

# IRREVERSIBILIDADE DOS INVESTIMENTOS E VALOR DA OPÇÃO DE ENCERRAR A EXTRAÇÃO DE PETRÓLEO\*

Fernando Antonio Slaibe Postali

Do Departamento de Economia da USP

Paulo Picchetti

Do Departamento de Economia da USP

O objetivo deste artigo é simular o impacto da opção de saída sobre a decisão de investir no desenvolvimento de campos de petróleo e gás, à luz do debate sobre a importância das flexibilidades operacionais para o valor de um projeto de investimento. Utiliza-se a abordagem das *opções reais*, poderosa para avaliar oportunidades de investimento cujos gastos são irreversíveis. Propõe-se um modelo que inclui os custos cumulativos (efeito Jevons), peculiares da indústria do petróleo e assume-se que tanto o preço do petróleo quanto o custo operacional são estocásticos, ambos seguindo um movimento browniano geométrico (MBG). Duas conclusões principais emergem do trabalho: *a*) o valor da flexibilidade reduz fortemente o efeito da irreversibilidade sobre a decisão de investir; e *b*) a opção de deixar a indústria torna o investimento bem menos sensível a variações em uma série de parâmetros, incluindo as taxas de extração e de juros. Os resultados apóiam a conclusão de que uma boa maneira de elevar os investimentos no desenvolvimento de campos de petróleo é conferir ao concessionário maior liberdade de reagir a alterações nas condições econômicas.

## 1 INTRODUÇÃO

A indústria de petróleo apresenta características peculiares que a tornam um campo de estudo bastante complexo, sobretudo quanto aos determinantes da decisão de investir. Trata-se de investimentos de longo prazo de maturação, cujos ativos possuem um elevado grau de especificidade. Essas duas características tornam o investimento nesse setor altamente *irreversível*, isto é, os gastos não podem ser revertidos uma vez empreendidos, dificultando a saída da indústria em caso de condições econômicas adversas. A irreversibilidade do gasto é um elemento que acarreta custos de oportunidade na decisão de desenvolver um campo de petróleo, de modo que deve ser adequadamente incorporado na avaliação do projeto. A ferramenta que permite a incorporação da irreversibilidade na decisão de investir é a metodologia das *opções reais* (DIXIT; PINDYCK, 1994; SCHWARTZ; TRIGEORGIS, 2001; COPELAND, 2002).

Uma companhia petrolífera que adquire direitos de exploração sobre certa área está comprando um ativo que pode desenvolver imediatamente ou mais tarde, dependendo das condições de mercado. Esse ativo, portanto, é uma *opção* – o direito de decidir quando uma reserva será desenvolvida, dentro de certos limites temporais. Durante a fase de produção, a companhia pode decidir acelerar a

---

\* Os autores agradecem a Marcos Eugênio da Silva, Fábio Kanckzuk, Francisco Anuatti Neto, Edmilson Moutinho dos Santos, Gerson Francisco e a dois pareceristas anônimos pelas valiosas sugestões apresentadas.

extração a fim de aproveitar um momento de alta no preço do petróleo ou, similarmente, reduzir ou paralisar a produção em períodos de preço muito baixo. Além disso, a firma pode optar por sair da indústria, se considerar que o cenário econômico é incompatível com a extração lucrativa. Por outro lado, a velocidade de extração do recurso está diretamente ligada ao crescimento dos custos unitários, um fenômeno conhecido na literatura como “efeito Jevons”: devido à limitação física do estoque, à medida que a produção se acumula (equivalendo ao esgotamento da jazida), o custo marginal se eleva, em virtude da progressiva diminuição da pressão nos poços. Dessa forma, se os custos se tornarem proibitivos, o produtor tem a opção de abandonar a atividade. A avaliação por opções reais se tornou amplamente aceita na avaliação de investimentos em recursos minerais (por exemplo, LIMA; SUSLICK, 2001; MOSZKOWICZ, 2003), mas a cumulatividade dos custos (ou, de forma análoga, a finitude natural dos estoques dos recursos) foi deixada de lado conforme a análise de opções reais foi ganhando espaço na literatura como método dominante de avaliação das jazidas.

Este artigo tem por objetivo avaliar como a presença da opção de saída da indústria petrolífera permite amenizar os efeitos da irreversibilidade dos investimentos na decisão de investir no desenvolvimento de jazidas de hidrocarbonetos. Além disso, incorpora a finitude do estoque do recurso na natureza através do efeito Jevons – crescimento dos custos unitários de extração ao longo do tempo. Mostra também, através de um exercício numérico, que *a*) o valor da flexibilidade adicionada pela opção de encerrar permite compensar eventuais atrasos no investimento produzidos pela irreversibilidade; e *b*) a opção de saída torna o investimento menos sensível a alterações na taxa de crescimento dos custos.

A discussão é relevante por duas razões básicas. Do ponto de vista teórico, nota-se que a literatura não traz um consenso sobre a importância dos valores das flexibilidades. Há autores (por exemplo, DAVIS; CAIRNS, 1999) que admitem que o valor dessas opções é diminuto o suficiente para que sejam desprezadas. Do ponto de vista regulatório, por sua vez, o debate é útil para avaliar em que medida a flexibilização do contrato de concessão pode contribuir para a atração de investimentos no Brasil.

Este trabalho está dividido em três seções além desta introdução: a seção 2 apresenta um panorama sobre essa discussão na literatura; a seção 3 apresenta o modelo e explica os conceitos envolvidos; a seção 4 traz os resultados e as considerações conclusivas.

## 2 O DEBATE TEÓRICO

A avaliação de recursos naturais não-renováveis é antiga e conta com uma extensa literatura. Hotelling (1931) foi um dos pioneiros nessa pesquisa, estabelecendo o

que ficou conhecido como Lema de Hotelling, segundo o qual o valor unitário da reserva, dado pela diferença entre o preço e o custo marginal de extração (também conhecido como o valor sombra), deve crescer à taxa de juros com vistas a evitar oportunidades de arbitragem. Isto é, se  $\lambda_t = P_t - C_t$ :

$$\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = r \quad (1)$$

onde  $\dot{\lambda} = d\lambda / dt$ . Pelo princípio de Hotelling, qualquer desequilíbrio nessa relação pode produzir trajetórias ineficientes de extração. Se a taxa de crescimento do valor sombra for maior (menor) que a taxa de juros, o produtor deve reduzir (aumentar) a taxa de extração, para maximizar o valor presente esperado de seus lucros.

A forte dependência do valor da reserva em relação ao custo de extração tem significados importantes, pois está ligada à qualidade do recurso do solo. Entretanto, existem diferenças de abordagem, conforme salienta Cairns (1990, 1994), entre os enfoques de Hotelling (1931) e de Gray (1914), sobre a avaliação de recursos exauríveis. Mesmo correndo-se o risco de abusar da linguagem, pode-se dizer que o primeiro fornece uma abordagem mais “macroeconômica”, com ênfase na trajetória da renda do recurso e nas condições de equilíbrio intertemporal da extração, vinculada à sua finitude. A segunda abordagem (GRAY, 1914) – que foi relativamente posta de lado – possui um conteúdo mais “microeconômico”, voltado para as diferenças de qualidade entre as jazidas e sua extração ótima. Segundo seus resultados, as jazidas mais abundantes devem ser exploradas primeiro, em um esquema análogo ao das terras ricardianas. As diferenças qualitativas entre as jazidas são expressas por diferenças nos custos unitários de extração e, à medida que as reservas de pior qualidade começam a ser exploradas, os custos unitários tendem a crescer, refletindo as dificuldades crescentes de produção. Desse ponto de vista, a abordagem de Gray (1914), embora menos conhecida e voltada para os custos, representa uma alternativa à análise de Hotelling (1931), que privilegia o estoque físico dos recursos. Nesse contexto, a inclusão dos custos na avaliação da jazida constitui, em certa medida, um retorno à metodologia de Gray.

A insuficiência de métodos baseados no valor presente líquido (VPL) foi logo sentida pela teoria, na medida em que não modelava a incerteza de maneira adequada, não incorporava as decisões irreversíveis de investimento e as flexibilidades operacionais que conferem valor ao projeto. Nesse contexto, as opções reais surgiram como uma aplicação da teoria das opções financeiras com vistas a preencher tais lacunas (DIXIT; PINDYCK, 1994). Dessa forma, as avaliações de investimento

por opções reais foram se desenvolvendo através da incorporação do valor das flexibilidades operacionais, como opção de investir (TOURINHO, 1979; PADDOCK; SIEGEL; SMITH, 1988), de paralisar (BRENNAN; SCHWARTZ, 1985), de ampliar a capacidade de operação (PINDYCK, 1988), *time to build* (MAJD; PINDYCK, 1987), e de abandonar, dentre outras.<sup>1</sup> Um panorama dos principais modelos encontra-se em Dias (2004).

Deve-se ter em vista que o custo de uso,  $\lambda$ , estabelece uma espécie de valor fundamental para os recursos no subsolo, com base no conceito de VPL. Entretanto, há uma controvérsia sobre que medida o princípio de Hotelling é suficiente para avaliar as reservas, dado que não incorpora as *opções* operacionais embutidas no projeto, nem o efeito da irreversibilidade do investimento. Em outras palavras, para que o valor sombra seja uma medida útil da viabilidade do investimento, é necessário que os valores das flexibilidades sejam pequenos. A literatura buscou, de uma maneira ou de outra, estudar tais efeitos, mas os resultados são pouco conclusivos, pois são sensíveis às especificidades de cada projeto.

Bjerksund e Ekern (1990) levantaram a discussão e, através de um modelo aplicado à extração de recursos não-renováveis, analisam diversas flexibilidades e concluem que o efeito da flexibilidade temporal do investimento (possibilidade de adiar a decisão) é significativo, mas o efeito adicional da opção de abandono ou da flexibilidade operacional sobre o valor do projeto é pequeno. Mesmo assim, aconselham que elas não sejam ignoradas, pois podem induzir a decisões de investimento precipitadas ou equivocadas.

Davis e Cairns (1999) procuram medir o grau de precisão do princípio de avaliação de Hotelling e em que medida ele fornece um limite superior ou inferior para o valor das reservas. Eles concluem que, na presença de incerteza, de restrições tecnológicas ou regulatórias para a extração do recurso, o valor sombra tende a sobreavaliar o verdadeiro valor da reserva e o crescimento do seu valor sombra tende a ser inferior à taxa de juros. A análise das opções reais vai em direção oposta, isto é, a desconsideração das flexibilidades que conferem valor às reservas levam o princípio de Hotelling a subavaliá-las. Davis e Cairns (1999) argumentam que o valor de tais flexibilidades é pequeno, insuficiente para invalidar seus resultados, mas não quantificam esse efeito.

Trigeorgis (1993) chama a atenção para a não-aditividade das opções, isto é, as flexibilidades, na medida em que interagem entre si, agregam valor de forma *não-aditiva*. Por exemplo, o valor incremental de uma opção de abandono é diferente na presença e na ausência de opção de paralisação. Em particular, mostra-se que o valor incorporado por uma opção adicional, na presença de outras flexibilidades,

1. Trigeorgis (1993) analisa o problema da interação entre diversas opções embutidas em um projeto.

é menor que o seu valor isolado, além de ser decrescente no número de opções presentes. Ou seja, se  $F_i$  for o valor da flexibilidade (opção)  $i$ , tem-se, em geral:

$$F_1 + F_2 + \dots + F_n \leq F_{(1, \dots, n)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{n+1} = 0$$

onde  $F_{(1, \dots, n)}$  é o valor conjunto das  $n$  opções. Dessa forma, a desconsideração de uma opção específica tende a não acarretar erros de avaliação quanto maior for o número de flexibilidades presentes no projeto.

Essa constatação acarreta uma série de dificuldades para a avaliação por opções reais, dentre as quais o fato de que o exercício de uma opção afeta, necessariamente, o valor das opções remanescentes.<sup>2</sup> De acordo com Trigeorgis (1993), só é possível separar os valores das opções quando não existe interação entre elas, e isso é tanto mais provável quanto menos o exercício de uma afetar o valor de outra. Segundo ele, as opções tendem a ser mais aditivas quando: *a*) as opções envolvidas são de tipo oposto (*compra versus venda*); *b*) as maturidades são próximas ou são de tipo européia; e *c*) quando as opções estão *out of money* (cujo exercício não é vantajoso). Nesses casos, as regiões de exercício não se sobrepõem, garantindo a aditividade. Apesar dessa advertência, a grande maioria dos trabalhos em opções reais tende a utilizar a propriedade da aditividade, que só é válida para casos muito específicos.

Kulatilaka (1995) também aborda o problema da interatividade dos valores das opções presentes em um projeto. Os valores incrementais de cada opção podem ser crescentes ou decrescentes quando um projeto já possui outras flexibilidades operacionais. Sua conclusão é de que a opção de esperar para investir vale menos na presença da opção de paralisação temporária e/ou crescimento, implicando uma relação de *substituibilidade*<sup>3</sup> entre elas; por outro lado, a opção de paralisar vale mais na presença de opção de crescimento, identificando uma relação de *complementaridade* entre ambas.

Em síntese, a importância do valor das flexibilidades sobre a decisão de investir é complexa e depende das flexibilidades gerenciais admitidas. Entretanto, os modelos supracitados não levam em conta o efeito Jevons e em que medida ele afeta a decisão de investir. O modelo a seguir propõe incorporá-lo de uma forma razoavelmente simples.

2. Além disso, não há muito consenso sobre a importância das flexibilidades. Kulatilaka e Marks (1988) mostram que é possível que a presença de uma tecnologia flexível versus uma tecnologia rígida pode reduzir o valor da firma, em vez de elevá-lo.

3. Ou seja, a presença de opção de paralisar tenderia a reduzir o valor da opção de esperar, facilitando o investimento.

### 3 O MODELO

O modelo desenvolvido a seguir baseia-se na avaliação de investimentos em petróleo e gás, com base em opções reais (TOURINHO, 1979; PADDOCK; SIEGEL; SMITH, 1988; DIAS, 2004), com a inclusão de flexibilidades que conferem valor ao projeto (McDONALD; SIEGEL, 1985) e com a metodologia de Dixit (1989), presente também em Pindyck (1988, 1991) e Dixit e Pindyck (1994). Considerando que investimentos em projetos de extração de petróleo compreendem duas fases principais, a de *exploração* e a de *desenvolvimento/produção*, o contexto do modelo pode ser situado entre o término da fase exploratória, quando a incerteza de ordem geológica foi dissipada, e a declaração de desenvolvimento, quando o investidor anuncia o interesse em prosseguir com o projeto, construindo a infra-estrutura necessária para extrair o recurso. Trata-se, portanto, de um modelo de investimento em dois estágios: de posse da *reserva não-desenvolvida*, o agente deve avaliar se é ótimo ou não exercer a opção de transformá-la em *reserva desenvolvida*. A título de simplificação, assume-se que, uma vez realizado, o investimento no desenvolvimento é concluído imediatamente, isto é, ignora-se o tempo de construção (*time to build*).<sup>4</sup> Entretanto, depois de efetuado, o investimento não pode ser revertido, de modo que é necessário incorporar o custo de oportunidade de desenvolver a reserva.

Apesar da irreversibilidade, o modelo pode ser estendido em direção a duas possíveis flexibilidades: presença de opção de encerramento da produção sem custos e possibilidade de encerramento a um certo custo. Pretende-se mostrar como a existência dessa flexibilidade adiciona valor ao investimento, contribuindo para elevar a disposição de investir e como a incorporação do efeito Jevons, através dos parâmetros de evolução do custo de produção, afeta a regra de investimento.

**Valor unitário da reserva desenvolvida.** Assume-se que o valor unitário da reserva desenvolvida,  $V(P, C, t)$ , seja governado por duas variáveis de estado, o *preço* e o *custo operacional de produção*, os quais seguem um movimento browniano geométrico (MBG):

$$dP = \alpha P dt + \sigma_p P dZ_p \quad (2)$$

$$dC = \phi C dt + \sigma_c C dZ_c \quad (3)$$

onde  $\alpha$  e  $\phi$  são os crescimentos esperados do preço e do custo;  $dZ_p$  e  $dZ_c$  são processos de Wiener, tal que  $E(dZ_p dZ_c) = \rho dt$ ,  $E(dZ_p) = E(dZ_c) = 0$ ,  $E(dZ_p)^2 = E(dZ_c)^2 = dt$ , onde  $\rho$  é o coeficiente de correlação entre as variações de  $P$  e  $C$ ;  $\sigma_p$  e  $\sigma_c$  são os desvios-padrão instantâneos de cada processo.

4. Majd e Pindyck (1987) incorporam o *time to build* em sua análise, mas o relaxamento dessa hipótese não traz diferenças qualitativas aos resultados. A inclusão do tempo de instalação apenas acentua o efeito da incerteza.

Na análise aqui proposta, a taxa de crescimento dos custos unitários é dada por  $\phi$ , parâmetro associado a uma propriedade em geral ignorada, mas importante, da função custo de produção – o efeito estoque (também conhecido como efeito Jevons).<sup>5</sup> À medida que a reserva vai sendo extraída, o custo unitário<sup>6</sup> de produção tende a crescer, pois fica cada vez mais difícil extrair o recurso remanescente em virtude da queda da pressão nos poços. Ou seja, assumindo que o custo unitário é inversamente proporcional ao tamanho físico da reserva, se  $\phi$  for a taxa de decaimento das reservas  $Q$ , tem-se:<sup>7</sup>

$$Q_t = Q_0 e^{-\phi t} \quad (4)$$

Como  $C_t$  e  $Q_t$  são inversamente proporcionais:

$$C_t Q_t = C_0 Q_0$$

De (4):

$$C_t Q_0 e^{-\phi t} = C_0 Q_0$$

$$C_t = C_0 e^{\phi t} \quad (5)$$

Ou seja, o parâmetro que expressa a taxa de decaimento da reserva pode ser interpretado como a própria taxa de crescimento dos custos unitários. Assim, a incorporação do efeito estoque é importante para avaliar a disposição de investir dos agentes, já que se trata de uma particularidade da função de custos no setor extrativo. Além disso, como se está trabalhando em termos unitários, o crescimento da função custo constitui uma forma alternativa de expressar o progressivo esgotamento da reserva em relação ao usual estoque inicial do recurso. Dessa forma, em vez de tratar de *quantidade*, volta-se a análise para a *qualidade da reserva*, que pode ser indicada pelo montante de investimento necessário para desenvolver uma unidade da mesma.

5. Para as implicações do efeito estoque sobre a função custo, ver Osmundsen (1998). Na denominação de Cherian, Patel e Khiripko (2000), essa propriedade chama-se "custos cumulativos".

6. A rigor, o custo marginal; mas se assume que o custo marginal é igual ao custo médio variável.

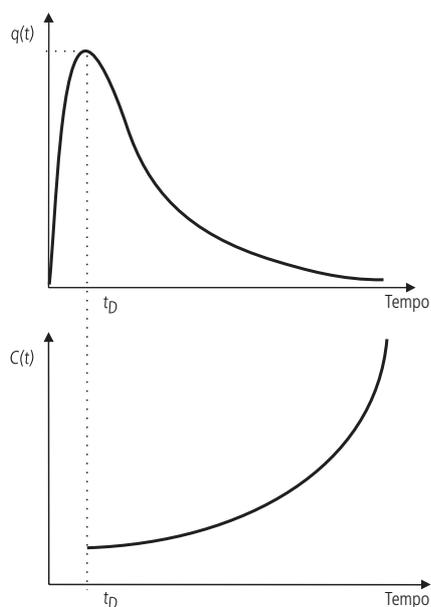
7. Trata-se de uma maneira de compatibilizar as análises de Hotelling (1931) e Gray (1914). Cairns (1994) propõe um retorno à abordagem desse último com vistas a uma modelagem melhor da heterogeneidade das jazidas, bem como da endogeneidade das descobertas.

O gráfico 1 ilustra a idéia. A produção cresce gradativamente até  $t_D$ , instante em que a fase de desenvolvimento é concluída. Nesse período, a produção atinge seu ponto máximo – platô – quando, a partir de então, entra em declínio gradativo em decorrência do esgotamento da jazida. A contrapartida desse fenômeno é o crescimento dos custos unitários a partir de  $t_D$ .

De acordo com a hipótese formulada, o parâmetro  $\phi$  expressa a relação entre a produção e o total de reservas, um importante indicador prático do ritmo de extração e, portanto, do tempo disponível do recurso. Como a variação da reserva é dada pela quantidade extraída  $y$ , tem-se  $y = -dQ/dt = \phi Q$ , por (4). Dessa forma,  $\phi^{-1} = Q/y$ , que mede a disponibilidade futura de petróleo e pode ser tratado como uma variável de decisão. Trata-se da razão reserva-produção, importante parâmetro usualmente divulgado pelas companhias de petróleo em seus balanços e publicações profissionais especializadas, sendo medido em anos.

Outra vantagem de se incorporar diretamente a evolução dos custos reside em flexibilizar a usual regra do “1/3” (PADDOCK; SIEGEL; SMITH, 1988; DIAS, 2001; MOSZKOWICZ, 2003). Trata-se de uma regra de avaliação (também conhecida como equação *Business*) que compreende a multiplicação de um fator  $k$  sobre o preço do barril com vistas a encontrar o valor da unidade de reserva, a qual depende linearmente

GRÁFICO 1

**Produção e custos unitários no tempo**

te do preço *spot* do petróleo. Em resumo, supõe-se que  $V = kP - I$ , onde  $V$  é o valor unitário da reserva desenvolvida,  $P$  o preço e  $I$  o investimento por barril. O fator  $k$  sintetiza todas as características geológicas da reserva – qualidade, tipo etc. Paddock, Siegel e Smith (1988) utilizam o valor de  $k = 1/3$ , o qual se tornou referência nos trabalhos posteriores. Além disso, essa abordagem não incorpora explicitamente a evolução dos custos, assumindo-se que estes possuem correlação unitária com os preços. Conforme é mostrado adiante, a especificação do processo dos custos permite assumir correlação imperfeita entre essas variáveis, o que é mais compatível com a realidade.

Assume-se que a taxa esperada de crescimento do preço é dada por  $\alpha$ . Trata-se de um parâmetro crucial para a avaliação da reserva. Em geral, os modelos de avaliação de ativos preferem trabalhar com o conceito de *convenience yield*  $\delta$ , que depende inversamente da taxa de crescimento do valor do ativo. O *convenience yield* é análogo à taxa de dividendos para os ativos financeiros e pode ser interpretado como o benefício líquido de se estocar uma unidade marginal do recurso.<sup>8</sup> Por essa razão, no contexto em questão, ele pode ser entendido como o custo de oportunidade de adiar o desenvolvimento da reserva, mantendo em aberto a opção de investir.

O objetivo do agente é maximizar o valor da reserva e os lucros por ela proporcionados. Como estamos avaliando uma unidade de reserva (um barril), não há variável de controle (quantidade extraída),<sup>9</sup> pelo princípio de Bellman, tem-se:

$$rV(P, C, t)dt = L(P, C, t)dt + E_0(dV) \quad (6)$$

A equação (6) é o resultado da aplicação da programação dinâmica para um investidor, que requer que o retorno da reserva à taxa livre de risco,<sup>10</sup>  $rVdt$ , deva ser igual aos lucros proporcionados pela jazida,  $L$ , mais a variação esperada em seu valor, em equilíbrio. Assume-se que a taxa de juros livre de risco é o parâmetro utilizado pelo investidor para compor a taxa de desconto intertemporal.<sup>11</sup>

8. No mercado financeiro, a taxa de dividendos, em equilíbrio, é igual à diferença entre a taxa de juros livre de risco e a taxa de crescimento do ativo fundamental. Se não houver dividendos, ambas devem ser iguais na ausência de arbitragem. No caso de ativos reais, não existe uma razão para que o valor do ativo cresça à taxa de juros. Assim, o *convenience yield* costuma ser associado a uma “taxa de dividendos” mas, na verdade, ele está ligado à diferença entre a taxa de juros e a taxa de crescimento do valor do ativo. Pelo fato de haver uma cunha entre ambas, há um benefício em estocar o ativo.

9. Aqui, o único parâmetro associado à quantidade extraída é a taxa de decaimento das reservas,  $\phi$ , suposta exógena.

10. Assume-se a hipótese de que os riscos do preço e do custo são totalmente diversificáveis, sendo justificável a adoção da taxa livre de risco como fator de desconto. Essa hipótese parece ser razoável para os custos, mas é forte para os preços, tendo em vista a correlação clara dessa *commodity* com o portfólio de mercado. No entanto, preferiu-se adotar a simplificação, pois ela não traz diferença qualitativa para os exercícios que se fará logo mais.

11. Conforme salienta Pindyck (1991), os resultados do efeito da incerteza sobre a decisão de investir prescindem de qualquer hipótese sobre as preferências do agente em relação ao risco ou sobre em que medida o risco do projeto é correlacionado com o portfólio de mercado. Sejam as firmas neutras ou avessas ao risco, alterações estocásticas em  $P$  (ou  $C$ ) podem ser completamente diversificáveis e o efeito da incerteza sobre a regra de investimento será sempre o mesmo, podendo diferir apenas na intensidade.

A função de lucro unitário  $L$  é dada por:

$$L = (1 - R)[(1 - \tau)P - C] \quad (7)$$

onde  $\tau$  é a alíquota de *royalties*, que incide sobre a receita, e  $R$  é a alíquota de imposto de renda.<sup>12</sup>

Pelo Lema de Itô, e desconsiderando ordens de  $dt$  iguais ou superiores a 2 temos:<sup>13</sup>

$$dV = V_p dP + V_C dC + \frac{1}{2} V_{pp} (dP)^2 + \frac{1}{2} V_{CC} (dC)^2 + V_{pC} dP dC + V_t dt \quad (8)$$

Por hipótese, sabemos que  $E_0(dZ_p) = E_0(dZ_C) = 0$ , que  $E_0(dZ_p)^2 = E_0(dZ_C)^2 = dt$  e que  $E_0(dZ_p dZ_C) = \rho dt$ , temos a expressão para  $E_0(dV)$ :

$$E_0(dV) = V_p P \alpha dt + V_C C \phi dt + \frac{1}{2} V_{pp} \sigma_p^2 P^2 dt + \frac{1}{2} V_{CC} \sigma_C^2 C^2 dt + V_{pC} \rho \sigma_p \sigma_C PC dt + V_t dt \quad (9)$$

Substituindo (9) em (6) e rearranjando:

$$\frac{1}{2} V_{pp} \sigma_p^2 P^2 + \frac{1}{2} V_{CC} \sigma_C^2 C^2 + V_{pC} \rho \sigma_p \sigma_C PC + V_p \alpha P + V_C \phi C + V_t + (1 - R)[(1 - \tau)P - C] - rV = 0 \quad (10)$$

A expressão (10) é uma equação diferencial parcial e não tem solução analítica. Entretanto, podemos assumir uma hipótese derivada da dinâmica do estoque de reservas e permitir uma trajetória determinística para o termo  $V_t$ . Conforme salienta Dixit e Pindyck (1994, cap. 7),  $V_t$  pode ser interpretado como a depreciação do projeto. Os projetos no setor de petróleo apresentam duas características fundamentais: são de longa duração e depreciam conforme o esgotamento da jazida. Assim, supondo-se que, uma vez iniciada, a condição de abandono será o esgotamento

12. Na verdade, Imposto de Renda Pessoa Jurídica (IRPJ) + Contribuição Social sobre o Lucro Líquido (CSLL). Considera-se aqui um campo de porte médio, isento de participações especiais, conforme as regras do Decreto 2.705/98.

13. Notação:  $V_x = dV/dX$  e  $V_{xx} = d^2V/dX^2$ .

econômico do recurso, pode-se substituir  $V_t$  por  $-\phi V$ , ou seja, o valor da reserva deprecia-se proporcionalmente à sua taxa de decaimento.<sup>14</sup>

Mesmo com essa substituição, a equação (10) possui solução complicada, podendo requerer métodos numéricos de grande complexidade, pelo fato de a função objetivo  $V$  ser governada por dois fatores ( $P$ ,  $C$ ). O resultado da equação diferencial irá gerar um problema de “livre fronteira”, isto é, precisamos saber de todas as combinações de  $P$  e  $C$  que tornam ótimo investir ou não. Para essa classe de problemas, as soluções analíticas são raras e as numéricas são quase sempre *ad hoc*, desenvolvidas para cada caso em particular (ver DIXIT; PINDYCK, 1994). Em essência, o problema não difere do caso em que apenas o preço é incerto, só que, em vez de se obter um “preço crítico” acima do qual a decisão de investir se torna ótima, obtém-se uma “fronteira crítica” e o problema se complica devido à sua bidimensionalidade. Entretanto, se o preço e o custo seguem um MBG, é possível reduzir o problema a apenas uma variável de estado, devido à propriedade de homogeneidade de grau 1 da função  $V$  em relação a  $P$  e  $C$ . Ou seja, assumindo que  $V(P, C) = Cv(P/C) = Cv(p)$ , o objetivo do problema passa a ser determinar a função  $v(p)$ .

A definição da variável  $p \equiv P/C$  e a propriedade da homogeneidade conduzem às seguintes relações.<sup>15</sup>

$$V_p = v'(p); \quad V_C = v(p) - pv'(p)$$

$$V_{pp} = v''(p)/C; \quad V_{pC} = -pv''(p)/C; \quad V_{CC} = p^2 v''(p)/C$$

Substituindo as relações anteriores em (10) e dividindo ambos os lados por  $C$  temos:<sup>16</sup>

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(\sigma_p^2 - 2\rho\sigma_p\sigma_C + \sigma_C^2)p^2 v''(p) + (\alpha - \phi)pv'(p) - \\ & -rv(p) + (1-R)[(1-\tau)p - 1] = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

14. Embora muitos modelos estabeleçam que a condição de contorno para problemas de extração seja o esgotamento físico da jazida ( $Q(T) = 0$ ), essa hipótese é inconsistente com as considerações de otimização de lucro, já que, nesse caso, teríamos  $C(T) = \infty$ . Na realidade, a condição terminal deve ser  $V(Q(T)) = 0$ . Ver Osmundsen (1998).

15. As notações  $v'(\cdot)$  e  $v''(\cdot)$  significam a primeira e a segunda derivadas com relação a  $p$ .

16. Vale ressaltar que esse resultado de homogeneidade só é válido para o caso em que ambas as variáveis de estado sigam um MBG. Não é possível empreender essa transformação quando, pelo menos, uma delas segue um processo de reversão à média, tendo em vista que o *drift* se torna função do nível da variável.

A expressão (11) é uma equação diferencial ordinária que admite solução homogênea e particular. É possível verificar facilmente que a solução particular é dada por:

$$v^* = (1-R) \left[ \frac{(1-\tau)p}{r-\alpha+\phi} - \frac{1}{r} \right] \quad (12)$$

A interpretação da solução particular é direta. Ela representa o valor fundamental do barril de petróleo, isto é, o seu valor presente se fosse produzido por um tempo infinito:

$$\begin{aligned} VP &= \int_0^{\infty} (1-R)[(1-\tau)P(t) - C(t)]Q(t)e^{-rt} dt = \\ &= \int_0^{\infty} (1-R)[(1-\tau)P_0e^{\alpha t} - C_0e^{\phi t}]Q_0e^{-\phi t}e^{-rt} dt = (1-R) \left[ \frac{(1-\tau)P_0}{r-\alpha+\phi} - \frac{C_0}{r} \right] \end{aligned}$$

desde que  $r > (\alpha - \phi)$ . Essa hipótese corresponde à exigência de que o *convenience yield* seja maior que 0 ( $\delta > 0$ ), quando se incorporam os custos cumulativos (usualmente, para custos constantes, teríamos  $r > \alpha$ ). Se isso não ocorrer, o custo de oportunidade do investimento sempre excederá seu benefício e a firma nunca irá instalar capacidade para extração (PINDYCK, 1988), o que equivale a tornar negativo o valor da reserva desenvolvida.<sup>17</sup> A expressão anterior é a (12) multiplicada por  $C_0$ . Ela pode ser interpretada, de acordo com Dixit e Pindyck (1994), como o valor fundamental do ativo que, no nosso caso, é o barril de petróleo.

A solução homogênea assume a forma funcional  $v_H = Ap^\beta$ . Substituindo em (11),  $\beta$  é dado pela solução da equação característica:

$$\frac{1}{2}(\sigma_p^2 - 2\rho\sigma_p\sigma_c + \sigma_c^2)\beta^2 + \left[ \alpha - \phi - \frac{1}{2}(\sigma_p^2 - 2\rho\sigma_p\sigma_c + \sigma_c^2) \right] \beta - r = 0 \quad (13)$$

17. Conforme apontam Hilliard e Reis (1998), o *convenience yield* sintetiza as informações sobre as preferências do consumidor em relação ao risco e sobre a tecnologia de produção, de modo que  $\delta = r - \alpha + \phi$  pode ser considerado um *convenience yield* aumentado para incorporar o efeito do custo  $\phi$ .

A equação (13) admite duas soluções,  $\beta_1 > 1$  e  $\beta_2 < 0$ , de forma que a solução homogênea da equação diferencial é dada por:

$$v_H = A_1 p^{\beta_1} + A_2 p^{\beta_2} \quad (14)$$

Assim, a solução total será  $v = v^* + v_H$ . As constantes  $A_1$  e  $A_2$  são determinadas pelas condições de contorno próprias de acordo com as flexibilidades admitidas pelo projeto.

Com vistas a verificar o valor da flexibilidade na avaliação do projeto de investir, tomemos dois casos separados:

Caso (a) quando o investidor não possui opção de saída da indústria. Sob essa hipótese, se o preço do petróleo cair a 0, a reserva perderá valor, de modo que a primeira condição de contorno será  $v(0) = 0$ , o que, em (14), requer  $A_2 = 0$ , dado que  $\beta_2 < 0$ .

A outra constante,  $A_1$ , é mais difícil de ser excluída e representa o componente de bolha de  $v$  obtido quando  $p \rightarrow \infty$ . Entretanto, é possível demonstrar que o primeiro termo de (14) representa, justamente, a possibilidade de os agentes avaliarem o ativo a um valor acima do seu fundamento, se esperam revendê-lo posteriormente com ganho de capital. Aplicando o Lema de Itô, utilizando a equação característica (13) e lembrando que  $dp/p = dP/P - dC/C$ , é possível demonstrar depois de algum trabalho algébrico que:

$$E[d(p^{\beta_1})/p^{\beta_1}] = rdt \quad (15)$$

Em uma avaliação livre de risco, o primeiro componente de  $v_H$  em (14) tem taxa de retorno igual à taxa de juros livre de risco. É interessante observar que independe de  $\beta_1$  (só dependeria se a taxa de retorno fosse ajustada ao risco). Qualquer desequilíbrio nessa relação tenderá a produzir um movimento de compra (se  $E[d(p^{\beta_1})/p^{\beta_1}] > rdt$ ) ou de venda (caso contrário) do ativo avaliado em  $p^{\beta_1}$ , de modo que a maneira de excluir a bolha representada pelo primeiro componente de (14) é tomando  $A_1 = 0$ .

Portanto, excluídas as bolhas especulativas, o valor fundamental de uma unidade da reserva será dada por  $v^*$  em (12).

$$v(p) = (1-R) \left[ \frac{(1-\tau)p}{r-\alpha+\phi} - \frac{1}{r} \right] \quad (16)$$

Caso (b) quando o agente é capaz de encerrar a produção, caso as condições econômicas não sejam favoráveis. Suponha-se que o produtor possa encerrar, a um custo  $E$ , a operação sempre que as condições econômicas se tornarem desfavoráveis, ou seja, o preço caia demasiadamente ou haja um declínio acentuado da demanda. Os custos de saída ( $E$ ) estão ligados à recuperação ambiental, à cimentação dos poços e à remoção de equipamentos. Se houver opção de terminar a produção, a função lucro (7) se torna:<sup>18</sup>

$$L = \max\{0, (1-R)[(1-\tau)P - C]\} \quad (17')$$

A equação diferencial que governa o valor da reserva irá depender da função de lucro. Se a jazida estiver inoperante, apenas a parte homogênea da solução permanecerá, assumindo a forma funcional  $v(p) = H_1 p^{\beta_1} + H_2 p^{\beta_2}$ , onde  $H_1$  e  $H_2$  são constantes a serem determinadas; por outro lado, em caso de operação, a solução de (11) será dada por:

$$v(p) = B_1 p^{\beta_1} + B_2 p^{\beta_2} + (1-R) \left[ \frac{(1-\tau)p}{r-\alpha+\phi} - \frac{1}{r} \right]$$

A determinação das constantes requer a utilização de condições de contorno. Se a operação estiver paralisada (ou não-desenvolvida), o valor da reserva é a opção de retomada das atividades (ou de desenvolver).<sup>19</sup> Conforme os argumentos apontados anteriormente, se  $p \rightarrow 0$ ,  $v(p) \rightarrow 0$ , de modo que  $H_2 = 0$ ; por outro lado, se o projeto estiver em operação, o valor da unidade de reserva será o próprio valor da opção de encerrar, de forma que, se  $p \rightarrow \infty$ , o investidor nunca a exercerá. Assim, como  $\beta_1 > 0$ , devemos ter  $B_1 = 0$ .

Em síntese, se houver opção de saída, o valor da reserva desenvolvida será dado por:

$$v(p) = \begin{cases} B_2 p^{\beta_2} + (1-R) \left[ \frac{(1-\tau)p}{r-\alpha+\phi} - \frac{1}{r} \right] & \text{se opera} \\ H_1 p^{\beta_1} & \text{se não opera} \end{cases} \quad (17)$$

18. Na verdade, estamos normalizando os custos fixos para 0.

19. Essa interpretação pressupõe a aditividade do valor, discutido por Trigeorgis (1993).

É interessante observar, no caso de operação, como a opção de concluir a extração adiciona uma cunha ao valor fundamental. Assim, a desconsideração de flexibilidades pode levar a uma subavaliação do projeto.

A determinação do modo de operação, isto é, se a firma está dentro ou fora da indústria, irá depender da razão  $p \equiv P/C$  crítica. Sejam  $p^E$  e  $p^S$ , respectivamente, as razões preço-custo críticas que determinam o desenvolvimento e o encerramento da atividade em caso de esta estar operando.<sup>20</sup> A decisão ótima da empresa, conforme cada faixa de  $p$ , depende de seu modo de operação: se a reserva não foi desenvolvida, a variável de decisão será  $p^E$ , isto é, o valor crítico que determina o exercício da opção de desenvolver e, conseqüentemente, operar,<sup>21</sup> por outro lado, se a reserva está desenvolvida, a decisão será entre concluir ou prosseguir a produção, determinada pelo valor crítico  $p^S$  (preço de saída). A tabela 1 resume as decisões ótimas de acordo com o valor de  $p$ .

É interessante observar como  $p^S$  e  $p^E$  são diferentes entre si e a razão preço-custo nesse intervalo caracteriza um fenômeno de histerese (DIXIT, 1992): mesmo que  $p^E$  tenha sido o preço-custo determinante da entrada, a firma só irá encerrar suas atividades e deixar a indústria se esse parâmetro cair abaixo de  $p^S < p^E$ . Do mesmo modo, o preço  $p^S$  não é suficiente para induzir a entrada/desenvolvimento, requerendo que o mesmo atinja o patamar mínimo  $p^E$ .

A decisão de investir ou não depende da comparação dos valores das reservas desenvolvida e não-desenvolvida. Assim, é preciso analisar como esta última evolui de acordo com os parâmetros do preço e do custo, o que será objeto da subseção a seguir.

TABELA 1

**Modo de operação e preço crítico**

Nível de $p \equiv P/C$	Jazida não-desenvolvida	Jazida desenvolvida
$p < p^S$	Permanece	Encerra
$p = p^S$	Permanece	Indiferente entre produzir e encerrar
$p^S < p < p^E$	Permanece	Operante
$p = p^E$	Indiferente entre desenvolver ou não	Operante
$p > p^E$	Desenvolve	Operante

20. Os sobrescritos  $E$  e  $S$  denotam, respectivamente, "entrada" e "saída".

21. Assume-se que não faz sentido desenvolver uma jazida para mantê-la inoperante.

**Valor unitário da reserva não-desenvolvida.** Seja  $F(P, C, t)$  o valor unitário da reserva não-desenvolvida. Novamente, supõe-se que ele seja governado pelo preço e pelo custo, segundo os MBGs definidos anteriormente. O valor da reserva não-desenvolvida pode ser interpretado como uma opção de compra, cujo ativo fundamental é uma unidade de reserva desenvolvida e o preço de exercício são os gastos em investimento  $I$ . A inclusão dos custos operacionais no valor da reserva não-desenvolvida fundamenta-se no indicativo de qualidade de jazida, tratando-se de uma variável fundamental para a avaliação do investimento, devido às propriedades dinâmicas típicas dos recursos exauríveis (OSMUNDSEN, 1998).

A equação de Bellman resultante é:<sup>22</sup>

$$rF(P, C, t)dt = E_0(dF) \quad (18)$$

Aplicando o Lema de Itô, obtemos a seguinte equação diferencial parcial:

$$\frac{1}{2} F_{pp} \sigma_p^2 P^2 + \frac{1}{2} F_{CC} \sigma_C^2 C^2 + F_{pC} \rho \sigma_p \sigma_C PC + F_p \alpha + F_C \phi + F_t - rF = 0 \quad (19)$$

A equação (19) é análoga à equação (11), exceto pela inexistência do termo de lucro. Trata-se de uma equação diferencial parcial sem solução analítica, devido ao termo  $F_t$ , que estabelece a evolução do valor da reserva em relação ao tempo. Isso acontece porque, na maioria dos casos, há um prazo máximo até o qual o investidor deve declarar seu interesse em desenvolver suas reservas ( $T$ ), sob pena de perder a concessão. Todavia, conforme a argumentação de Paddock, Siegel e Smith (1988), se o tempo de exploração for superior a cinco anos, a diferença entre os preços críticos das opções perpétua e com maturidade finita é pequena, de modo que o termo  $F_t$  pode ser ignorado sem erros significativos de avaliação. Assim, parte-se para o caso extremo, em que o investidor se depara com um tempo ilimitado para declarar o desenvolvimento da jazida.<sup>23</sup>

Outra dificuldade para a solução de (19) é a existência de duas variáveis de estado,  $P$  e  $C$ , determinando o valor da reserva. Novamente, utiliza-se o resultado de

22. A rigor, se deveria definir  $F(V, t)$ . Entretanto, nessa situação o processo de difusão de  $V$  torna-se complicado, dificultando consideravelmente a solução da equação diferencial ligando  $V$  a  $F$ . Uma solução alternativa mais simples é ligar diretamente  $F$  aos parâmetros que governam  $V$ , usando sua solução como condição de contorno que define o exercício ótimo. Para mais detalhes, ver Dixit e Pindyck (1994).

23. No caso brasileiro, a Lei do Petróleo estabelece prazos de até nove anos entre a obtenção da concessão de exploração e a declaração de comercialidade, o que se encaixaria na aproximação adotada.

homogeneidade adotado para a reserva desenvolvida, ou seja,  $F(P,C) = Cf(P/C) = Cf(p)$ . Dados os resultados das derivadas de  $f$  com relação a  $p$ , a equação diferencial se torna:

$$\frac{1}{2}(\sigma_p^2 - 2\rho\sigma_p\sigma_c + \sigma_c^2)p^2 f''(p) + (\alpha - \phi)pf'(p) - (r - \phi)f(p) = 0 \quad (20)$$

A equação (20) é análoga à parte homogênea de (11), admitindo solução analítica na forma:

$$f(p) = H_3 p^{\beta_3} + H_4 p^{\beta_4} \quad (21)$$

com  $\beta_3 > 0$  e  $\beta_4 < 0$  raízes do polinômio característico e  $H_3$  e  $H_4$  constantes a serem determinadas. Dado que, quando  $p \rightarrow 0$ , é improvável que a reserva seja desenvolvida,  $f(0) = 0$ , ou seja,  $H_4 = 0$ .

Duas novas condições de contorno são necessárias:

$$F(P, C) = V(P, C) - I \Rightarrow f(p) = v(p) - I/C \quad (22)$$

$$f'(p) = v'(p) \quad (23)$$

A equação (22) é chamada *condição de contato (value matching condition)* e determina que a condição de ótimo para o exercício da opção de investimento é a igualdade entre o valor da reserva não-desenvolvida,  $F$ , e o valor da reserva desenvolvida,  $V$ , líquido do custo de investimento.<sup>24</sup> Ou seja, se  $F(P,C) > V(P,C) - I$ , é melhor para o investidor esperar, pois o valor da reserva não-desenvolvida supera o da desenvolvida subtraída do investimento.<sup>25</sup> O desenvolvimento imediato, por sua vez, é ótimo quando ocorre o inverso. Assim, a expressão estabelece a condição de continuidade para as funções  $F$  e  $V$  em seu ótimo.

A expressão (23) expressa a chamada *condição de suavidade (smoothing past condition)*, que impõe que as duas funções sejam contínuas também em suas inclinações, evitando “quebras” no ponto de ótimo.<sup>26</sup>

24. Estamos ignorando o tempo de construção (*time to build*). Ou seja, supomos que a passagem da fase de exploração para a de desenvolvimento/produção é instantânea, sendo necessário apenas o desembolso do investimento  $I$ .

25. A condição (22) também pode ser interpretada como a igualdade  $V(P,C) = F(P,C) + I$ , ou seja, o valor da reserva deve ser igual ao custo de investir incluindo o valor da flexibilidade de adiar,  $F$ , que representa um custo de oportunidade de adiar o investimento.

26. Dixit e Pindyck (1994, cap. 4, Apêndice C) fornecem a demonstração matemática para ambas as condições.

Os valores críticos de entrada e saída,  $p^E$  e  $p^S$  são determinados pelas condições de contorno (contato e suavidade) em cada modo de operação. Considere, primeiro, a decisão de desenvolver ou não a reserva. Substituindo (17') e (21) em (22) e (23), temos:

$$-H_3(p^E)^{\beta_3} + B_2(p^E)^{\beta_2} + (1-R) \left[ \frac{(1-\tau)p^E}{r-\alpha+\phi} - \frac{1}{r} \right] - i = 0 \quad (24)$$

$$-H_3\beta_3(p^E)^{\beta_3-1} + B_2\beta_2(p^E)^{\beta_2-1} + \frac{(1-R)(1-\tau)}{r-\alpha+\phi} = 0 \quad (25)$$

onde  $i \equiv I/C$ . Esta última é uma variável difícil de conceituar, pois representa a razão entre o investimento para o desenvolvimento e o custo operacional do barril de petróleo. Caso se assuma que as diferenças de qualidade das reservas se traduzem em diferentes níveis de investimento  $I$  para a obtenção de um processo operacional com custos semelhantes,  $C$ , é possível identificar a qualidade da reserva apenas com a comparação do índice  $i$ .

Se a firma estiver operando, deve considerar a decisão de encerrar suas operações se as condições econômicas se tornarem adversas, isto é, o preço-custo cair abaixo de  $p^S$ . As condições de contato e de suavidade serão:

$$v(p^S) = f(p^S) - a$$

$$v'(p^S) = f'(p^S)$$

onde  $a \equiv A/C$ , sendo  $A$  o custo de saída. Portanto, substituindo as soluções gerais anteriores:

$$-H_3(p^S)^{\beta_1} + B_2(p^S)^{\beta_2} + (1-R) \left[ \frac{(1-\tau)p^S}{r-\alpha+\phi} - \frac{1}{r} \right] + a = 0 \quad (26)$$

$$-H_3\beta_1(p^S)^{\beta_1-1} + B_2\beta_2(p^S)^{\beta_2-1} + \frac{(1-R)(1-\tau)}{r-\alpha+\phi} = 0 \quad (27)$$

As equações (24), (25), (26) e (27) formam um sistema não-linear com as incógnitas  $H_3$ ,  $B_2$ ,  $p^E$  e  $p^S$ . Ele não tem solução analítica, devendo ser resolvido por métodos numéricos. Como ambas as constantes  $H_3$ ,  $B_2$  refletem opções de entrada (desenvolvimento) e de saída (encerramento), respectivamente, elas devem ser positivas.<sup>27</sup>

#### 4 RESULTADOS

A tabela 2 resume os valores de referência utilizados na parametrização do modelo.<sup>28</sup>

Assume-se que a taxa de desconto inicial é igual a 10% ao ano (a.a.). A preocupação aqui não é averiguar a verossimilhança desse valor ou se ela é igual ou não à taxa de juros livre de risco, mas, conforme demonstrado anteriormente, é necessário que  $r > \alpha - \phi$  para garantir que o valor da opção de investimento seja não-nulo.

Conforme se observou, trabalha-se diretamente com a taxa de crescimento esperada do preço do petróleo,  $\alpha$ , em vez do *convenience yield*. Seguindo estimativas de Schwartz e Smith (2000), utiliza-se o valor de referência de 1,15% a.a.<sup>29</sup>

TABELA 2

##### Valores de referência (iniciais) assumidos para os parâmetros

Parâmetro	Valor	Fonte
$r$	10%	-
$\alpha$	1,15%	Schwartz e Smith (2000)
$\phi$	10%	Dixit e Pindyck (1994)
$\sigma_P$	25%	-
$\sigma_C$	7%	-
$\rho$	+0,90	Dias (1996)
$\iota \equiv I/C$	1	-
$\tau$	5%	Lei 9.478/97 (piso)
$R$	34%	IRPJ +CSLL

27. Sobre essa interpretação, ver também Pindyck (1988).

28. Estimar os parâmetros ou calibrá-los a partir de dados empíricos não constituem objetivos deste trabalho, de modo que utilizamos números apresentados por outros trabalhos ou então assumimos alguns valores possíveis.

29. É importante enfatizar que tais valores de referência não fazem muita diferença, pois nosso exercício consiste justamente em variá-los e avaliar o impacto sobre o preço crítico.

A taxa de extração  $\phi$  (igual à taxa de decaimento das reservas) é suposta exógena e igual a 10% a.a., valor considerado razoável por Dixit e Pindyck (1994), equivalente a uma meia-vida de cerca de sete anos. Ao longo dos exercícios de simulação, ela vai sendo variada com vistas a identificar seu impacto sobre o preço-crítico. Quanto maior a taxa de extração, maior a velocidade de crescimento dos custos unitários em virtude do rápido esgotamento das pressões nos poços (ver CAIRNS, 1998; DAVIS; CAIRNS, 1999; OSMUNDSSEN, 1998).

Assume-se um valor de  $\sigma_p = 25\%$  a.a. Não é o objetivo deste trabalho estimar a volatilidade do preço a partir de dados anuais. Deve-se destacar, entretanto, que o preço do óleo tem estado muito volátil nos últimos meses, tendo em vista as incertezas quanto à disponibilidade de reservas e quanto ao futuro político de alguns grandes produtores, como Irã, Nigéria e Venezuela.

O efeito Jevons tem, como consequência, o crescimento do custo unitário à mesma taxa de decaimento das reservas. Assume-se ainda que há incerteza sobre os custos que, de um modo geral, estão ligados a mão-de-obra, manutenção de equipamentos, insumos químicos, energia e depreciação de máquinas.<sup>30</sup> Não se tem uma série de custos para estimar esse parâmetro. Todavia, como o investidor apresenta um certo domínio sobre o conjunto de informações determinantes de seus custos, espera-se que o desvio-padrão instantâneo destes seja menor que o do preço do petróleo. Assim, utiliza-se um desvio-padrão dos custos,  $\sigma_c$ , de 7%.

O coeficiente de correlação instantâneo entre as variáveis preço e custo,  $\rho$ , foi parametrizado tendo em vista a constatação de que existe uma forte correlação positiva entre o preço e o custo (DIAS, 1996). A idéia por trás disso é que, quando o preço de petróleo está alto, a entrada de produtores marginais gera pressões sobre a demanda de equipamentos necessários à extração, elevando os custos com aluguel e manutenção de máquinas. Além disso, a elevação das contratações em um mercado de trabalho fortemente influenciado por sindicatos tende a gerar pressões de custo salarial. Nesse sentido, a presença de uma correlação positiva entre preço e custo tenderá a reduzir o grau de risco do projeto.<sup>31</sup> Dias (1996) cita estimações em torno de 90%<sup>32</sup> para esse coeficiente, que adotaremos como referência.

A variável  $i$  representa a razão entre o investimento necessário para desenvolver um barril de petróleo da reserva e o custo operacional ( $I/C$ ). Quanto maior  $i$ ,<sup>33</sup> pior a qualidade do campo. Assume-se um valor de referência inicial  $i = 1$ .

30. Fonte: Energy Information Administration (EIA)/Department of Energy, Estados Unidos.

31. Se a correlação entre  $P$  e  $C$  fosse negativa, o risco do projeto seria maior.

32. Deve-se ressaltar que as estimações muito altas para esse coeficiente têm suas limitações, pois foram obtidas a partir de uma única fonte de dados por Adelman, Koehn e Silva (1989).

33. Ou, alternativamente, quanto maior  $I$  dado  $C$ .

Por fim, as alíquotas de *royalties* e de imposto sobre a renda foram definidas a partir da legislação brasileira (Lei 9.478/97 ou Lei do Petróleo). Os *royalties* devem variar entre 5% e 10% conforme as condições de risco e lucratividade esperadas para o projeto. Como referência para os exercícios de simulação com os demais parâmetros, adotou-se o piso de 5%. As participações especiais, por sua vez, estão regulamentadas no Decreto 2.705 de 3/08/98 e estabelecem alíquotas progressivas de 0% a 40%, conforme o volume de produção, e têm como objetivo garantir uma participação maior da União em projetos mais lucrativos. A base de incidência é a receita líquida, isto é, deduzem-se do faturamento os custos e os gastos com *royalties*. A regra de apuração é complexa e as jazidas de pequeno e médio portes estão isentas. Assume-se, nesse exercício, que se trata de um projeto isento de participação especial, de modo que  $R$  foi parametrizado como igual a 34%, correspondente às alíquotas de IRPJ mais a CSLL.<sup>34</sup>

A parametrização do modelo a partir dos valores definidos na tabela 2 resulta nos seguintes valores para a razão preço-custo crítica de entrada ( $p^E$ ) e de saída ( $p^S$ ), para cada uma das abordagens e opções sugeridas. Consideram-se três cenários possíveis para os custos de encerramento em relação ao custo operacional ( $a = 0, 0,5$  e  $1$ ).<sup>35</sup>

A tabela 3 mostra valores críticos para a decisão de desenvolver a reserva ( $p^E$ ) e de encerrar a produção ( $p^S$ ). Em primeiro lugar, nota-se que o valor crítico para o desenvolvimento, sob a regra do fluxo de caixa descontado, é menor do que para as opções reais quando não há opção de encerramento. Tal resultado é consistente com o argumento de Dixit e Pindyck (1994) de que a nova abordagem incorpora a *irreversibilidade* do investimento, ou seja, é necessário um preço crítico superior para induzi-lo. Com relação à presença de opção de saída, duas observações são

TABELA 3

**Resultados de referência –  $p^* \equiv P/C$** 

Modelo	$p^E$	$p^S$
VPL	2,1676	-
Opções reais – sem opção de saída	2,2665	-
Opções reais – com opção de saída sem custos	1,6152	1,0087
Opções reais – com opção de saída com custo $a = 0,5$	1,7128	0,9606
Opções reais – com opção de saída com custo $a = 1$	1,7903	0,9125

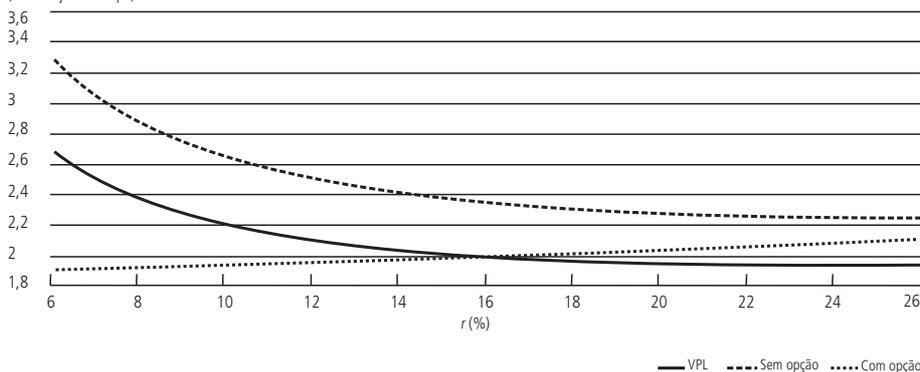
34. Agradecemos a um parecerista anônimo pela observância desse tópico.

35. Os cálculos foram feitos no *software Mathematica*.

interessantes: a razão indutora do desenvolvimento, ( $p^E$ ), cai com essa flexibilidade, mas é crescente à medida que o custo de encerrar aumenta. Por outro lado, quanto maior esse gasto, menor a razão crítica de saída ( $p^S$ ), devido ao efeito da *histerese*, já que o custo de concluir a produção dificulta a tomada dessa decisão.

O gráfico 2 mostra o efeito de variações na taxa de juros sobre o preço crítico de investimento,  $p^E$ , para cada um dos três primeiros casos (VPL, sem opção de saída, com opção de saída a custo zero). Quando se considera a flexibilidade operacional de encerrar, um aumento da taxa de juros irá dificultar apenas sensivelmente o investimento, elevando o preço crítico necessário para induzi-lo. Entretanto, quando se consideram o fluxo de caixa descontado e a opção real sem flexibilidade, o resultado contradiz as conclusões da teoria tradicional de que um aumento da taxa de juros tende a inibir o investimento. Conforme aponta o gráfico 2, a elevação da taxa de juros contribui para antecipar o investimento,<sup>36</sup> na medida em que reduz  $p^E$ . Esse exercício ilustra como o efeito da taxa de juros pode ser ambíguo na presença de opções reais, sobretudo quando se incorpora o custo como variável de estado (MCDONALD; SIEGEL, 1985): por um lado, taxas de juros mais elevadas inibem o investimento, mas, por outro, o impulsionam devido ao aumento do custo de oportunidade de manter em aberto a opção de investimento. Isso acontece porque as reservas desenvolvidas são consideradas um ativo cujo valor cresce com o aumento da taxa de juros. Portanto, haverá uma aceleração do desenvolvimento da jazida quando a taxa de juros crescer.<sup>37</sup>

GRÁFICO 2

**Variando a taxa de juros**(Taxa de juros -  $r - p^E$ )

36. Quando a taxa ultrapassa valores em torno de 40%, o preço crítico volta a crescer, conforme seria esperado pela teoria usual.

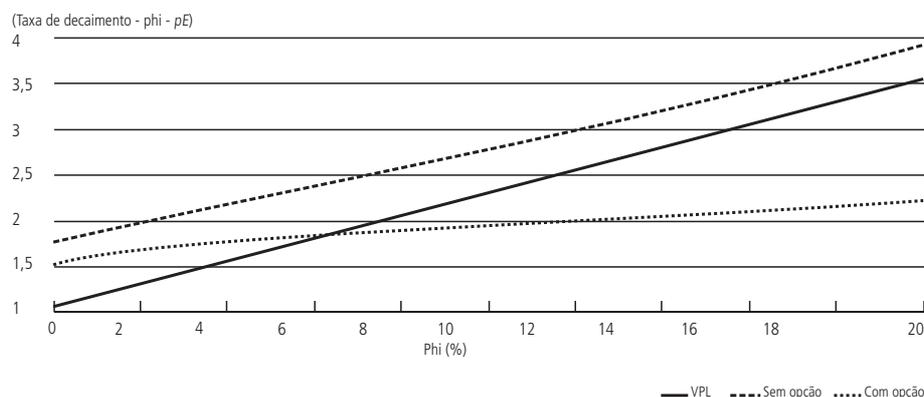
37. Cortazar e Schwartz (1993) apresentam um modelo de investimentos em estoques e chegam a conclusões análogas quanto ao efeito da taxa de juros e da incerteza sobre o preço que dispara a acumulação de estoques. Eles entendem que estes são considerados ativos e, como tal, aumentos da taxa de juros tendem a valorizá-los, apesar do usual efeito do aumento do custo de oportunidade de retê-los.

O gráfico 3 simula o impacto de variações em  $\phi$  sobre a razão preço-custo crítica,  $p^E$ . Dado que  $\phi^{-1}$  é a razão reserva/produção, quanto maior  $\phi$ , maiores as restrições tecnológicas da jazida, expressas no crescimento dos custos unitários. Uma taxa maior de vazão implica maior taxa de crescimento do custo de produção por barril, de modo que quanto maior  $\phi$  maior o preço crítico.<sup>38</sup> Na avaliação por VPL e na ausência de opção de encerramento, os efeitos são crescentes.

No entanto, quando se considera a presença de opção de saída, o preço crítico cresce bem menos, de modo que a distorção sobre a decisão de investir é bem menor (a escala do gráfico não permite visualizar, mas o valor máximo de  $p^E$ , no caso irrealista de  $\phi = 100\%$ , é 2,8). Isso era esperado, já que, em caso de crescimento muito elevado dos custos unitários, o concessionário tem a possibilidade de deixar a indústria, evitando perdas adicionais. Dessa forma, fica claro o papel da flexibilidade de saída sobre a disposição de investir, reduzindo a sensibilidade do preço crítico em relação às restrições quantitativas da jazida.

O gráfico 4 mostra o efeito de variações na taxa de crescimento do preço do petróleo sobre  $p^E$ , mantidos os demais parâmetros constantes.<sup>39</sup> Confirmando a intuição, um aumento da taxa esperada de valorização do petróleo irá reduzir o preço crítico, sobretudo no caso do valor presente descontado. No caso das opções reais, o valor do preço crítico decai até  $\alpha$  se aproximar da taxa de juros, quando

GRÁFICO 3  
Variando a taxa de crescimento dos custos unitários

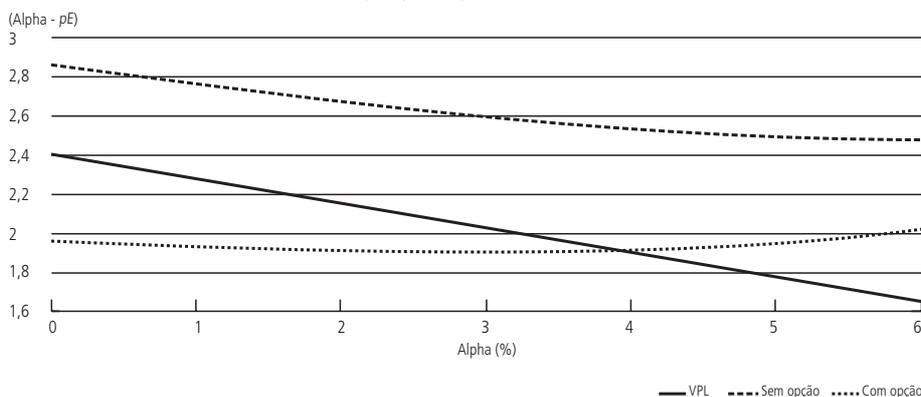


38. Voltando à interpretação de Davis e Cairns (1999), restrições tecnológicas reduzem o valor da reserva em relação ao estimado pelo princípio de Hotelling, aumentando o custo de oportunidade do investimento.

39. Conforme justificado na nota 10, adota-se a hipótese de riscos diversificáveis, o que é uma hipótese forte para o preço de uma commodity. Entretanto, a utilização do *drift* ajustado (sob a hipótese de ausência de risco sistemático)  $\alpha^* = r - \delta$  no exercício de simulação não traria ganhos para o entendimento do resultado que se quer mostrar, o que seria equivalente a variar  $\delta$  mantendo  $r$  constante.

GRÁFICO 4

## Variando a taxa de crescimento do preço do petróleo



então ela explode devido a uma indeterminação assintótica. Valores de  $\alpha$  acima da taxa de juros tornam o valor da opção de investir negativo.<sup>40</sup>

É interessante observar como esse resultado é consistente com o princípio de Hotelling, notadamente quanto às considerações de Davis e Cairns (1999). A condição necessária para que haja extração, segundo aquele princípio, é que a taxa de crescimento do valor sombra seja menor ou igual à taxa de juros (em equilíbrio, vale a igualdade se forem desprezadas as restrições físicas e tecnológicas para a extração do recurso), pois, caso contrário, valeria a pena para o produtor deixar os recursos no subsolo em virtude do ganho de capital daí recorrente. Isso equivale à condição de que  $r > \alpha - \phi$ , sendo  $\phi$  a variável que representa as restrições tecnológicas. Assim, quando se reintroduzem explicitamente os custos de operação, a proximidade entre a teoria clássica de Hotelling e a nova abordagem das opções reais é visível, contrariando aqueles que consideram a primeira ultrapassada.<sup>41</sup>

O gráfico 5 também mostra a redução da sensibilidade do investimento quando a opção de encerramento está presente. Nele, mostra-se a variação de  $p^E$  quando cresce a incerteza sobre o preço do petróleo, isto é, o desvio-padrão instantâneo dessa variável cresce. A inclinação da curva é sempre menor quando a opção de encerrar está presente, atestando uma sensibilidade menor.

O gráfico 6 apresenta os resultados das variações no coeficiente de correlação  $\rho$  sobre  $p^E$ . Um aumento no coeficiente de correlação reduz o preço crítico de entrada nos dois casos de opções reais,<sup>42</sup> tendo em vista a redução da variância total de

40. Além disso, deve-se ter em vista que, na presença de custos estocásticos, é necessário que a relação  $r > \alpha - \phi$  se mantenha para evitar que o valor da reserva se torne negativo. Por isso, evita-se simular valores de  $\alpha$  muito elevados, pois violaria essa condição.

41. Para uma visão geral do debate, ver Cairns (1998).

42. O preço crítico sob VPL independe desse parâmetro.

GRÁFICO 5

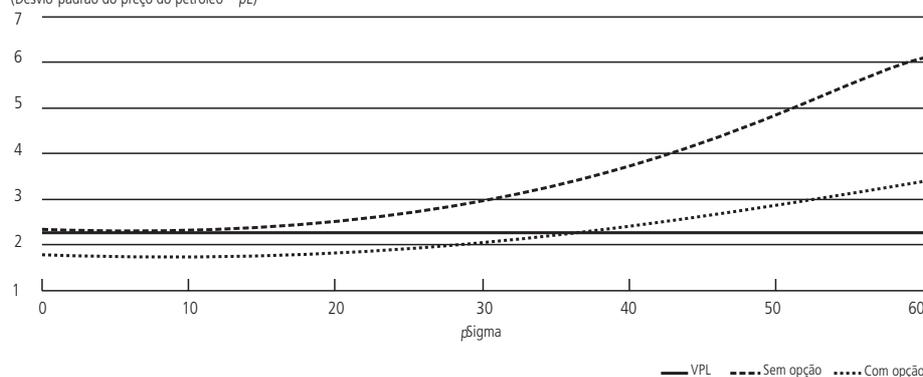
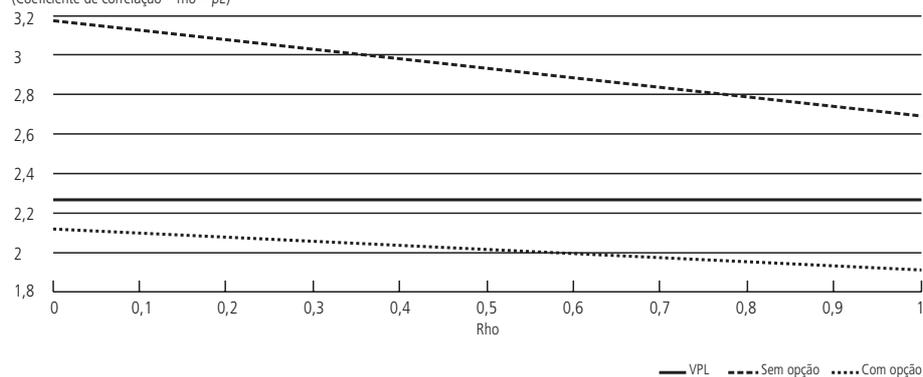
**Variando o desvio-padrão instantâneo do preço do petróleo –  $\sigma_p$** (Desvio-padrão do preço do petróleo –  $\rho E$ )

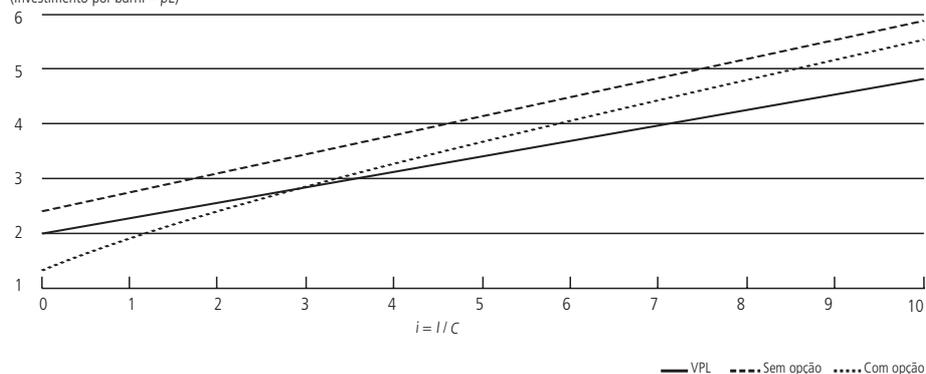
GRÁFICO 6

**Variando o coeficiente de correlação –  $\rho$** (Coeficiente de correlação –  $\rho E$ )

$p \equiv P/C$ , que é dada por  $Var(P-C) = \sigma_p^2 - 2\rho\sigma_p\sigma_c + \sigma_c^2$  (ver equação (13)). As sensibilidades são muito próximas nos dois casos. É interessante observar como a presença de duas variáveis de estado governando o valor da reserva introduz uma nova variável-chave para sua avaliação, o coeficiente de correlação instantânea entre elas,  $\rho$ , ou seja, a presença de incerteza nos custos pode, na verdade, reduzir a incerteza global do projeto.

Por fim, o gráfico 7 mostra variações no preço crítico  $p^E$  diante de alterações na qualidade da jazida, representada pelo investimento unitário necessário para desenvolvê-la. Aqui, o resultado é o oposto dos anteriores: na presença de opção de saída e para valores baixos de investimento (isto é, jazidas de alta qualidade), a decisão de investir se torna mais sensível a variações na qualidade da reserva, como se pode visualizar no gráfico 7, em que a inclinação da curva na presença de opção

GRÁFICO 7

**Variando o investimento no desenvolvimento**(Investimento por barril -  $p^E$ )

de saída (linha cheia) é maior no início. Para qualidades piores de jazida (alto  $I$ ), as sensibilidades são próximas.

**5 CONCLUSÕES**

Os exercícios de simulação mostrados permitem extrair duas conclusões principais. Em primeiro lugar, o preço crítico na presença de opção de saída é menor que na sua ausência, para a maior parte dos valores simulados para  $r$ ,  $\phi$  e  $\alpha$ . Isso significa que a presença dessa flexibilidade operacional atua como um forte estimulador do investimento, na medida em que adiciona valor ao projeto. É importante salientar que o efeito da opção de encerramento permite reduzir de forma significativa o efeito da irreversibilidade, o qual tende a majorar  $p^E$  em relação ao valor marshalliano. Isso significa que a presença de opção de concluir a produção pode viabilizar o desenvolvimento de uma jazida considerada inviável sob análise de VPL ou de opções reais sem opção de saída.

Em segundo lugar, nota-se que a opção de saída reduz significativamente a sensibilidade do investimento em relação a variações na taxa de juros, na taxa de crescimento dos custos (restrições tecnológicas) e no *drift* do preço.

É claro que o modelo e as simulações mostradas apresentam limitações e várias extensões são possíveis: pode-se introduzir um processo estocástico mais complexo para determinar o valor unitário do barril de petróleo (por exemplo, movimentos de reversão à média, movimentos de saltos com reversão à média, movimentos multifatoriais etc.). Além disso, a taxa de juros foi considerada exógena, mas poder-se-ia introduzir uma avaliação ajustada ao risco, via Capital Asset Pricing Model (CAPM), por exemplo. Por fim, consideram-se apenas duas flexibilidades possíveis (espera e saída), quando na prática os projetos de investimento possuem várias opções embutidas.

Mesmo com as limitações listadas, acreditamos que tais resultados são suficientes para mostrar a importância da consideração dos valores das flexibilidades (opções), sobretudo quando se introduzem os custos cumulativos. Tal conclusão se reforça diante dos resultados que mostram que restrições de produção (efeito Jevons) possuem um impacto bem menor sobre a decisão de investir quando as flexibilidades são introduzidas.

O que interessa observar é que a possibilidade de fechamento reduz  $p^E$ , facilitando o desenvolvimento de uma reserva. Se tomarmos a opção de encerramento como um caso estilizado de flexibilidade total no gerenciamento da produção, a análise descrita nos permite concluir que a maneira de atrair investimentos no setor de petróleo e gás seria conceder ao concessionário uma autonomia maior para reagir a fenômenos econômicos inesperados.

Essa discussão é relevante no ambiente regulatório que está sendo construído no setor brasileiro de petróleo e gás, com a proposta de se criar uma indústria competitiva.<sup>43</sup> Embora a Lei do Petróleo estabeleça que o produtor pode dispor livremente de sua produção, ele deve planejar com antecedência a extração e, portanto, estimar as condições de preço e demanda para o futuro. De acordo com a Lei 9.478/97, o concessionário deve entregar até outubro de cada ano um plano de produção para o ano seguinte. Esse plano de produção deve conter um planejamento mensal da produção de cada poço sob responsabilidade do concessionário. Cabe à Agência Nacional do Petróleo (ANP)<sup>44</sup> avaliar o plano, podendo aprová-lo ou solicitar modificações. Uma vez aprovado, o concessionário é obrigado a tomar todas as providências para cumpri-lo fielmente, sendo admitidos desvios bilaterais máximos de 15%. Os desvios além desse limite devem ser justificados e, em geral, estão relacionados a interrupções de ordem técnica (manutenção, imprevistos etc.). O que os resultados mostrados claramente sugerem é que se o concessionário tivesse a possibilidade de se desviar do plano por questões *econômicas*, haveria uma disposição maior de investir em desenvolvimento, já que o pressuposto fundamental da análise de opções reais é permitir ao agente um gerenciamento ativo de seu projeto, reagindo a mudanças no cenário econômico. Assim, por exemplo, se houvesse uma queda brusca de demanda, com reflexo nos preços, o concessionário poderia ter a opção de reduzir sua produção além do patamar estabelecido. É claro que o modelo apresentado é estilizado e, na prática, o concessionário possui

43. Desde a quebra do monopólio da Petrobras, em 1995, já foram realizadas sete rodadas de licitação de áreas de exploração à iniciativa privada. Cada concessionário tem cerca de nove anos para explorar sua área de concessão, devendo, ao término desse prazo, desenvolver e produzir o recurso ou devolver, por sua conta e risco, a área à União. Atualmente, dezenas de empresas exploram petróleo e gás nas bacias brasileiras, a maioria delas em parcerias e consórcios.

44. A ANP é uma agência reguladora vinculada ao Ministério das Minas e Energia, a quem cabe gerir as concessões de exploração de petróleo e gás à iniciativa privada. Ela assina, em nome da União, todos os contratos de concessão, sendo responsável também pelo monitoramento e fiscalização do mercado. As atribuições da ANP estão estabelecidas na Lei 9.478, de 6/08/1997, conhecida como Lei do Petróleo.

diversos graus de flexibilidade entre a operação e a saída definitiva da indústria. Mesmo assim, considerando a possibilidade de encerramento como uma opção extrema, a lição que se pode extrair aqui é de que a autonomia do agente para reagir a alterações inesperadas no cenário econômico é fundamental para garantir a atratividade de investimentos no setor de petróleo e gás.

### ABSTRACT

The aim of this paper is to simulate the impact of the option to exit on the decision to invest in the development of oil and gas fields, thus shedding some light on the debate about the importance of managerial flexibilities for an investment project. We adopt the Real Options approach, which is very powerful to evaluate investment opportunities when expenditures are irreversible. Our model includes cumulative costs (the so called Jevons' Effect), which are typical in the oil industry, and assumes that both price and operational cost follow a Geometric Brownian Motion. Two main conclusions emerge: a) the value of flexibility strongly reduces the effect of irreversibility on the decision to invest; and b) the option to leave the industry makes investment much less sensitive to changes in several parameters, including interest rates and depletion rates. Our results support the conclusion that a good way to raise investments in the development of oil fields is to allow producers to freely respond to unexpected economic changes.

### REFERÊNCIAS

- ADELMAN, M. A.; KOEHN, M.F.; SILVA, H. The valuation of oil reserves. In: SPE HYDROCARBON ECONOMICS AND EVALUATION SYMPOSIUM, Dallas, Texas, 1989. *Proceedings ...* Dallas, Texas, 8-10 Mar. 1989 (SPE paper 18.906).
- BJERKSUND, P.; EKERN, S. Managing investment opportunities under price uncertainty: from 'last Chance' to 'wait and see' strategies. *Financial Management*, v. 19, p. 65-83, Autumn 1990.
- BRENNAN, M. J.; SCHWARTZ, E. S. Evaluating natural resource investments. *Journal of Business*, v. 58, n. 2, p. 135-157, 1985.
- BRENNAN, M. J.; TRIGEORGIS, L. (Orgs.). *Project flexibility, agency, and competition: new developments in the theory and application of real options*. Nova York: Oxford University, 2000.
- CAIRNS, R. D. The economics of exploration for non-renewable resources. *Journal of Economic Surveys*, v. 4, n. 4, p. 361-395, Dec. 1990.
- . On Gray's rule and the stylized facts of non-renewable resources. *Journal of Economic Issues*, v. 28, n. 3, p. 777-798, Sep. 1994.
- . Are mineral deposits valuable? A reconciliation of theory and practice. *Resources Policy*, v. 24, n. 1, p. 19-24, Mar. 1998.
- CHERIAN, J. A.; PATEL, J.; KHIRIPKO, I. Optimal extraction of nonrenewable resources when costs cumulate. In: BRENNAN, M. J.; TRIGEORGIS, L. (Orgs.). *Project flexibility, agency, and competition: new developments in the theory and application of real options*. Nova York: Oxford University, 2000.
- COPELAND, T. Real options and strategic decisions. *Strategic Finance*, v. 83, n. 10, p. 8-10, Apr. 2002.
- CORTAZAR, G.; SCHWARTZ, E. A compound option model of production and intermediate inventories. *Journal of Business*, v. 66, n. 4, p. 517-540, 1993.

DAVIS, G. A.; CAIRNS, R. D. Valuing petroleum reserves using current net price. *Economic Inquiry*, v. 37, n. 2, p. 295-311, Apr. 1999.

DIAS, M. A. G. *Investimento sob incerteza na exploração e produção de petróleo*. Dissertação (Mestrado) – PUC, Rio de Janeiro. 1996. Não publicada.

———. *Real options in upstream petroleum: overview of models and applications*. 2001. Mimeo.

———. Valuation of exploration and production assets: an overview of real options models. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, v. 44, n. 1/2, p. 93-114, 2004.

DIXIT, A. K. Entry and exit decisions under uncertainty. *Journal of Political Economy*, v. 97, n. 3, p. 620-638, 1989.

———. Investment and hysteresis. *Journal of Economic Perspectives*, v. 6, n. 1, p. 107-132, 1992.

DIXIT, A. K.; PINDYCK, R. S. *Investment under uncertainty*. Nova Jersey: Princeton University Press, 1994.

GRAY, L. C. Rent under assumption of exhaustibility. *The Quarterly Journal of Economics*, v. 28, n. 3, p. 466-489, May 1914.

HILLIARD, J. E.; REIS, J. Valuation of commodities futures and options under stochastic convenience yields, interest rates, and jump diffusions in the spot. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, v. 33, n. 1, p. 61-86, 1998.

HOTELLING, H. The economics of exhaustible resources. *Journal of Political Economy*, p. 137-175, Apr. 1931.

KULATILAKA, N. Operating flexibilities in capital budgeting: substitutability and complementarity in real options. In: TRIGEORGIS, L. (Org.). *Real options in capital investment: models, strategies, and applications*. Praeger Ed., 1995.

KULATILAKA, N.; MARKS, S. G. The strategic value of flexibility: reducing the ability to compromise. *American Economic Review*, v. 78, n. 3, p. 574-580, 1988.

LIMA, G. A. C.; SUSLICK, S. B. Quantificação do momento de investir em ativos minerais por meio da teoria das opções reais. *Revista da Escola de Minas de Ouro Preto*, v. 54, n. 2, p. 149-154, 2001.

MAJD, S.; PINDYCK, R. S. Time to build, option value and investment decisions. *Journal of Financial Economics*, v. 18, p. 7-27, Mar. 1987.

McDONALD, R. L.; SIEGEL, D. R. Investment and the valuation of firms when there is an option to shut down. *International Economic Review*, v. 26, n. 2, p. 331-349, Jun. 1985.

MOSZKOWICZ, V. N. *Validação do critério de avaliação de projetos utilizando a teoria das opções reais: E & P de campos de petróleo nacionais, supondo preços como movimento geométrico browniano*. Dissertação (Mestrado) – Departamento de Engenharia Industrial, PUC, Rio de Janeiro. 2003. Não publicada.

OSMUNDSEN, P. Dynamic taxation of non-renewable natural resources under asymmetric information about reserves. *Canadian Journal of Economics*, v. 31, n. 4, p. 933-951, Oct. 1998.

PADDOCK, J. L.; SIEGEL, D. R.; SMITH, J. L. Option valuation of claims on real assets: the case of offshore petroleum leases. *The Quarterly Journal of Economics*, v. 103, p. 479-508, Aug. 1988.

PINDYCK, R. S. Irreversible investment, capacity choice, and the value of the firm. *American Economic Review*, v. 78, n. 5, p. 969-985, Dec. 1988.

———. Irreversibility, uncertainty, and investment. *Journal of Economic Literature*, v. 29, n. 3, p. 1.110-1.148, Sep. 1991.

SCHWARTZ, E. S.; SMITH, J. E. Short-term variations and long-term dynamics in commodity prices. *Management Science*, v. 46, n. 7, p. 893-911, Jul. 2000.

SCHWARTZ, E. S.; TRIGEORGIS, L. (Orgs.). *Real options and investment under uncertainty: classical readings and recent contributions*. Cambridge: MIT, 2001.

TOURINHO, O. A. F. *The valuation of reserves of natural resources: an option pricing approach*. Dissertation (Ph.D.) – University of California, Berkeley, Nov. 1979.

TRIGEORGIS, L. The nature of option interaction and the valuation of investments with multiple real options. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, v. 28, n. 1, p. 1-20, Mar. 1993.

(Originais recebidos em maio de 2006. Revistos em julho de 2006.)