

Distribuição da renda, estrutura da demanda e emprego

ADOLFO FIGUEROA *

A distribuição da renda é freqüentemente considerada como uma questão de equidade. Entretanto, de um ponto de vista analítico, o modo pelo qual a renda nacional é distribuída exerce certos efeitos sobre outras variáveis econômicas, podendo ser então considerada como uma variável em economia positiva. No que se refere a este segundo aspecto, encontra-se um exemplo na teoria do crescimento, onde alguns economistas procuram chamar a atenção para os efeitos da distribuição da renda sobre a determinação da propensão a poupar da economia. O presente estudo procurará examinar a influência da distribuição da renda sobre a estrutura da demanda de bens finais. Ao mesmo tempo, se preocupa com fenômenos concretos, tais como os problemas de desemprego e subemprego urbano em países menos desenvolvidos. Muito embora as taxas de crescimento demográfico nesses países sejam altas, as taxas de expansão da população urbana tendem a ser ainda maiores. Disto resulta uma crescente oferta de mão-de-obra nas áreas urbanas, o que, em última análise, representa uma demanda de renda. Desde que a maioria desses países adotem estratégias de industrialização visando ao crescimento, espera-se que o setor manufatureiro gere um número suficiente de empregos. Não obstante, não parece ser isto o que vem ocorrendo, e como notam Baer e Hervé — “In the first half of the 1960’s a note of concern bordering on disillusionment could be observed among the most ardent industrialization advocates. The dynamic sector of the economy was not absorbing labor at a satisfactory rate”.¹

* Da Universidade Católica de Lima, Peru.

¹ W. Baer e M. Hervé, “Employment and Industrialization in Developing Countries”, *Quarterly Journal of Economics*, (fev., 1966), pp. 88-89.

Em consequência desse fracasso, tem-se observado uma crescente alocação de mão-de-obra a atividades de baixa produtividade.

Dois explicações correntes para os níveis de emprego industrial relativamente baixos podem ser resumidas nos seguintes termos: 1) existência de imperfeições no mercado de trabalho, as quais mantêm artificialmente altos os salários industriais; 2) adoção de técnicas relativamente intensivas em capital, uma vez que grande parte da maquinaria é importada, não havendo possibilidade para substituição técnica entre mão-de-obra e capital, o que também pode ocorrer em consequência das próprias imperfeições do mercado de trabalho.

O presente trabalho procura explorar a possibilidade de que a taxa do emprego industrial seja também influenciada por uma variável até agora negligenciada ou, pelo menos, não suficientemente enfatizada: *a estrutura da demanda*. A associação entre a estrutura da demanda de bens finais e demanda de mão-de-obra na indústria pode ser comprovada utilizando-se o conhecido instrumental teórico malthusiano, ou seja, através de *análise da demanda derivada*. Assim como já se mencionou a conexão existente entre a estrutura da demanda e a distribuição da renda, chega-se, conquanto de maneira ainda intuitiva, à hipótese de que o emprego depende da distribuição da renda. As seções que se seguem desenvolvem um estudo sistemático dessa relação funcional.

1. Análise da demanda derivada

Nessas discussões teóricas, os consumidores demandam bens finais. A teoria do consumidor procura então explicar as razões pelas quais estes preferem certas combinações de bens e não outras. Em seguida, análises estático-comparativas são desenvolvidas a fim de explicar os efeitos-renda, efeito-preço, elasticidades, e assim por diante. A demanda de bens finais, contudo, é na realidade uma demanda dos elementos usados para produzi-los. A demanda de mesas é a demanda de madeira, pregos, parafusos, serviços do marceneiro, serviços de serraria, etc. Tem-se assim ilustrado de maneira simplista o conceito de *demanda derivada*, isto é, demanda de madeira, pregos, etc.

O problema consiste então em saber o que acontece à demanda derivada quando a demanda final varia e será este precisamente o primeiro objetivo do modelo apresentado na seção abaixo. Cumprido esse objetivo, podem ser formuladas as questões de estática-comparativa, tal como se faz na teoria da demanda direta.

Parece conveniente, contudo, fazer algumas observações antes de passar ao modelo. As matérias-primas, incluindo os recursos naturais, contidas nos produtos são igualmente produzidas com a ajuda de outras matérias-primas, mão-de-obra e máquinas. Estas últimas matérias-primas, por sua vez, são constituídas de outras matérias-primas, mão-de-obra e máquinas. Em conseqüência, intuitivamente, percebe-se que todos os produtos finais são elaborados, em última instância, com a ajuda de fatores “não-produzidos” — mão-de-obra e capital — ou, em outras palavras, todos os produtos finais contêm apenas dois fatores: capital e mão-de-obra. Em uma visão marxista, todos os produtos conteriam apenas o elemento trabalho, de vez que o capital é considerado “trabalho incorporado”.

A conseqüência de toda essa discussão é que uma cesta de bens, comprada por uma unidade consumidora, contém determinadas quantidades de mão-de-obra e capital. Ou, em outras palavras, o que o consumidor concretamente adquire são quantidades de mão-de-obra e de serviços do capital.

2. Um modelo simples de demanda derivada de mão-de-obra

O modelo começa por distinguir os bens de consumo produzidos no setor manufatureiro da economia em dois subsetores: as indústrias de bens X e Y. A maneira como essas indústrias serão definidas será explicada em seguida. Suponham-se dois fatores homogêneos de produção:²

² Supõe-se, nesta altura, que todas as indústrias são verticalmente integradas a fim de simplificar a argumentação. Mais adiante, abandonar-se-á tal suposição. Admite-se não existirem produtos conjuntos, de modo a dar à indústria um conceito bem definido.

Capital (K) e mão-de-obra (L). A hipótese de mão-de-obra homogênea parte de idéia consubstanciada em conhecido teorema de Hicks³ sobre bens compostos: bens com preços relativos constantes podem ser tratados com um único bem homogêneo. Em conseqüência, supõe-se que os salários relativos dos diferentes tipos de trabalho não apresentam grandes variações, focalizando-se a atenção sobre o emprego global e não sobre sua composição.

Supõe-se, ainda, que capital e trabalho figuram em proporções fixas e com rendimentos constantes de escala na produção de X e Y. A comprovação de coeficientes técnicos constantes pode resultar ou da suposição de preços fixos dos fatores associados à tecnologia de coeficientes variáveis ou de uma tecnologia com coeficientes técnicos constantes. Analiticamente, ambas se equivalem.⁴

No lado da demanda, supõem-se duas classes de consumidores: a de alta renda (capitalista) e a de baixa renda (trabalhadores).

Estudos de orçamentos familiares indicam que a propensão média a consumir (denominada também de *pesos de consumo*) declina com a renda nos casos de alguns bens e aumenta em outros, o que implica uma elasticidade de renda menor do que *um* para o primeiro tipo de bens e maior do que *um* no segundo tipo.⁵

³ J. R. Hicks, *Value and Capital*, (2.^a ed., Londres: Oxford University Press, 1946), p. 33. Nesse trabalho consta a seguinte proposição: se as variações nos salários relativos podem ser negligenciadas, é legítimo supor que toda mão-de-obra é homogênea.

⁴ Empiricamente parece ser o caso da segunda alternativa. Ver C. Clague, "Capital-Labor Substitution in Manufacturing in Developing Countries", *Econometrica*, vol. XXXVII, (julho de 1969), onde são apresentadas elasticidades de substituição surpreendentemente baixas em onze indústrias manufatureiras do Peru.

⁵ A prova é simples:

$$\frac{\partial}{\partial I} \left(\frac{P_1 Q_1}{I} \right) = \frac{P_1 Q_1}{I^2} \left(\frac{\partial Q_1}{\partial I} \cdot \frac{I}{Q_1} \right) - 1$$

onde P = preço, Q = quantidade consumida e I = renda.

Daí, a propensão média a consumir declina (aumenta) se e somente se a elasticidade-renda for menor (maior) do que *um*.

Denominemos de Y o bem industrial de elasticidade-renda menor que um e de X o segundo tipo, cuja elasticidade é superior a um . Ao fato de que a propensão média a consumir o bem Y declina com a renda, acrescentar-se-á a suposição de que declina também a propensão marginal. Similarmente, supõe-se que a propensão marginal para consumir o bem X aumenta com a renda.

Essas suposições sobre as curvas de Engel equivalem a dizer que os capitalistas e trabalhadores consomem X e Y em proporções diferentes, ou ainda, que a proporção do bem Y sobre o bem X consumida pelos trabalhadores é maior do que a proporção de Y sobre X consumida pelos capitalistas. Y é denominado *bem essencial* e X , *bem de luxo*.

No lado da oferta, admite-se que a curva de oferta a longo prazo de cada produto seja perfeitamente elástica, com rendimentos constantes de escala e ausência de economias externas — pelo menos pecuniárias — uma vez que não ocorre situação de pleno-emprego. Samuelson chamou a atenção para a necessidade de supor-se livre ingresso na indústria, a fim de que tal situação se concretize. Esta hipótese é feita com a finalidade de excluir os efeitos-preço.⁶

O funcionamento do modelo pode ser analisado graficamente. A Figura 1 mostra uma situação inicial onde um “capitalista” consome bens X e Y na proporção dada por Ot , enquanto que um “trabalhador” os consome numa proporção dada por Ov . Admitindo que todos os demais capitalistas sejam iguais, o mesmo acontecendo com os trabalhadores, obtém-se a demanda total dos trabalhadores OV multiplicando o vetor Ov por n_1 (sendo n_1 o número de trabalhadores); e a demanda total dos capitalistas OT , multiplicando Ot por n_2 , o número de capitalistas. As linhas WW e RR representam os totais de gastos de trabalhadores e capitalistas, respectivamente, com bens manufaturados. Embora os capitalistas sejam individualmente mais ricos que os trabalhadores, os gastos totais podem mostrar uma situação inversa — conforme demonstrado na Figura 1 — caso o número de trabalhadores seja sufi-

⁶ P. A. Samuelson, *Foundations of Economic Analysis*, (Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1947), p. 87.

cientemente grande. A demanda agregada é finalmente obtida pela adição dos vetores OV e OT e é igual a (X_0, Y_0) . A linha CC é agora a despesa total agregada, com bens manufaturados.

As quantidades (X_0, Y_0) podem ser também representadas no setor de produção. Na Figura 2, O_x e O_y representam as combinações eficientes de fatores para as indústrias X e Y , respectivamente. O total de trabalho empregado no setor manufatureiro é obtido analogamente por adição de vetores na Figura 2 e é igual a OL_0 .

A fim de demonstrar a influência da redistribuição da renda sobre o emprego, suponha-se uma distribuição diferente da mesma renda total, onde a participação dos trabalhadores aumenta e a dos capitalistas diminui. Considerem-se, então, as novas retas de despesas $W'W'$ e $R'R'$ na Figura 1. Note-se que os preços relativos de X e Y não mudaram com a redistribuição devido à hipótese de oferta perfeitamente elástica.⁷

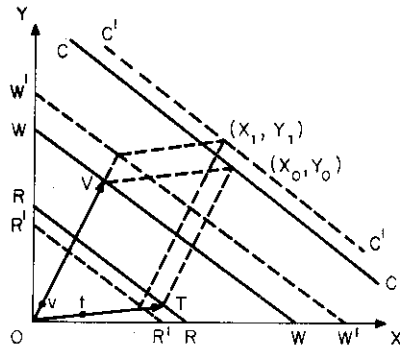


Fig. 1

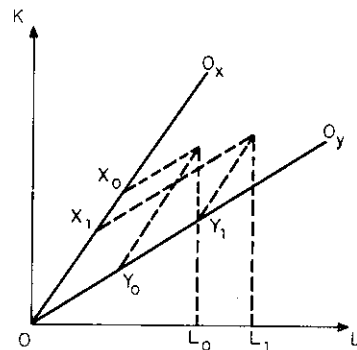


Fig. 2

A nova estrutura de demanda para cada classe de consumidor dependerá, por conseguinte, tão-somente do efeito-renda, o qual pode ser decomposto em duas partes: o efeito de uma variação na renda sobre os gastos com produtos manufaturados (propensão a consumir produtos manufaturados) e de uma variação nas quan-

⁷ O mecanismo de redistribuição não é aqui especificado, mas deve ser de forma a não mudar os preços relativos.

tidades demandadas, devido à nova linha de despesa, isto é, às mudanças na magnitude e direção dos vetores na Figura 1.

Suponha-se, apenas para efeitos ilustrativos, que a nova cesta de bens demandados — e produzidos — seja (X_1, Y_1) , na Figura 1, onde há mais demanda de Y e menos de X . Na Figura 2, o emprego na indústria aumenta para OL_1 . Esse resultado, porém, não deverá necessariamente ocorrer, conforme se pode ver na figura.

Isto sugere a necessidade de se expandir o modelo, a fim de verificar em que condições a redistribuição da renda determina o aumento do emprego industrial. Para tanto, parte-se da identidade:

$$L = L_x + L_y \quad (1)$$

onde L é a mão-de-obra total empregada no setor manufatureiro; L_x é a mão-de-obra empregada na produção de X ; e L_y , na produção de Y . Mão-de-obra pode significar *estoque* (homens) ou *serviços* (homens-hora/ano), desde que se conheça a composição desses homens-hora, isto é, “tantos homens trabalhando tantas horas”. Seja homens/hora a unidade escolhida.

Admitindo-se coeficientes técnicos constantes, pode-se então escrever:

$$\begin{aligned} L_x &= a X \\ L_y &= b Y \end{aligned} \quad (2)$$

onde a e b são coeficientes fixos trabalho-produto e L_x e L_y são “variáveis-fluxo” (número de turnos/ano). Note-se que a diferença entre a e b não significa uma diferença de intensidade de fatores, uma vez que X e Y são medidos em unidades físicas.

Utilizando (2), a identidade (1) é transformada em uma relação teórica:

$$L = a X + b Y \quad (3)$$

Seguem-se duas outras identidades:

$$\begin{aligned} X &\equiv X_w + X_r \\ Y &\equiv Y_w + Y_r \end{aligned} \quad (4)$$

as quais mostram a distribuição do total produzido segundo quantidades demandadas por trabalhadores e capitalistas. Sem dúvida, estamos admitindo aqui que a produção e consumo sejam iguais. São abstraídas quaisquer variações de estoques. Além disso, bens competitivos importados são considerados como bens distintos, e X e Y não são exportados.

As funções de demanda para cada bem, pelos dois grupos de consumidores, são especificadas como se seguem:

$$\begin{aligned} X_w &= f (P ; W) \\ X_r &= g (P ; R) \\ Y_w &= h (P ; W) \\ Y_r &= j (P ; R) \end{aligned} \quad (5)$$

onde P representa o vetor de preços dos produtos; W é a renda dos trabalhadores; e R a renda dos capitalistas (em unidades monetárias/ano). Supõe-se que as preferências e a renda individual dentro de cada classe sejam muito semelhantes, de forma a se desprezar possíveis diferenças intraclasses.

A terceira identidade é dada pelo nível da renda nacional:

$$I \equiv W + R \quad (6)$$

Expressando (4) como

$$X = f (P;W) + g (P;R) = F (P;W; R). \quad (7)$$

e considerando (6) nessa expressão, pode-se escrever

$$X = G (P;I; W/R) \quad (8)$$

Como tal especificação, levam-se em conta todas as variáveis que a teoria econômica recomenda considerar como explícitas, quando da demanda agregada de um produto.

Quais as características da função G ? É conveniente recordar algumas das principais propriedades das funções individuais de demanda, derivadas da teoria da utilidade. Samuelson e outros provaram pelo menos três propriedades:⁸

⁸ Samuelson, *Foundations*, Cap. V.

- 1) f e g são independentes do índice de utilidade empregado;
- 2) f e g são funções unívocas;
- 3) f e g são homogêneas do grau zero em preços e renda.

Sendo G uma soma das funções f e g , a propriedade (1) é verificada para a função de demanda agregada (8). No tocante à propriedade (3), seria necessário uma reformulação da seguinte maneira: *G será homogênea do grau zero desde que a distribuição da renda permaneça constante:*

$$G (P;I; W/R) = F (\lambda P; \lambda I; \lambda W/ \lambda R) \quad (9)$$

Isto é, se todos os preços e também a Renda Nacional aumentam em 10%, as quantidades demandadas não se alteram se cada consumidor obtiver o mesmo aumento de renda de 10%, visto que nesse caso as demandas individuais não se alteram, nem a agregada.

Um novo aspecto surge em conexão com a função G . De acordo com a propriedade (2), as funções f e g são unívocas, isto é, a qualquer conjunto de preços e renda monetária corresponde um *único* valor das quantidades demandadas. Em G , a questão consiste em saber se, especificando-se um conjunto de preços, renda nacional e distribuição de renda, o valor de X será igualmente único. Em outras palavras, se dados P e I , seria possível encontrar:

$$G (P;I; W/R) = G (P;I; W'/R') \quad (10)$$

onde

$$\frac{W}{R} \neq \frac{W'}{R'}$$

A idéia consiste em verificar, alternativamente, em que condições uma mudança na distribuição da renda não alteraria a demanda de um produto. Tomando-se a diferencial total, no caso do bem X , obtém-se:

$$dX_w + dX_r = 0$$

o que significa dizer que a demanda total de X não se altera. De (5) obtém-se:

$$\frac{\partial X_w}{\partial W} dW + \frac{\partial X_r}{\partial R} dR = 0$$

Donde,

$$\left(\frac{\partial X_w}{\partial W} - \frac{\partial X_r}{\partial R} \right) dW = 0$$

desde que $dW = -dR$, uma vez que o nível da renda se mantém constante. Por conseguinte, se as propensões marginais a consumir forem idênticas para todos os grupos de consumidores, isto é, se $\partial X_w/\partial W = \partial X_r/\partial R$, uma redistribuição da renda não altera a quantidade total demandada. Portanto, nesse caso, a variável de distribuição da renda na função G não proporcionaria um valor único para X .

Este resultado é intuitivamente óbvio. Se se retira um dólar de uma pessoa e se dá a outra, a demanda total não mudará se esta última pessoa, de posse deste dólar adicional, aumentar a sua demanda individual em, digamos, duas unidades, enquanto a primeira, com um dólar a menos, reduzir a sua demanda em duas unidades, isto é, se as duas propensões marginais a consumir forem iguais.

Para que as quantidades demandadas de X e Y permaneçam constantes quando de uma redistribuição da renda, as propensões marginais a consumir X e Y devem ser iguais para trabalhadores e capitalistas, situação esta eliminada pela hipótese anteriormente adotada com respeito às curvas de Engel. Desse modo, G , é também uma função *única* com respeito a W/R .

No Apêndice A, postulam-se condições mais gerais para a univocidade dessa relação, incluindo-se considerações quanto ao número de classes consumidoras e número de bens. A solução lembra o fato de que, em um sistema keynesiano, duas classes de renda determinam totalmente o consumo agregado (a menos que a propensão marginal a consumir seja igual para ambas as classes em todos os níveis de renda). Neste caso, o governo poderá não optar

por uma ação redistributiva a fim de mudar o nível do consumo agregado.

Similarmente, para o bem Y obtém-se a função de demanda agregada como:

$$Y = J (P;I; W/R). \quad (11)$$

Voltando à equação (3), e substituindo X em (8) e Y em (11), tem-se:

$$\begin{aligned} L &= aG(P;I; W/R) + bJ(P;I; W/R) \\ L &= L (P;I; W/R) \end{aligned} \quad (12)$$

que resumem as relações funcionais entre as variáveis relevantes do modelo. Como (12) leva em consideração todas as variáveis que afetam a demanda de um bem, e como consequência da ausência de efeito-preço e do fato da função de produção apresentar coeficientes técnicos constantes, o nível da demanda determina o nível da produção e da mão-de-obra empregada. Destarte, P , I e W/R são variáveis exógenas ao modelo.

Uma formulação mais geral da relação (12) incluiria a e b como variáveis, dependendo dos preços dos fatores.⁹ Teoricamente, isto pouco importa para o modelo, desde que os preços dos fatores sejam considerados constantes. Neste caso, embora a substituição técnica entre fatores seja possível, o sistema funciona como se existisse uma única técnica de produção disponível. As demais técnicas alternativas jamais seriam usadas.

3. O efeito-renda

Da cesta de bens que o consumidor adquire com um dado nível de renda, podemos separar as mercadorias produzidas pelo setor

⁹ As regras marshallianas clássicas de elasticidade da demanda derivada referem-se precisamente à mudança na demanda derivada de um fator quando seu preço varia. A. Marshall, *Principles*, p. 853. Ver também A. C. Pigou, *The Economics of Welfare*, (Londres: Macmillan Co., 1948), pp. 259-262. J. R. Hicks, *The Theory of Wages*, (New York: St. Martin's Press, 1968), pp. 241-246.

manufatureiro da economia. Esse subconjunto contém, conforme sabemos, determinado volume de mão-de-obra. Em consequência, no que se refere ao consumidor, sua demanda total derivada de mão-de-obra pode ser expressa da seguinte maneira:

$$L_i = a X_i + b Y_i = \varphi (I_i) \quad (13)$$

a transformada φ leva em consideração o fato de que o volume de X e Y adquirido depende — entre outras variáveis — de sua renda monetária. A função φ não possui subíndice porque se supõe a mesma função para todos os consumidores. Em termos mais exatos, os consumidores compram diferentes quantidades de bens, porém, admite-se que se todos percebessem a mesma renda adquiririam bens em quantidades iguais.¹⁰

A questão agora é verificar o que ocorre com a *demanda derivada* de mão-de-obra à medida que aumenta a renda monetária do consumidor, isto é, procura-se determinar o sinal algébrico da expressão:

$$\frac{\partial L_i}{\partial I_i} = a \frac{\partial X_i}{\partial I_i} + b \frac{\partial Y_i}{\partial I_i} \quad (14)$$

Onde as derivadas parciais indicam que todas as demais variáveis relevantes que explicam as preferências dos consumidores (preços, gostos) são mantidas constantes.

Evidentemente, a expressão (14) será positiva. O caso de bens inferiores não aparece no tratamento dado aos bens X e Y uma vez que ambos são bens agregados, eliminando, portanto, possíveis diferenças de qualidade. Nessas condições, a demanda derivada de mão-de-obra industrial tem um efeito-renda positivo.

A questão seguinte consiste em investigar a forma da função φ . A segunda derivada é igual a:

$$\varphi'' (I_i) = a \frac{\partial^2 X_i}{\partial I_i^2} + b \frac{\partial^2 Y_i}{\partial I_i^2} \quad \dots \dots \dots$$

¹⁰ Ou, como diz o famoso argumento de Hemingway: a diferença entre um rico e um pobre é que o primeiro “tem mais dinheiro”.

Das hipóteses sobre as curvas de Engel, sabe-se que a segunda derivada de X é positiva e a de Y negativa. Resulta então que o primeiro termo de (15) deverá ser positivo e o segundo negativo, significando dizer que φ terá valores positivos e negativos e um ponto de inflexão.

No Apêndice B, é apresentada a prova da *existência* de um ponto de inflexão quando se supõe que X e Y possuem elasticidades-renda constantes. As funções de demanda com elasticidades-renda constantes revelam-se particularmente consistentes com as nossas hipóteses sobre as curvas de Engel.

Sejam α e β as elasticidades-renda de X e Y , respectivamente. Nesse caso, supõem-se implicitamente funções da forma:

$$\begin{aligned} X_i &= AI_i^\alpha \\ Y_i &= BI_i^\beta \end{aligned} \quad (16)$$

onde $\alpha > 1$ e $0 < \beta < 1$

e onde A e B são constantes. A equação de demanda de mão-de-obra pode ser escrita como:

$$L_i = aAI_i^\alpha + bBI_i^\beta = \varphi(I_i) \quad (13a)$$

O ponto de inflexão será definido para um valor de I_i igual a:

$$I_{i^0} = \left[\frac{b B \beta (I - \beta)}{a X \alpha (\alpha - 1)} \right] \frac{I}{\alpha - \beta} \quad (15a)$$

mostrando que o ponto de inflexão depende dos coeficientes de mão-de-obra e das elasticidades-renda.

A Figura 3 representa a função φ . Em primeiro lugar, as curvas de Engel de X e Y são transformadas em unidades de trabalho, multiplicando-as pelas constantes a e b . Em seguida, a função φ é calculada somando-se verticalmente as quantidades de mão-de-obra assim obtidas. As formas de aX e bY pressupõem elasticidades-renda constantes.¹¹ A função φ é denominada *função de demanda derivada*, ou simplesmente *função φ* .

¹¹ A hipótese de elasticidades-renda constantes é condição suficiente para obter-se a função φ na forma de um S invertido.

A Figura 4 mostra as inclinações das três curvas da Figura 3. A linha pontilhada representa os valores da tangente de φ e indica o ponto mínimo em I_2^i , que é também o ponto de inflexão de φ .

4. O efeito-redistribuição

Para um dado nível de renda nacional, considera-se em (12) o efeito de uma mudança na distribuição da renda sob o emprego. Suponha-se que I_1 e I_2 representem as rendas de um trabalhador e de um capitalista, respectivamente. O "efeito de redistribuição da renda" para um bem depende das propensões marginais a consumir do montante de renda transferida. Destarte, pode-se analisar este efeito sobre a demanda do bem X tomando a diferencial total de (4), isto é:

$$dX = \frac{\partial x_1}{\partial I_1} dW + \frac{\partial x_2}{\partial I_2} dR = \left(\frac{\partial x_1}{\partial I_2} - \frac{\partial x_2}{\partial I_2} \right) dW \quad (17)$$

onde $\partial X_i / \partial I_1$ é a propensão marginal a consumir X do consumidor i e $dW = -dR$ uma vez que se considera constante o nível da renda nacional. O montante adicional de renda obtido por consumidor é irrelevante, uma vez que os trabalhadores têm iguais propensões marginais a consumir. O mesmo argumento aplica-se aos capitalistas. Analogamente, o efeito-distribuição sobre o consumidor de Y é expresso por:

$$dY = \left(\frac{\partial Y_1}{\partial I_1} - \frac{\partial Y_2}{\partial I_2} \right) dW. \quad (18)$$

Substituindo (17) e (18) na diferencial de (3) tem-se:

$$dL = adX + bdY = \left[a \left(\frac{\partial X_1}{\partial I_1} - \frac{\partial X_2}{\partial I_2} \right) + b \left(\frac{\partial Y_1}{\partial I_1} - \frac{\partial Y_2}{\partial I_2} \right) \right] dW. \quad (19)$$

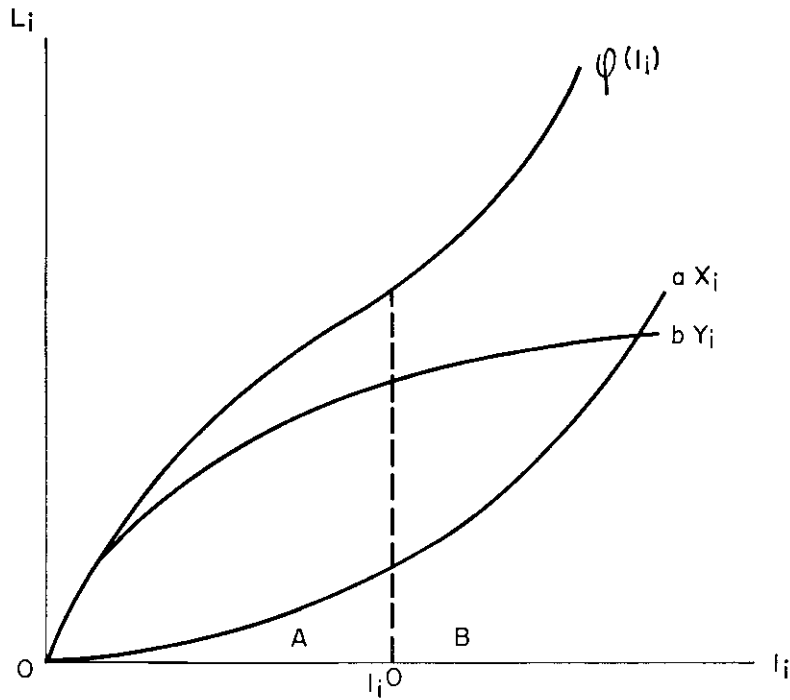


Fig. 3

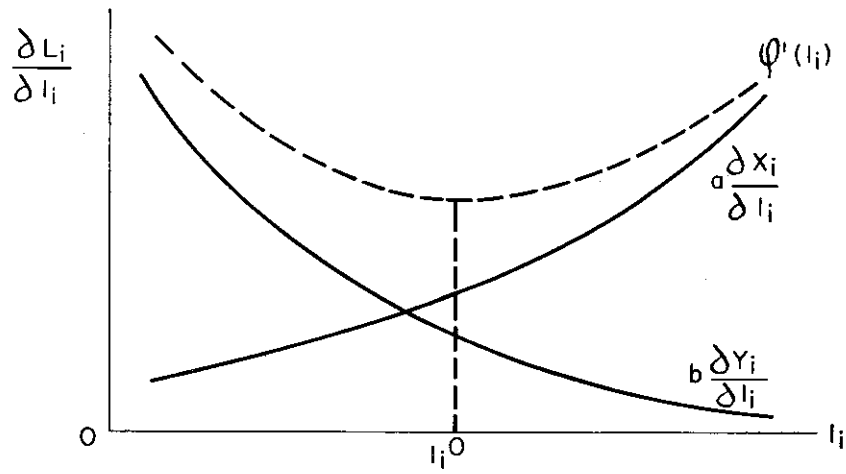


Fig. 4

Em conseqüência, o que se mostra realmente relevante para o sinal de dL é o “conteúdo de trabalho” em cada produto — a e b — e as propensões marginais a consumir. Evidentemente, a condição necessária para que uma redistribuição de renda determine uma mudança na demanda derivada de mão-de-obra é que as propensões marginais a consumir dos capitalistas e dos trabalhadores sejam diferentes pelo menos para um bem.

Pode-se, agora, estabelecer facilmente a veracidade da proposição de que o efeito da redistribuição de renda sobre a demanda derivada de mão-de-obra depende das inclinações da função φ e do montante da renda transferida. Dando nova forma à expressão entre colchetes em (19), obtém-se:

$$dL = \varphi'(I_1) - \varphi'(I_2) \quad dW. \quad (20)$$

Da propriedade da função φ aqui postulada segue-se que qualquer transferência de renda na região A (da Figura 3) em favor dos pobres deverá aumentar a demanda de mão-de-obra, ao passo que na região B uma melhoria na distribuição da renda a reduzirá. Porém, o que deverá acontecer no caso de uma transferência de B para A ? Mesmo neste caso, o princípio conserva-se o mesmo: é preciso examinar as diferenças nas inclinações.

5. A demanda derivada de capital

Até agora, o interesse desse estudo restringiu-se à demanda derivada de mão-de-obra. Contudo, toda a análise anterior pode ser estendida para o caso de demanda derivada de capital, sendo desnecessário repeti-la.

Suponha-se que a redistribuição da renda aumente a demanda derivada de mão-de-obra industrial. Qual será, neste caso, o volume de capital necessário? Dependerá da intensidade de uso dos fatores? A opinião amplamente difundida de que a indústria relativamente intensiva de mão-de-obra deve expandir-se, caso se deseje obter um aumento do emprego, pressupõe um estoque de capital

(\bar{K}) constante e *plenamente utilizado* durante todo o tempo. Matematicamente, as alocações de capital e mão-de-obra seriam as seguintes:

$$\begin{aligned} L &= L_x + L_y \\ \bar{K} &= K_x + K_y \end{aligned} \quad (21)$$

Podendo-se escrever que:

$$L = \frac{L_x}{K_x} K_x + \frac{L_y}{K_y} K_y \quad (21a)$$

tomando o diferencial de L obtém-se:

$$dL = \frac{L_x}{K_x} dK_x + \frac{L_y}{K_y} dK_y$$

ou

$$dL = \left(\frac{L_x}{K_x} - \frac{L_y}{K_y} \right) dK_x \quad (22)$$

onde $dK_x = -dK_y$ uma vez que \bar{K} é constante. Evidentemente, neste caso o emprego cresceria se e somente se as indústrias mais intensivas em mão-de-obra se expandissem.

Entretanto, o capital, no sentido aqui considerado (máquinas-hora), não é plenamente utilizado nos países em desenvolvimento. Em consequência, no modelo acima, as intensidades de uso dos fatores não implicam condição necessária nem suficiente para aumentar o emprego industrial.

No setor industrial, observam-se geralmente dois tipos de subutilização da capacidade instalada. O primeiro refere-se à intensidade no uso das unidades de máquinas e isto ocorre quando existe *divisibilidade* dos bens de capital. Os dados estatísticos demonstram que esse tipo de ociosidade efetivamente ocorre nos países subdesenvolvidos. Em consequência, se houver aumento de demanda de um produto e, portanto, necessidade de maior volume de mão-de-obra, a entrada em operação de *mais máquinas* já disponíveis resolveria o problema da necessidade de capital. Além disso, a suposição de coeficientes técnicos constantes permite julgar que

a relação trabalho-produto será mantida constante, mesmo neste caso. Embora essa solução possa ser criticada como uma solução de curto prazo, o fato é que as informações sobre excesso de capacidade sugerem que deverá decorrer ainda algum tempo antes que essa capacidade seja plenamente utilizada.

O segundo tipo de subutilização é peculiar ao processo manufatureiro e ocorre nos casos em que uma fábrica pode funcionar ininterruptamente. O processo na fábrica é um processo de produção em linha ¹² e pode ser colocado em funcionamento em qualquer ocasião e com qualquer duração, o que certamente não seria possível em atividades agrícolas.

Evidentemente, *mais horas de trabalho ou turmas adicionais* implicam um maior produto por dia ou por ano. Significa também mais máquinas-horas com o número de máquinas mantido constante, isto é, mantido o mesmo estoque de capital. No caso da mão-de-obra, significa não só mais homens-horas, como também maior número de pessoas empregadas, uma vez que são admitidos novos grupos de operários para os turnos adicionais. Em consequência, torna-se possível, com o mesmo estoque, aumentar os *serviços* de capital. Aumentadas as horas de trabalho com mais um turno, duplicam-se as máquinas-horas, homens-horas e, também, o produto. Esse fato resulta de se considerar o processo manufatureiro como um processo contínuo, com uma função de produção homogênea de grau *um* em relação ao *tempo*. ¹³

Essas considerações mostram que, se duplicássemos a demanda, então pela duplicação do tempo de funcionamento da fábrica produziríamos o dobro do produto e o emprego também duplicaria, mantendo constante o estoque de máquinas. Evidentemente, a relação trabalho-produto ficaria inalterada apesar do aumento do número de turnos.

¹² Este conceito é o que aparece no trabalho de N. Georgescu-Roegen, "The Economics of Production", *The American Economic Review*, Vol. LX, n.º 2, (maio 1970), p. 6.

¹³ *Ibid.*

6. O sistema de Leontief em uma economia aberta e o conceito de conteúdo de trabalho dos bens

A hipótese de indústrias verticalmente integradas é agora abandonada, de modo a que se possa analisar o caso dos bens intermediários. Com esse objetivo, introduzimos o sistema de Leontief no modelo. Além disso, impõe-se considerar o comércio exterior. O conceito de conteúdo de trabalho dos bens, aqui utilizado, não inclui o trabalho incorporado em máquinas e ferramentas. Conforme dito anteriormente, foram considerados dois fatores não-produtos: o capital e a mão-de-obra.

Não obstante, pode-se argumentar que independentemente daquela hipótese, os bens de capital não incorporam mão-de-obra doméstica (ou interna), uma vez que são, em grande parte, importados pelos países em desenvolvimento. Aparentemente, o mesmo argumento se aplica à importação de bens intermediários e de consumo, que tampouco empregam mão-de-obra doméstica. Neste caso, estaríamos inclinados a pensar que uma redistribuição da renda em favor dos grupos de baixo poder aquisitivo diminuiria o volume total das importações, devido à alta propensão marginal a importar das classes superiores da renda e ao fato dos bens importados não absorverem qualquer trabalho doméstico. Toda e qualquer transferência de renda nessa direção aumentaria o emprego.

Contudo, o tratamento aqui dispensado ao conteúdo de trabalho nas importações será totalmente diferente. De certa maneira, todos os argumentos previamente alinhados deixaram de considerar algumas relações econômicas básicas; uma economia precisa comerciar a fim de adquirir importações e o comércio implica a necessidade de exportar. Se a demanda de um rádio importado significa uma demanda de dez dólares — o valor do rádio — e se cada dólar de exportações contém cinco homens-hora, então a mão-de-obra doméstica incorporada em um rádio importado é de cinquenta homens-horas.

A função de demanda dos bens de consumo importados (Z) pode ser especificada seguindo-se a mesma argumentação utilizada para os bens de luxo (X) e essenciais (Y). Deste modo, pode-se escrever:

$$Z = Z (P; I; W/R) \quad (6a)$$

onde P também inclui o preço do bem importado Z .

No sistema de Leontief para uma economia com comércio exterior, encontram-se alguns problemas de identificação de indústrias. O próprio Leontief¹⁴ estudou vários casos de alocação de importações e de definição da demanda final. À luz da presente discussão sobre o conteúdo de trabalho das importações, procuraremos seguir Leontief: *o comércio exterior será considerado como uma indústria em separado, onde as importações representam o seu produto e as exportações os seus insumos.*

Assim, se existem $m-1$ indústrias na economia, acrescenta-se a m -ésima, a qual representa o setor externo. Associe-mos, também, os setores 1 e 2 com as indústrias X e Y , respectivamente. O sistema de Leontief pode, então, ser escrito como:

$$X_i = \sum_{j=1}^m a_{ij} X_j + Y_i ; i = 1, \dots, m \quad (23)$$

$$X_L = \sum_{j=1}^m a_{Lj} X_j \quad (24)$$

onde X_i representa o produto bruto anual do bem i ; a_{ij} o insumo do bem i requerido por unidade do bem j ; e Y_i a demanda final do bem i . X_L refere-se à mão-de-obra e a_{Lj} à utilização direta de mão-de-obra por unidade do bem j . O setor externo é interpretado da seguinte maneira: X_m é a quantidade de importações, ao passo que X_{1m} ($i = 1, \dots, m$) é a quantidade exportada do bem i . A idéia de que um país, a fim de importar, precisa exportar, pode ser expressa através da seguinte função de produção:

$$X_m = \theta (X_{1m}, X_{2m}, \dots, X_{mm}) \quad (25)$$

¹⁴ Wassily Leontief, *The Structure of the American Economy, 1919-1939*, (New York: Oxford University Press, 1951), pp. 163-178.

Obviamente, $X_{mm} = 0$ e $X_{Lm} = 0$, de modo que não aparecem como um argumento na função θ . Com relação aos coeficientes técnicos a_{lm} Leontief afirma que “each... show the amount of exports of (good i)... required – according to the prevailing conditions on the world markets – to produce, i.e., to obtain one unit of imports. In the older, now unfashionable, terminology, the amounts of commodities and services which a country has to export in order to secure a unit of imports (the aim coefficients) were referred to as its “terms of foreign trade”.¹⁵

Esses coeficientes, entretanto, não precisam ser tecnicamente determinados, pelo menos no que concerne ao setor manufatureiro. Das considerações acima, relativas à subutilização do capital,¹⁶ pode-se considerar a mão-de-obra como o único fator não-produzido. Acrescentando-se ainda as hipóteses de rendimentos constantes de escala, ausência de externalidades e inexistência de produtos conjuntos, reúnem-se todos os pressupostos necessários à aplicação do teorema Georgescu-Samuelson relativo ao sistema de Leontief.¹⁷ Embora haja possibilidades de substituição tecnológica, o comportamento de mercado determina a utilização de apenas uma técnica de produção, a única observada, e os preços relativos dos bens finais permanecem constantes (o que é consistente com a suposição inicial de preços dados).

Pode-se expressar o sistema (23) em notação matricial; denominando de \tilde{X} o vetor produto, de \tilde{Y} o vetor demanda final e de $(I - A)$ a matriz de Leontief, pode-se escrever (23) como:

$$(I - A) \tilde{X} = \tilde{Y} \quad (23a)$$

¹⁵ Leontief, *op. cit.*, p. 169.

¹⁶ A mão-de-obra é subutilizada em outros setores da economia, mas não na indústria manufatureira. Em vista disto, a altura da curva de possibilidades de produção das indústrias X e Y é dada pelo nível da demanda. Esta curva será linear, conforme se argumenta abaixo.

¹⁷ P. A. Samuelson, “Abstract of a Theorem Concerning Substitutability in Open Leontief Models” e N. Georgescu-Roegen, “Some Properties of a Generalized Leontief Model”, em *Activity Analysis of Production and Allocation*, editado por T. C. Koopmans, Cap. VII e X, (New York: Wiley & Sons, 1951).

A equação de mão-de-obra toma a forma:

$$X_L = A_L \tilde{X} \quad (24a)$$

onde (A_L) é o vetor dos coeficientes de utilização direta da mão-de-obra.

Resolvendo o sistema (23a), obtém-se:

$$\tilde{X}^o = B\tilde{Y} \quad (26)$$

onde $B \equiv (I - A)^{-1}$

Admite-se a existência de solução para o sistema e que a inversa $(I - A)^{-1}$ realmente exista.

É de interesse analisar o aumento do volume de emprego em certos grupos de indústria e o conceito de necessidades de mão-de-obra parece adequado para esse fim. Neste estudo, a questão que se coloca é a seguinte: se aumenta a demanda final de um bem manufaturado, de quanto variará o emprego no setor manufatureiro?

Essa pergunta pode ser respondida mediante a partição da equação matricial (26). A primeira partição será ditada pelas duas indústrias pertencentes ao setor manufatureiro; a segunda por todas as indústrias não manufatureiras; e a terceira incluirá o setor externo. Então de (26) obtém-se:

$$\begin{bmatrix} X_a^o \\ X_b^o \\ X_m^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{aa} & B_{ab} & B_{am} \\ B_{ba} & B_{bb} & B_{bm} \\ B_{ma} & B_{mb} & B_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_a \\ Y_b \\ Y_m \end{bmatrix} \quad (26a)$$

onde X_a , X_b , e X_m representam o produto dos setores manufatureiro, não-manufatureiro e externo, respectivamente.

Substituindo a solução do sistema de Leontief — expressa na forma de partição — em (24a), tem-se:

$$X_i^o = \begin{bmatrix} A_{La} & A_{Lb} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_a^o \\ X_b^o \\ X_m^o \end{bmatrix} \quad (27)$$

e, utilizando (26a), resulta:

$$X_{La}^o = [A_{La} B_{aa} + A_{Lb} B_{ba} \quad A_{La} B_{ab} + A_{Lb} B_{bb} \quad A_{La} B_{am} + A_{Lb} B_{bm}] \begin{bmatrix} Y_a \\ Y_b \\ Y_m \end{bmatrix} \quad (28)$$

Como o que interessa saber é a necessidade total — direta e indireta — de mão-de-obra, para os produtos manufaturados, tem-se:

$$X_{La}^o = (A_{La} B_{aa} + A_{Lb} B_{ba}) Y_a \quad (29)$$

Entretanto, como $A_{Lb} B_{ba}$ é a mão-de-obra necessária para produzir os bens não-manufaturados, que por sua vez são utilizados na produção dos produtos manufaturados, o termo não pode ser considerado como necessidade de mão-de-obra industrial. Assim, chega-se à principal equação:

$$X_{La}^* = (A_{La} B_{aa}) Y_a \quad (30)$$

A equação 30 mostra que uma variação na demanda de bens industriais ocasionará uma variação no emprego industrial em uma quantidade que dependerá do total — direto e indireto — de insumos industriais para produzir bens industriais e do coeficiente de mão-de-obra direta de cada bem manufaturado.

De maneira semelhante, as necessidades totais de mão-de-obra para o setor externo podem ser escritas com base em (27) e (26a):

$$X_{Lm} = (A_{La} B_{am} + A_{Lb} B_{bm}) Y_m \quad (31)$$

e, para o total de mão-de-obra industrial obtém-se:

$$X_{Lm}^* = (A_{La} B_{am}) Y_m \quad (32)$$

A despeito do fato de as importações não exigirem mão-de-obra direta, o coeficiente de mão-de-obra total não será nulo. O volume de mão-de-obra indireta é dado pelo total — direto e indireto — de trabalho necessário para produzir as exportações.

Conforme definição acima, a indústria 1 é a indústria X e a 2 a Y. Assim, pode-se escrever 30 como:

$$X_{La}^* = (a_{L1} b_{11} + a_{L2} b_{21}) Y_1 + (a_{L1} b_{12} + a_{L2} b_{22}) Y_2$$

Voltando à notação anterior tem-se:

$$L = a X + b Y \quad (3)$$

onde

$$\begin{aligned} L &\equiv X_{La}^* \\ a &\equiv a_{L1} b_{11} + a_{L2} b_{21} \\ b &\equiv a_{L1} b_{12} + a_{L2} b_{22} \end{aligned}$$

isto é, os coeficientes de mão-de-obra a e b devem ser interpretados como necessidades totais — diretas e indiretas — de mão-de-obra industrial, requeridas para produzir bens industriais.

Por outro lado, a equação (32) pode ser escrita como:

$$X_{Lm}^* = (a_{L1} b_{1m} + a_{L2} b_{2m}) Y_m \quad (32a)$$

Como anteriormente definido, $Y_m \equiv Z$, então (32a) transforma-se em:

$$X_{Lm}^* = cZ \quad (33)$$

onde $c \equiv a_{L1} b_{1m} + a_{L2} b_{2m}$ é a mão-de-obra total — direta e indireta — necessária para “produzir” uma unidade importada de um bem de consumo.

Introduzindo-se (3) e (33), obtém-se uma expressão mais geral para a demanda derivada de mão-de-obra:

$$L = a X + b Y + cZ \quad (34)$$

O efeito da redistribuição de renda pode ser analisado mediante uso de (3) ou de sua forma mais geral (34).

Afiguram-se agora mais claros os motivos que levaram ao tratamento mais cuidadoso do setor externo: em primeiro lugar, o conteúdo de trabalho dos bens depende da maneira como se considera o setor externo. Definidas as exportações como demanda final, o sistema (23a) e sua solução (26) tomam formas diferentes. Em segundo lugar, o efeito da redistribuição de renda dependerá se se use (3) ou (34).

7. Sumário e conteúdo empírico do modelo

Os principais aspectos do modelo podem ser resumidos da seguinte maneira:

Com as hipóteses de que:

- 1) a demanda de bens manufaturados (bens X e Y) depende da renda dos consumidores;
- 2) relações trabalho-produto constantes de modo que a demanda derivada de mão-de-obra do consumidor é uma combinação linear das quantidades demandadas de X e Y ;
- 3) as propensões marginais a consumir X e Y não são constantes, pelo menos para um bem, de modo que a estrutura da demanda depende da distribuição da renda;

a teoria postula que: a demanda derivada de mão-de-obra depende da *renda dos consumidores* (função φ) e da distribuição dessa renda (implícita em φ).

Conforme se pode notar, a relação crucial é explicitada pela função φ . É esta função, conseqüentemente, que deverá ser testada empiricamente. Se a teoria explica corretamente o mundo real, pode-se esperar uma relação estatística significativa, conforme previsto pela função φ . Este é o conteúdo empírico do modelo e note-se que conteúdo empírico é um requisito vital da teoria; toda teoria deve oferecer a possibilidade de ser refutada pelos fatos.

Embora as propriedades da função φ devam ser derivadas através de verificações empíricas, foi intenção desse estudo especular sobre a sua forma. É interessante, por exemplo, saber se a função φ aumenta a uma taxa decrescente ou crescente ou se possui algum ponto de inflexão. Dependendo de tais propriedades, diferentes políticas de redistribuição da renda produzirão diferentes efeitos sobre o emprego.

Em conseqüência, adotando-se a hipótese mais restritiva de elasticidades-renda constantes, menor que a unidade para o bem Y e maior que a unidade para o bem X , gerou-se uma função φ ,

em forma de S invertido (com um ponto de inflexão). Essas hipóteses, contudo, são condições suficientes. As mesmas curvas na Figura 3, com coeficiente linear (interseção com o eixo das ordenadas) para os bens essenciais e negativo para os bens de luxo, geram a mesma função em forma de S invertido.

8. Crescimento e distribuição

Os efeitos secundários da criação de empregos industriais — isto é, os multiplicadores de emprego — não foram considerados neste estudo. Tampouco foram levados em conta os efeitos de variações na demanda de bens industriais sobre o emprego em outros setores não-manufatureiros. O principal interesse restringiu-se ao setor industrial e ao impacto inicial sobre o emprego.

O outro aspecto dinâmico que interessaria discutir com base no modelo é o crescimento econômico. Suponha-se que a renda seja redistribuída de modo a favorecer as classes de renda inferior e, portanto, que aumente o emprego industrial. Qual deverá ser o efeito dessa redistribuição sobre o crescimento econômico, entendendo-se por crescimento econômico o aumento da capacidade produtiva de economia, sobretudo investimentos?

É bem conhecida a relação entre distribuição da renda e crescimento econômico no contexto das teorias do crescimento.¹⁸ Deve-se esperar — de acordo com essas teorias — um *trade-off* entre distribuição e crescimento. Assim, se se redistribui a renda, pode-se colocar em risco o crescimento. A idéia básica do *trade-off* é a de que a taxa de poupança da economia e, portanto, também os investimentos, dependem da distribuição da renda.

Este argumento, contudo, deve ser qualificado de duas maneiras. Em primeiro lugar, a teoria é verdadeira em uma situação de pleno-emprego. Se todos os recursos forem utilizados, quanto mais do produto nacional for alocado ao consumo menos recursos estarão disponíveis para a produção de bens de capital. Entretanto, nos

¹⁸ N. Kaldor, *Essays on Value and Distribution*, (Londres: Duckworth, 1960), pp. 228-230.

países em desenvolvimento, onde os recursos são subutilizados, a relação entre consumo e investimento pode ocorrer justamente no sentido oposto. Conforme algumas teorias de investimento têm sugerido, estes podem ser *induzidos* por um alto nível de consumo. Ou, como argumenta Nurkse, "the inducement to invest is limited by the size of the market".¹⁹ O efeito de redistribuição da renda aqui considerado visa precisamente a aumentar a demanda de bens industriais, isto é, aumentar o tamanho do mercado.

Em segundo lugar, o principal argumento em favor de relação entre distribuição de renda e poupança é "the fact that the bulk of *profits* accrues in the form of *company profits* and a high proportion of companies marginal profits is put to reserve".²⁰ Desta maneira, a distinção relevante é a que diz respeito a qual a proporção da renda nacional que assume a forma de lucros. Subtraindo os lucros não-distribuídos (poupança das empresas) da renda nacional, obtém-se a *renda pessoal*. A análise da estrutura da demanda, acima desenvolvida, refere-se à renda pessoal. Assim, nesse modelo, a variável *I* representa realmente a renda pessoal, que é também a magnitude a ser redistribuída. Destarte, se, no modelo, a redistribuição da renda pessoal muda as poupanças, isto significa que as propensões marginais (pessoais) a poupar são diferentes para as várias classes de renda. Obviamente, esta é uma proposição bastante diversa da apresentada por Kaldor e requer investigação adicional. De qualquer modo, no caso do Peru, por exemplo, as poupanças das empresas constituem-se na parcela mais importante de poupança global (quase 70% da poupança total bruta). Pode-se, por conseguinte, admitir que uma redistribuição da renda pessoal tenha uma influência muito pequena sobre a poupança e o crescimento. É claro, contudo, que isso ainda é conjectura, havendo urgente necessidade de investigações teóricas e empíricas, mais aprofundadas.

¹⁹ R. Nurkse, *Problems of Capital Formation in Underdeveloped Countries*, (Oxford: Blackwell, 1953).

²⁰ Kaldor, *op. cit.*, p. 229 (grifo nosso).

Apêndice A

Condições para a univocidade da relação entre distribuição da renda e demanda agregada de bens

Suponha-se que existam n consumidores e m mercadorias na economia. Seja:

$$x_{ij} = H^{ij} (P_1, \dots, P_m; I_j)$$

a função demanda do indivíduo j para a mercadoria i . A demanda agregada do bem i é definida pela soma de todas as demandas individuais:

$$X_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} = H^i (P_1, \dots, P_m; I_1, \dots, I_n)$$

Interessa saber em que condições uma mudança na distribuição de rendas monetárias, mantendo constante a soma total de rendas, mudará também X_i . Em outras palavras, procura-se identificar as condições de univocidade da relação entre a distribuição da renda e X_i , de modo que se possa dizer que X_i é função da distribuição da renda. Alternativamente procura-se investigar as condições da não-univocidade que, por sua vez, são mais simples de determinar.

Desse modo, para uma relação não-unívoca entre distribuição de renda e demanda agregada de uma mercadoria, tem-se que:

$$H^i (P_1, \dots, P_m; I_1, \dots, I_n) = H^i (P_1, \dots, P_m; I'_1, \dots, I'_n)$$

onde $I_j \neq I'_j$ para algum ou todo j e onde $\sum_{j=1}^n I_j = \sum_{j=1}^n I'_j$

Para *todas* as mercadorias a não-univocidade implica que:

$$dX_i = \sum_{j=1}^n dx_{ij} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial H^{ij}}{\partial I_j} dI_j = 0; i = 1, \dots, m$$

$$\text{e } \sum_{j=1}^n dI_j = 0$$

Deste modo, tem-se um sistema de $(m + 1)$ equações homogêneas lineares com n variáveis (dI_1) . Evidentemente, procurar uma relação não-unívoca equivale a procurar uma solução não-trivial para o sistema.

Teorema 1 — Se o número de bens mais um é menor do que o número de consumidores, a distribuição da renda não determina um conjunto único de quantidades agregadas demandadas de todos os bens.

A prova é obtida enunciando-se um teorema de álgebra linear: “uma condição necessária e suficiente para que um sistema de equações lineares homogêneas, $AX = 0$, em n variáveis, possua uma solução não-trivial, é de que o valor característico (*rank*) da matriz A seja menor do que n ”.¹

No sistema de equações isto significa que $(m + 1) < n$.

Um dos corolários do teorema mencionado acima é o seguinte: “Se o número de equações é igual ao número de incógnitas, uma condição necessária e suficiente para a existência de uma solução não-trivial é que o determinante da matriz dos coeficientes seja nulo”.

Em consequência, pode-se enunciar um corolário derivado do Teorema 1.

Corolário 2 — Se $m + 1 = n$, a distribuição da renda não determina um conjunto único de quantidades agregadas demandadas de todos os bens, se pelo menos dois consumidores têm sua propensão marginal a consumir igual ou proporcional para todos os bens.

No texto, o número de bens e o número de grupos de renda são iguais a dois, isto é, $(m + 1) = n$. Daí, o valor característico da matriz A pode ser, no máximo, igual a 2. Na verdade, será exatamente 2, pois supõe-se que as propensões marginais a consumir são diferentes para cada grupo. Desta maneira, a única solução para o sistema é a solução trivial, o que implica dizer que a demanda de X e Y depende da distribuição da renda.

¹ G. Hadley, *Linear Algebra*, (Cambridge, Mass.: Addison-Wesley, 1964), p. 174.

Apêndice B

Determinação da forma da função φ sob a hipótese de elasticidades-renda constantes

No texto, tratou-se de funções de elasticidade constante. Neste caso, as funções são também especificadas da seguinte maneira:

$$\frac{dY}{dI} \frac{I}{Y} = \alpha \Leftrightarrow Y = A I^\alpha$$

$$\frac{dX}{dI} \frac{I}{X} = \beta \Leftrightarrow X = B I^\beta$$

Considere-se φ como soma linear de duas funções com elasticidades constantes α e β :

$$\varphi(I) = aAI^\alpha + bBI^\beta; \alpha > 1, 0 < \beta < 1; A, B, I, a, b > 0.$$

Deseja-se conhecer a forma de φ . Neste caso:

$$\varphi'(I) = aA\alpha I^{\alpha-1} + bB\beta I^{\beta-1} > 0$$

$$\varphi''(I) = aA\alpha(\alpha-1) I^{\alpha-2} + bB\beta(\beta-1) I^{\beta-2}$$

O primeiro termo da segunda derivada será sempre positivo, ao passo que o segundo será negativo. Nessas condições, a fim de verificar a existência de ponto de inflexão, faz-se $\varphi''(I) = 0$. Isto implica que:

$$aA\alpha(\alpha-1) I^{\alpha-2} = -bB\beta(\beta-1) I^{\beta-2} = bB\beta(1-\beta) I^{\beta-2}$$

$$I^{\alpha-\beta} = \frac{bB\beta(1-\beta)}{aA\alpha(\alpha-1)} = \frac{E}{C}; \text{ onde } E, C > 0 \text{ então } I^0 = \left(\frac{E}{C}\right)^{\frac{1}{\alpha-\beta}}$$

Para um ponto de inflexão, tem-se $\varphi'''(I^0) \neq 0$.

$$\varphi'''(I) = aA\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) I^{\alpha-3} + bB\beta(\beta-1)(\beta-2) I^{\beta-3}$$

É fácil ver que $\alpha \geq 2 \Rightarrow \varphi'''(I^0) > 0$. Para $1 < \alpha < 2$ e calculando $\varphi'''(I^0)$ obtém-se:

$$\varphi'''(I^0) = C \frac{\beta-3}{\alpha-\beta} E^{\frac{\alpha-3}{\alpha-\beta}} [\alpha-\beta] > 0$$

Daí, φ tem um ponto de inflexão em I^0 . O fato de que $\varphi''(I^0) = 0$ e $\varphi'''(I^0) > 0$, implica que $\varphi'(I)$ tem um mínimo em I^0 . A função φ por conseguinte, tem a forma mostrada na Figura 3.