistiu no resto desse ano, especialmente depois de outubro com a fuga de capital e com poucos contratos negociados na BM&F. Em agosto de 1998, começou a crise russa cujo contágio no Brasil persistiu até o final desse ano. Depois, em janeiro de 1999, o Banco Central mudou o regime cambial.



4 - Resultados empíricos

4.1 - Estimação da volatilidade implícita

As Tabelas 1 e 2 mostram a média e o desvio-padrão para a volatilidade implícita (volatilidade da volatilidade) em termos de maturidade e para os períodos P1 e P2, para o Ibovespa.¹²

A Tabela 1 é relativa a uma *call*-ATM, enquanto a Tabela 2 considera uma *call*-ITM. Ambas as tabelas consideram as mesmas maturidades e períodos, mas para diferentes *moneyness*.¹³

12 Quando se tem uma opção sobre uma ação que paga uma taxa de dividendo, como de praxe, devemos subtrair do juro sem risco essa taxa de dividendo. Mas agora temos uma opção sobre o Ibovespa. Esse índice é composto de ações que pagam dividendos. Assim, como devemos tratar uma opção sobre esse índice? Quando uma opção paga dividendo, seu preço cai — *caeteris paribus*. Para o Ibovespa não cair, esse índice supõe que o dividendo é reinvestido na carteira de mercado. Na prática, isso significa que quando uma ação paga dividendo, seu peso no índice deve aumentar para fazer constante o investimento total que foi feito na ação da firma que pagou o dividendo. Conseqüentemente, para o apreamento de uma opção no Ibovespa não é necessário subtrair o dividendo do juro sem risco. De outra forma, teríamos uma dupla contagem. *Splits* são tratados de forma similar.

13 Essas tabelas mostram os resultados ao usar o algoritmo de Newton-Raphson. Enfatizamos que muitas vezes esse algoritmo não converge para alguns dados. Isso pode ser devido a posições de arbitragem ou dados imperfeitos. Quando isso ocorre, os dados foram desprezados da amostra. Dos 1.192 registros para as *calls*, tivemos 936 que convergiram. Esses dados foram utilizados para construir a superfície de volatilidade.

TABELA 1

Volatilidade média e desvio-padrão da volatilidade implícita para o Ibovespa — opções-ATM

| Maturidade | | P1 | P2 |
|------------|-------------------|------------------|-------------------|
| | | 1/6/96 a 18/2/97 | 19/2/97 a 30/7/97 |
| 7-14 dias | Média (%) | 20,02 | 23,64 |
| | Desvio-padrão (%) | 5,52 | 4,85 |
| | # Obs. | 30 | 31 |
| 15-21 dias | Média (%) | 22,18 | 21,52 |
| | Desvio-padrão (%) | 8,60 | 5,18 |
| | # Obs. | 40 | 22 |
| 22-30 dias | Média (%) | 22,33 | 25,80 |
| | Desvio-padrão (%) | 4,09 | 4,66 |
| | # Obs. | 46 | 40 |
| 31-45 dias | Média (%) | 23,47 | 26,04 |
| | Desvio-padrão (%) | 3,86 | 3,68 |
| | # Obs. | 69 | 67 |
| 46-60 dias | Média (%) | 24,63 | 26,19 |
| | Desvio-padrão (%) | 5,32 | 4,20 |
| | # Obs. | 93 | 72 |

De acordo com a Tabela 1, pode ser observado que as médias da volatilidade implícita para o Ibovespa aumentam com a maturidade nos períodos P1 e P2. Esse fato é compatível com o pensamento do mercado de que quanto maior a maturidade, maior será a volatilidade. Contudo, esse raciocínio não é válido na Tabela 2 para as opções-ITM.¹⁴

Agora, se compararmos as Tabelas 1 e 2 para cada maturidade e período, podemos confirmar alguns resultados esperados que as opções-ITM em relação às

¹⁴ Esse resultado é similar ao obtido por Ait-Sahalia e Lo (1995) para o índice S&P-500. Esse fato é interpretado pelo mercado como sinal de um possível *crash* futuro. Nesse caso, devemos analisar com mais cuidado a superfície de volatilidade. Um resultado similar também foi obtido por Campa, Chang e Refalo (1999) para o real contra o dólar no período anterior à crise asiática. Mas esses resultados são duvidosos, pois misturaram os diferentes tipos de opções em termos de ATM, OTM e ITM e, além disso, não consideraram as diferentes regiões da superfície de volatilidade.

TABELA 2

Média e volatilidade da volatilidade implícita do Ibovespa — opções-ITM

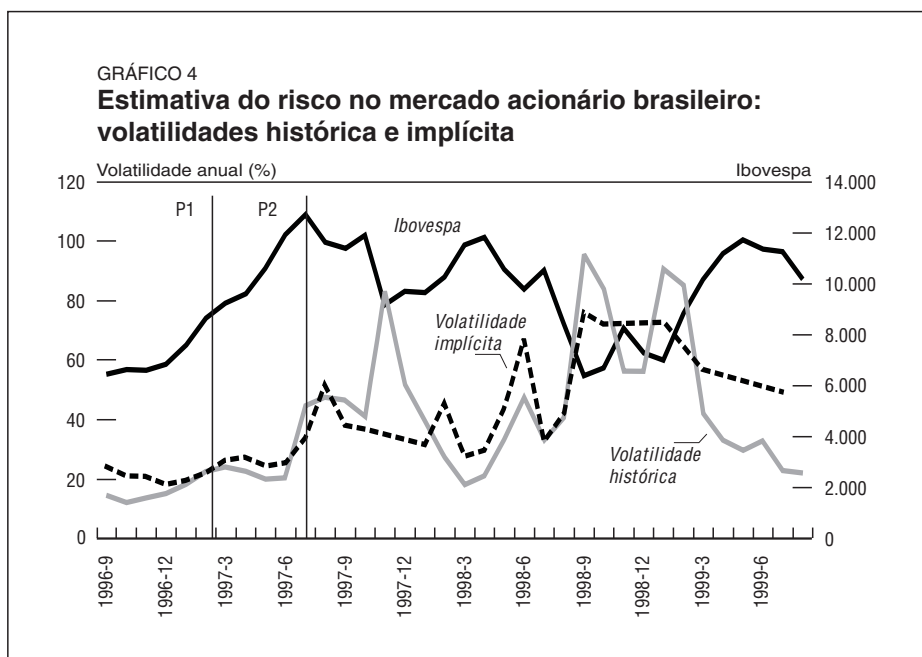
| Maturidade | | P1 | P2 |
|------------|-------------------|------------------|-------------------|
| | | 1/6/96 a 18/2/97 | 19/2/97 a 30/7/97 |
| 7-14 dias | Média (%) | 56,30 | 61,83 |
| | Desvio-padrão (%) | 55,17 | 46,72 |
| | # Obs. | 5 | 11 |
| 15-21 dias | Média (%) | 56,89 | 43,29 |
| | Desvio-padrão (%) | 39,54 | 24,31 |
| | # Obs. | 7 | 11 |
| 22-30 dias | Média (%) | 25,14 | 39,59 |
| | Desvio-padrão (%) | 7,57 | 27,00 |
| | # Obs. | 17 | 31 |
| 31-45 dias | Média (%) | 29,92 | 38,32 |
| | Desvio-padrão (%) | 18,74 | 24,61 |
| | # Obs. | 22 | 54 |
| 46-60 dias | Média (%) | 32,11 | 53,68 |
| | Desvio-padrão (%) | 19,13 | 30,10 |
| | # Obs. | 23 | 34 |

opções-ATM apresentam maiores médias e volatilidades para a volatilidade implícita. Mostramos a seguir que esses resultados refletem as regiões ao longo das curvas de sorriso.

O Gráfico 4 mostra as diferenças entre as volatilidades implícita e histórica para o Ibovespa.¹⁵

De fato, a volatilidade implícita representa o risco esperado pelo mercado que é contido nos preços das opções. Esse risco de mercado inclui a possibilidade de eventos raros como um *crash*. O principal resultado é que a volatilidade histórica é consistentemente menor do que a implícita nos períodos antes e depois dos *crashes*, enquanto para os períodos durante os *crashes* inexistem transações em

¹⁵ A volatilidade histórica é calculada sob o critério de média móvel exponencialmente ponderada, conforme o critério da RiskMetrics para o propósito de calcular o VaR.



opções. Assim, não podemos inferir a volatilidade implícita, mas apenas a histórica. As consequências imediatas são: a) o VaR tradicional da RiskMetrics subestima o risco de mercado em relação à abordagem de volatilidade implícita; e b) o conceito de VaR tem algum significado durante um *crash*?¹⁶

4.2 - A superfície de volatilidade e as respectivas curvas de sorriso

Os Gráficos 5 e 6 mostram, respectivamente, as superfícies de volatilidade para os períodos P1 (junho de 1996 a fevereiro de 1997) e P2 (fevereiro de 1997 a julho de 1997).¹⁷

Existe uma interessante controvérsia acerca dos vales na superfície de volatilidade para certas maturidades. Por exemplo, Ait-Sahalia (1998, p. 143) encontra vários vales para o S&P-500. Ele sugere que isso pode caracterizar possibilidades de arbitragem devido à existência de volatilidades a termo que sejam baratas. Por outro lado, esse fenômeno sugere para alguns investidores brasileiros: falta

¹⁶ Malz (2000) fornece uma metodologia para utilizar a volatilidade implícita com base nos preços das opções para prever os possíveis choques.

¹⁷ Como obtivemos esses gráficos? Ver Apêndice para maiores detalhes.

GRÁFICO 5
Superfície de volatilidade — período P1: junho/96 a fevereiro/97

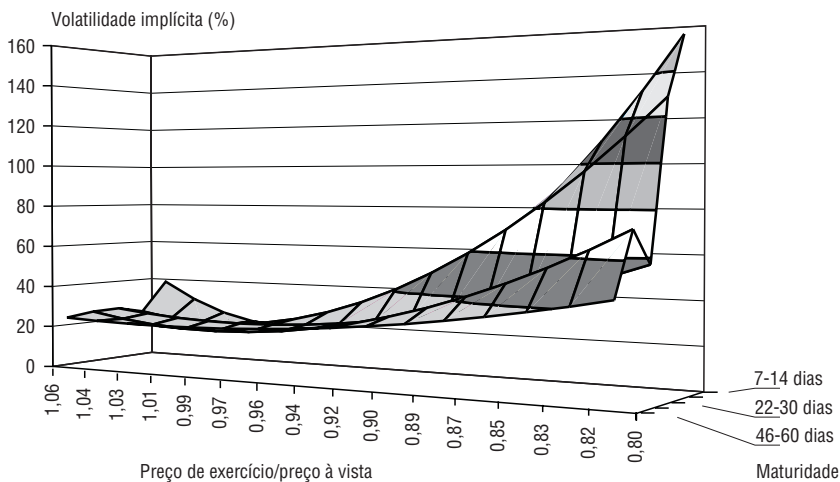
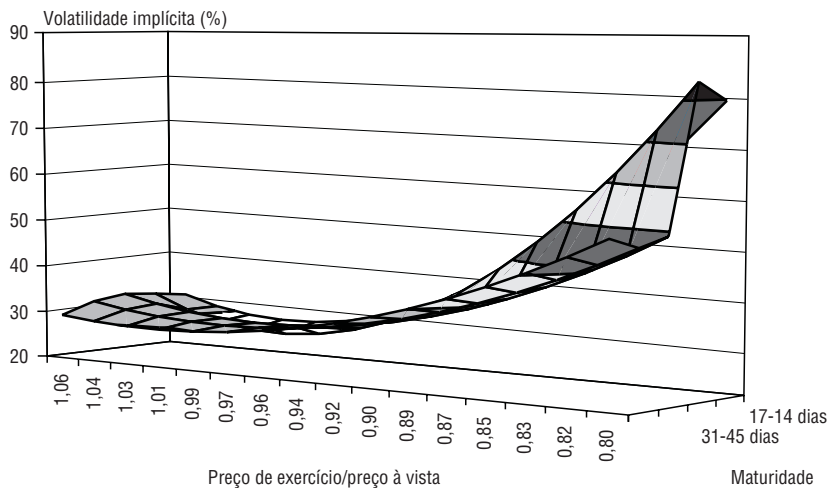


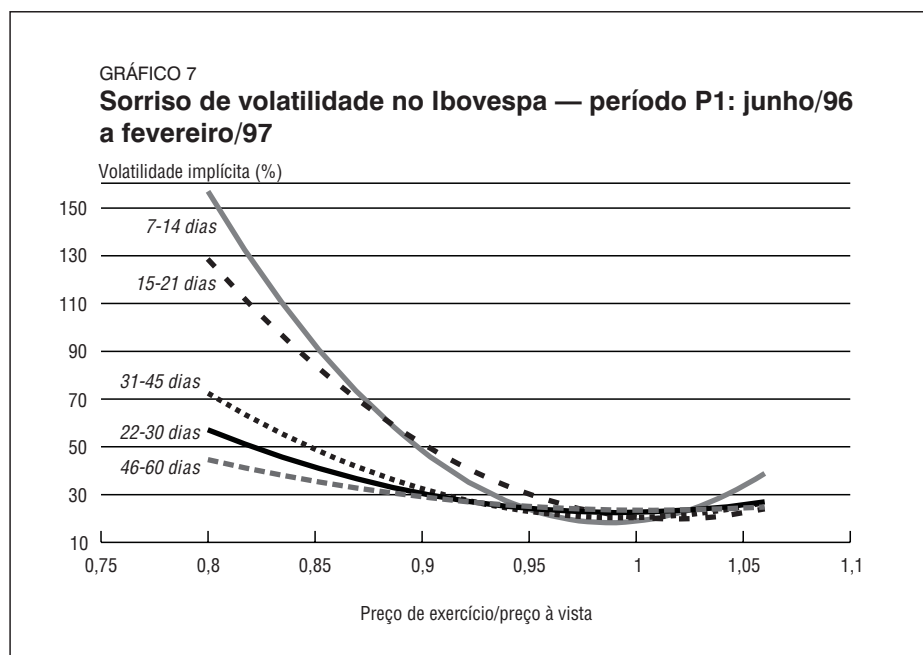
GRÁFICO 6
Superfície de volatilidade — período P2: fevereiro/97 a julho/97



de *hedge*; sinal de *crash* futuro; ou problema de coleta de dados não-sincronizada — comprometendo a estimação da volatilidade implícita. Assim, pode não existir um *free-lunch* como foi sugerido por Ait-Sahalia (1998). Mas outros investidores discordam e confirmam a posição de Ait-Sahalia ao dizer que pode existir a possibilidade de arbitragem.

Com base nos Gráficos 5 e 6, os Gráficos 7 e 8 mostram, respectivamente, “fatias de sorrisos das volatilidades”. Cada fatia corresponde a um dado intervalo de maturidade. Esses gráficos mostram como as volatilidades implícitas mudam com o *moneyness* de uma opção e com um específico intervalo de maturidade.¹⁸ Tais gráficos ilustram melhor o fato estilizado descrito na seção anterior.

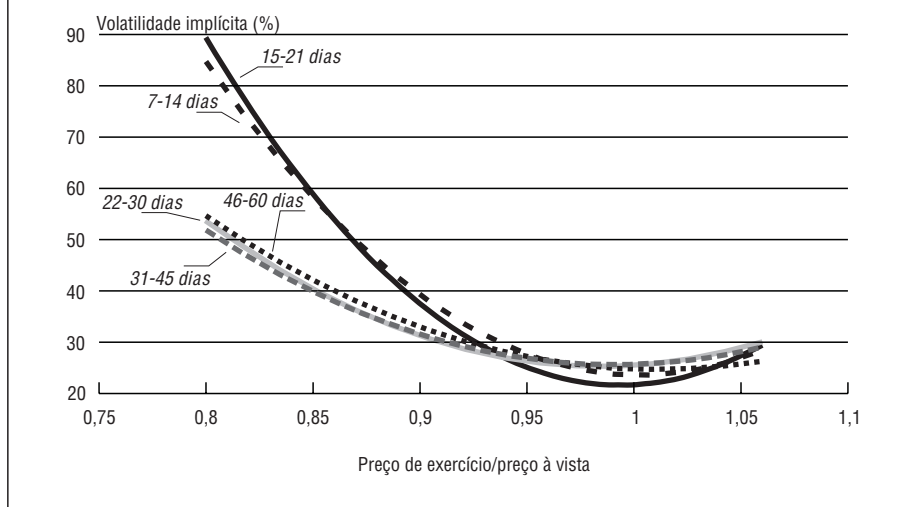
Se analisarmos a região das *calls*-ITM (em dinheiro), podemos observar que as opções com maturidades menores do que 21 dias têm maiores volatilidades implícitas do que as com maiores maturidades. Lembre-se de que o índice S&P-500 mostrou o mesmo comportamento, de acordo com Ait-Sahalia e Lo



18 O conceito de *moneyness* (K/S) mede o valor intrínseco do valor de uma opção na sua maturidade. *Moneyness* menor do que 1 representa as *calls*-ITM. Os seguintes passos são utilizados para construir as curvas de volatilidade. Para cada intervalo de *moneyness* é calculada uma média ponderada de volatilidade, de acordo com o volume transacionado. Assim, obtivemos aproximadamente 30 pontos no plano de volatilidade *versus moneyness*. Então, é interpolada uma função quadrática para representar a curva de sorriso.

GRÁFICO 8

Sorriso de volatilidade no Ibovespa — período P2: fevereiro/97 a julho/97



(1995). Uma explicação é que os *traders* têm maiores incertezas no curto prazo do que no longo prazo quando são transacionadas essas *calls*. Mas o oposto ocorre para as *calls*-ATM. Em termos da curva de sorriso, a volatilidade de curto prazo é mais elevada no período P1 em comparação com o período P2 para as *calls*-ITM. Em outras palavras, os preços dessas opções-ITM são mais caros no período P1 em relação ao P2 devido à maior volatilidade.

Lembre-se de que a crise da Ásia ocorreu no final do período P2. A questão é: que tipo de opção mostra maior volatilidade quando vamos do período P1 para o período P2 (antes do *crash*)?

- As opções-ATM mostram maiores volatilidades para todas as maturidades no período P2 em comparação com o período P1. Esse fato é coerente com os resultados mostrados no Gráfico 4 em termos de volatilidade histórica.
- Por outro lado, as opções-ITM mostram resultados opostos.
- Os cruzamentos persistentes das curvas de sorriso nos Gráficos 7 e 8 são interpretados pelo mercado como sinal adicional de possíveis crises futuras. De fato, Ait-Sahalia e Lo (1995) sugerem analisar as opções-OTM, pois conteriam melhores informações, mas o mercado brasileiro não apresenta transações suficientes para essas opções.

4.3 - FDP estimada para o mercado acionário brasileiro

Em termos de implementação, tentamos dois métodos independentes para obter a FDP risco-neutro: Shimko e Derman e Kani. Nesse sentido, o Gráfico 9 mostra suas respectivas FDPs.

Apesar de podermos constatar no Gráfico 9 que ambas as metodologias produzem aparentemente as mesmas FDPs, a metodologia de Derman e Kani não fornece resultados satisfatórios quando tentamos calibrar curvas de sorriso quadráticas. Assim, utilizamos somente o método de Shimko.¹⁹ Sob essa metodologia, o Gráfico 10 mostra a FDP para a faixa de maturidade entre 31 e 45 dias. Esse gráfico baseia-se no Gráfico 7. De modo similar, o Gráfico 11 baseia-se no Gráfico 8. Nas caudas da FDP, com base no método de Shimko, foram ajustadas as correspondentes FDPs log-normal com a mesma média e variância.

A FDP do Gráfico 10 tem quebras que são inerentes ao método de Shimko devido à ausência de dados nas crises e ao ajustamento de uma FDP log-normal nas caudas faltantes.

Para ilustrar quantitativamente o efeito no *hedge* para o propósito de administração de risco, fizemos um exercício comum. Comparamos as áreas sob a cauda esquerda da FDP implícita *versus* uma FDP log-normal. Tomamos o valor 13.000 como referência ao Ibovespa. Se quisermos determinar o valor mínimo que esse índice pode atingir nos próximos 30 dias com intervalo de confiança de 95%, obtemos um valor de 11.729 para esse índice ao usar uma FDP log-normal. Mas, se utilizamos a FDP implícita, temos um índice de 11.402. Assim, subestimamos a possível perda no mercado acionário em 2,8% se usarmos a FDP log-normal em vez da FDP implícita.

¹⁹ Para verificar a validade do método de Derman e Kani, criamos um índice para medir a percentagem de nós ajustados pela violação de arbitragem para cada nível da árvore. Lembre-se de que o algoritmo de Derman e Kani não evita uma probabilidade de transição negativa. Quando ocorre uma probabilidade negativa, temos uma violação de arbitragem. Nesse caso, o algoritmo de Derman e Kani deve ser rejeitado e o processo de ajustamento deve ser aplicado. Assim, esse índice mede o desempenho do algoritmo de Derman e Kani para construir a árvore binomial de acordo com a curva de sorriso. Para curvas de sorriso quadráticas, consideramos 500 níveis para a árvore. Assim, obtivemos índices maiores do que 95. Isso significa que conseguimos replicar somente 5% dos nós ao utilizar o algoritmo de Derman e Kani. Quando incrementamos o número de níveis para 600, o índice não aumenta necessariamente de mais de uma unidade. Assim, concluímos que as curvas de sorriso estimadas, de acordo com o método de Derman e Kani, falham para o mercado acionário brasileiro antes da crise asiática. Derman, Kani e Chriss (1996) reconhecem esse tipo de problema e propõem a utilização da árvore trinomial recombinante. Apenas lembrando que a inferição da árvore implícita é importante para o apreçamento de derivativos dependentes do caminho (exóticas). Assim, utilizamos a metodologia de Shimko. Mostramos apenas duas FDPs em relação aos dois períodos anteriores à crise asiática. Mas para demonstrar estatisticamente a robustez e aplicabilidade do método de Shimko em comparação com o de Derman e Kani em termos de árvore binomial, precisamos de maiores amostras. Mas isso não é factível no caso brasileiro, pois tivemos apenas cinco anos depois da implementação do Plano Real. Além disso, depois de janeiro de 1999, tivemos a mudança de regime cambial. De qualquer modo, as FDPs implícitas obtidas mostram um conhecido fato estilizado conforme reportado por Ait-Sahalia e Lo (1995): *skew* negativo e leptocúrtico. Em outras palavras, o mercado acionário brasileiro mostra um padrão de um mundo chamado de “Além do de Black e Scholes (não-log-normality)”.

GRÁFICO 9

Comparação entre as FDPs Derman e Kani e Shimko

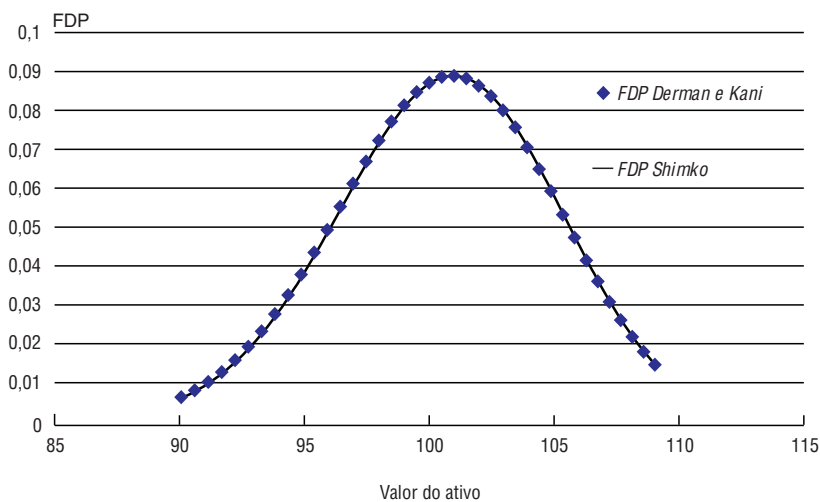
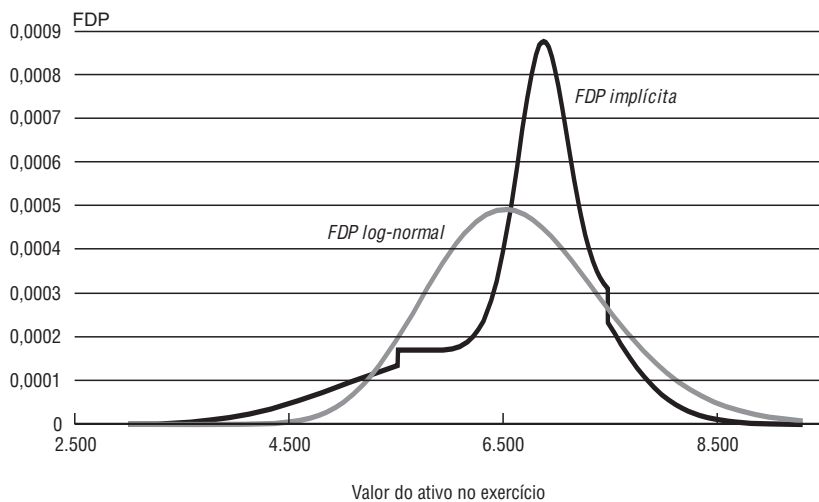
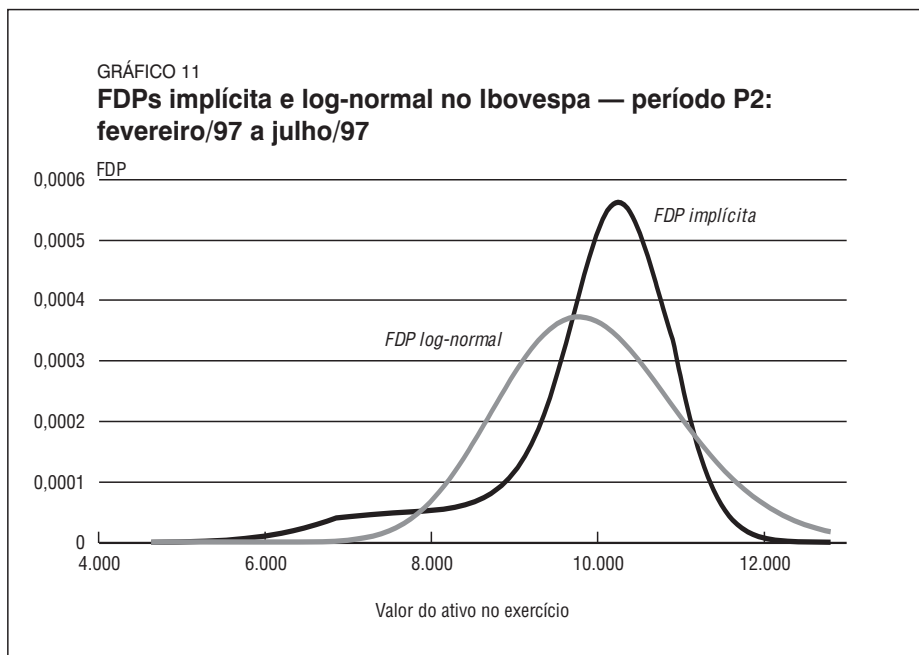


GRÁFICO 10

FDPs implícita e log-normal — período P1: junho/96 a fevereiro/97





A FDP implícita tem valor por duas razões: primeiro, ela pode ser utilizada para inferir o processo de difusão do objeto subjacente. O uso da árvore binomial implícita, tal como em Rubinstein (1994), auxilia no apereçamento de opções exóticas; segundo, para o propósito de administração de risco, a FDP implícita fornece o chamado VaR econômico *versus* o VaR estatístico da RiskMetrics.²⁰ Nesse sentido, a FDP implícita representa a avaliação econômica do risco de mercado que é esperado pelos agentes.

5 - Conclusões

Para o mercado acionário brasileiro no período analisado de junho de 1996 a julho de 1997 — antes da crise asiática —, verificamos um aumento na volatilidade implícita de acordo com a *call*-ATM. Esse fato é consistente com a volatilidade histórica correspondente. Por outro lado, esse resultado não é válido para a *call*-ITM.

Ao usar as curvas de sorriso, verificamos a factibilidade da implementação dos métodos de Derman e Kani e de Shimko com o objetivo de estimar a FDP risco-neutro para o Ibovespa. A FDP tem conteúdo informacional por duas razões:

²⁰ Para maiores detalhes, ver Ait-Sahalia e Lo (2000).

primeiro, pode ser usada para inferir o processo de difusão do objeto subjacente — Ibovespa. Essa inferência pode ser utilizada para o apreçamento de derivativos dependentes do caminho; segundo, nossas evidências auxiliam na administração de risco ao usar a FDP implícita para se estimar o VaR econômico em contraste com o VaR estatístico, que é o *benchmark* da RiskMetrics. Ait-Sahalia e Lo (2000) sugerem combinar esses tipos de VaR.

Nossos resultados propõem, pelo menos, a seguinte agenda para as futuras pesquisas:

a) uma vez que a árvore binomial de Derman e Kani é insatisfatória para o mercado acionário brasileiro, uma alternativa seria usar a árvore trinomial que foi desenvolvida por Derman, Kani e Chriss (1996); *b)* outro desafio é utilizar os métodos não-paramétricos para os mercados emergentes na linha sugerida por Ait-Sahalia e Lo (1995). O grande problema dessa técnica de vanguarda é a escassez de dados nas épocas de crises. A única metodologia que restaria seria usar dados históricos. Mas essa abordagem não satisfaz também se houver mudança de regime; *c)* para o propósito de administração de risco, nossos resultados encorajam pesquisas adicionais para obter medidas de VaR que incorporam a avaliação econômica de acordo com a densidade dos preços nos estados; e *d)* para o apreçamento de opções exóticas, a tarefa requerida seria inferir o processo de difusão risco-neutro ao usar árvores de modo que se obtenham as volatilidades locais.

Apêndice

A.1 - Interpolação da curva de sorriso

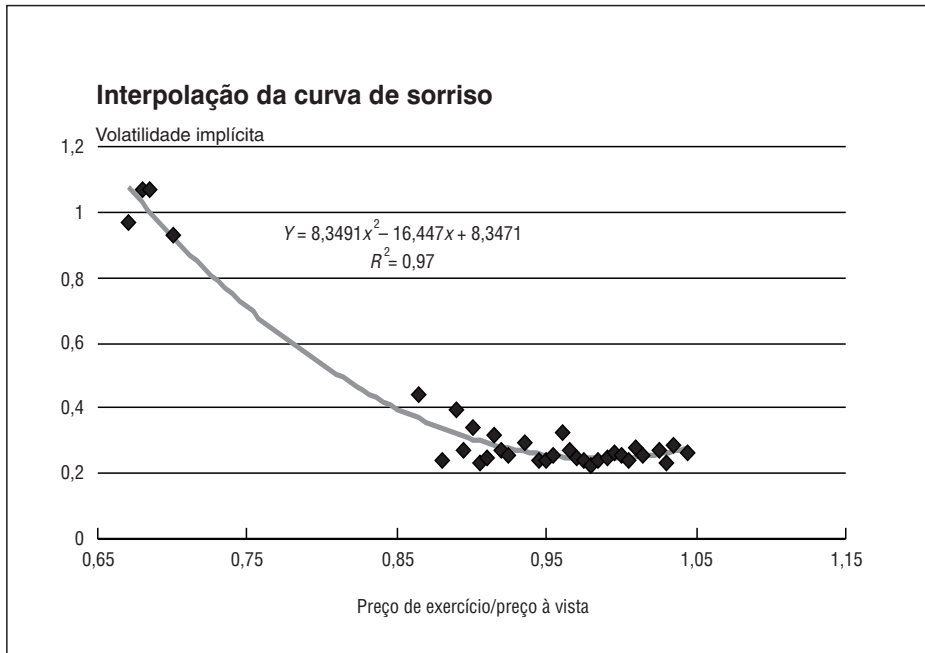
Os Gráficos 5 e 6 mostram as superfícies de volatilidades. Para estimar cada fatia, efetuamos o seguinte procedimento. Para cada faixa de maturidade foi estimado um polinômio quadrático, ver gráfico mais à frente.

De modo similar, a tabela a seguir mostra polinômios quadráticos para todas as faixas de maturidades.

Parametrização das curvas de sorriso — polinômios de volatilidade

($y = ax^2 + bx + c$, onde y = volatilidade e x = preço de exercício/preço à vista)

| | 7-14 dias | 15-21 dias | 22-30 dias | 31-45 dias | 46-60 dias |
|--------|-----------|------------|------------|------------|------------|
| ax^2 | 39,345 | 23,037 | 9,4228 | 13,915 | 4,9668 |
| bx | -77,73 | -46,87 | -18,69 | -27,65 | -10 |
| c | 38,573 | 24,038 | 9,4934 | 13,939 | 5,2676 |



A.2 - Código C++ para implementar o método de Shimko — inferência das FDPs implícita e risco-neutro

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
main() {
    FILE *inpdf;
    FILE *outpdf;
    char linbuff[81];
    double a[4],x, xini, xfin, deltax,S,B,tao,result;
    /* Open files */
    if ((inpdf = fopen("pdf_shim.inp","r")) == NULL) {
        printf("Failure to open output results file!!\n");
        exit(1);
    }
}
```

```

}
if ((outpdf = fopen("pdf_shim.sal","w")) == NULL) {
printf("Failure to open output results file!!\n");
exit(1);
}
/* Read initial data */
fscanf(inpdf, "X initial (xini): %f\n",&xini);
fscanf(inpdf, "X final (xfin): %f\n",&xfin);
fscanf(inpdf, "Delta X (deltax): %f\n",&deltax);
fscanf(inpdf, "Value of asset at date 0 (S): %f\n",&S);
fscanf(inpdf, "Risk-free discount factor (B): %f\n",&B);
fscanf(inpdf, "Value for tau: %f\n",&tao);
fgets(linbuff,80,infile);
fscanf(inpdf, " a0: %f\n",&a[1]);
fscanf(inpdf, " a1: %f\n",&a[2]);
fscanf(inpdf, " a2: %f\n",&a[3]);
fclose(inpdf);
x = xini;
while (x <= xfin) {
    result = pdf_sorr(x,S,B,tao,a);
    fprintf(outpdf,"%2f %6\n",x,result);
    x = x + deltax;
}
fclose(outpdf);
}
/* Functions and Procedures */
double pdf_sorr(double X, double S, double B, double tao, double a[]) {
    double md2,md2x,msigma,md1,md1x;

```



```

double mpdf_norm,mresult;
msigma = sigma(X,a);
md1 = d1(S,X,B,msigma,tao);
md2 = d2(md1,msigma,tao);
md1x = d1x(X,md1,msigma,tao,a);
md2x = d2x(X,md1x,a);
mpdf_norm = pdf_norm(md2);
mresult = -1*mpdf_norm*(md2x-(a[2]+2.0*a[3]*X) *(1-md2*md2x)
-2.0*a[3]*X);
return (mresult);
}
double d1(double pS, double pX, double pB,
double psigma, double ptao)
return ((log(pS/(pX*pB))+0.5*psigma*psigma*ptao)/(psigma*
sqrt(ptao)));
}
double d2(double pd1, double psigma, double ptao)
{ return ((pd1 - psigma*sqrt(ptao)));
}
double d1x(double pX, double pd1, double psigma,
double ptao, double a[])
{ return(-1/(pX*psigma*sqrt(ptao))+(1-pd1/(psigma*
sqrt(ptao)))*(a[2]+2.0*a[3]*pX));
}
double d2x(double pX, double pd1x, double a[])
return (pd1x - (a[2]+2.0*a[3]*pX));
}
double sigma(double pX, double a[]) {
return (a[1] + a[2]*pX + a[3]*pX*pX);
}

```

```

}
double pdf_norm(double argument) {
    double result;
    result = 1.0/sqrt(2.0*3.141592654)*exp(-0.5*
argument*argument);
    return (result);
}

```

Abstract

A critical aspect for pricing financial securities is to assess how the actual diffusion process differs from the standard Black-Scholes model. This work estimates the Arrow-Debreu Implied State-Price Densities and its equivalent risk-neutral Probability Density Function (PDF) for the Brazilian stock market index by using the methodologies developed by Derman-Kani (1994) and Shimko (1993). The estimated PDFs allow us to infer the market risk for the purposes of both risk management and pricing financial securities in non-arbitrage models like Black and Scholes (1973) or Merton (1973).

Bibliografia

- AÏT-SAHALIA, Y. *Financial engineering: mathematical methods of option pricing & their estimations. Class notes.* University of Chicago, Winter 1998.
- AÏT-SAHALIA, Y., LO, A. *Nonparametric estimation of state-price densities implicit in financial asset prices.* University of Chicago, 1995, mimeo.
- . Nonparametric risk management and implied risk aversion. *Journal of Econometrics*, v. 94, p. 9-51, 2000.
- ARROW, K. The role of securities in the optimal allocation of risk bearing. *Review of Economic Studies*, v. 31, p. 91-96, 1964.
- BAHRA, B. *Implied risk neutral probability density functions from option prices: theory and application.* Bank of England, 1997, mimeo.
- BANZ, R., MILLER, M. Prices for state contingent claims: some estimates and application. *Journal of Business*, v. 51, p. 653-672, 1978.
- BAXTER, M., RENNIE, A. *Financial calculus: an introduction to derivative pricing.* Cambridge University Press, 1996.

- BLACK, F., SCHOLES, M. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, v. 81, p. 637-659, 1973.
- BREEDEN, D., LITZENBERGER, R. Prices of state-contingent claims implicit in option prices. *Journal of Business*, v. 51, p. 621-651, 1978.
- CAMPA, J., CHANG, K., REFALO, J. *An options-based analysis of emerging market exchange rate expectations: Brazil's Real Plan, 1994-1997*. 1999 (NBER Working Paper Series, W.P. 6.929).
- CHI-FU, H., LITZENBERGER, R. H. *Foundations for financial economics*. Upper Slade River: Prentice Hall, 1988.
- COX, J., ROSS, S. The valuation of options for alternative stochastic processes. *Journal of Financial Economics*, v. 3, p. 145-166, 1976.
- COX, J., ROSS, S., RUBINSTEIN, M. Option pricing: a simplified approach. *Journal of Financial Economics*, v. 7, p. 229-263, 1979.
- DEBREU, G. *Theory of value*. New York: John Wiley and Sons, 1959.
- DERMAN, E., KANI, I. Reading on the smile. *Risk*, v. 7, p. 32-39, 1994.
- DERMAN, E., KANI, I., CHRISS, N. Implied trinomial trees of the volatility smile. In: SACHS, G. *Quantitative Strategies Research Notes*, 1996.
- DERMAN, E., KANI, I., ZOU, J. The local volatility surface: unlocking the information in index option prices. In: SACHS, G. *Quantitative Strategies Research Notes*, 1995.
- DUPIRE, B. Pricing with a smile. *Risk*, v. 7, p. 18-20, 1994.
- HANSEN, L. P., RICHARD, S. F. The role of conditioning information in deducing testable restrictions implied by dynamic asset pricing models. *Econometrica*, v. 55, n. 3, p. 587-613, 1987.
- HANSEN, L. P., JAGANNATHAN, R. Implications of security market data for models of dynamic economies. *Journal of Political Economy*, v. 99, p. 225-262, 1991.
- HÄRDLE, W. *Applied nonparametric regression*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1990.
- INGERSOLL, J. E. *Theory of financial decision*. Rowman & Littlefield Publishers, Inc., 1987.
- JARROW, R., RUDD, A. Approximate option valuation for arbitrary stochastic processes. *Journal of Financial Economics*, v. 10, p. 347-369, 1982.
- LONGSTAFF, F. *An empirical examination of the risk-neutral valuation model*. College of Business, Ohio State University, and the Anderson Graduate School of Management, Ucla, 1992 (Working Paper).

- LUCAS, R. Asset prices in an exchange economy. *Econometrica*, v. 46, p. 1.429-1.446, 1978.
- MADAN, D. B., MILNE, F. Contingent claims valued and hedged by pricing and investing in a basis. *Mathematical Finance*, v. 4, p. 223-245, 1994.
- MALZ, A. *Do implied volatilities provide early warning of market stress?* The RiskMetrics Group, 2000 (Working Paper, 00-01).
- MERTON, R. Rational theory of option pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science*, v. 4, p. 141-183, 1973.
- ROSS, S. Options and efficiency. *Quarterly Journal of Economics*, v. 90, p. 75-89, 1976.
- RUBINSTEIN, M. The valuation of uncertain income streams and the pricing of options. *Bell Journal of Economics*, p. 407-425, 1976.
- . Implied binomial trees. *Journal of Finance*, v. 49, p. 771-818, 1994.
- SHIMKO, D. Bound of probability. *Risk*, v. 6, p. 33-37, 1993.
- YOSHINO, J. A. *Money and banking regulation: the welfare costs of inflation*. The University of Chicago, Department of Economics, June 1993 (Ph.D. Thesis Dissertation).
- . *The welfare costs of the US monetary business cycle: inflation and the input-output leontieff multiplier*. Brasil: São Paulo, Universidade de São Paulo, Departamento de Economia, Oct. 2000 (Working Paper).
- . *A restatement of the welfare costs of inflation: the waste of scarce resources in the manufacturing, households and banking sectors*. XVIII Latin American Econometric Society Meeting, Argentina. São Paulo, Brasil: Universidade de São Paulo, Departamento de Economia, July 2001 (Working Paper).
- . *The social costs of inflation: the firm float time and household transaction costs*. São Paulo, Brasil: Universidade de São Paulo, Departamento de Economia, July 2001 (Working Paper).

(Originais recebidos em março de 2001. Revistos em maio de 2001.)