Um modelo dinâmico multissetorial *

Mario Luiz Possas **

Neste artigo é proposto um modelo multissetorial (matricial) capaz de representar de forma integrada os mecanismos básicos da dinâmica de uma economia capitalista, tanto os de ciclo econômico como os de tendência. A multiplicidade de variáveis utilizadas e a escassez e simplicidade das relações funcionais estabelecidas, ao lado da consideração explícita dos parâmetros como variáveis discretas parcialmente exógenas, permitem minimizar os componentes estritamente endógenos da trajetória dinâmica. Com isso, torna-se possível aplicar o modelo tanto para investigar os efeitos teóricos sobre a trajetória dos vários setores (assim como de variáveis agregadas, de diferentes hipóteses ad hoc *de comportamento dos parâmetros e das variáveis exógenas), quanto, eventualmente, para a análise de trajetórias concretas (mediante especificação destes parâmetros e variáveis exógenas sob determinadas hipóteses estatísticas). O modelo de insumo-produto é aqui empregado da seguinte forma:* a) *em versão semifechada, com a inclusão de matrizes distributivas, de consumo e de investimento entre as relações endógenas, mantendo como demanda final apenas os gastos do governo e as exportações; e* b) *em forma dinâmica, pela introdução de* lags *temporais no investimento e na produção e pela consideração, na matriz de insumos, dos volumes de produção, como* input, *e de vendas, como* output, *excluindo qualquer hipótese de equilíbrio e permitindo analisar o efeito dinâmico das variações de estoques. Após uma exposição sucinta do modelo em sua forma geral, que dá lugar a uma equação matricial a diferenças, é feita uma análise matemática sob hipóteses simplificadoras para examinar as propriedades da trajetória, em particular a geração de flutuações cíclicas, e as respectivas condições de estabilidade.*

1 — Introdução

O objetivo deste trabalho é apresentar um modelo multissetorial capaz de integrar os mecanismos da dinâmica da economia capita-

* Este trabalho resume parte do capítulo final da tese de doutoramento do autor [cf. Possas (1983)]. Agradeço os comentários de um leitor anônimo da *PPE*, responsabilizando-me, contudo, pelas eventuais falhas remanescentes.

** Do Departamento de Economia da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP).

Pesq. Plan. Econ. | Rio de Janeiro, | 14 (2) | 477 a 524 | ago. 1984

lista, tanto os de ciclo como os de tendência, com base em pressupostos teóricos a serem esboçados sucintamente.

Talvez não seja preciso registrar que se trata de um modelo teórico, no sentido de que pretende captar e explicar o modo de funcionamento da dinâmica capitalista a partir dos seus determinantes e relações básicas, deixando de lado aspectos secundários, bem como particularidades históricas, nacionais e institucionais que sem dúvida afetam a dinâmica real e que deveriam ser considerados numa análise concreta, mas que aqui aparecerão sob a forma de parâmetros ou variáveis exógenas ao modelo. Assim, ao contrário do que seria um modelo econométrico, não pretende ser adequado à aplicação imediata, embora acredite que em sua forma mais geral, com algum refinamento adicional (à parte a dificuldade de obter certos dados com o mínimo de qualidade), possa servir como instrumento de análise concreta. O que justifica esta crença é o nível de abrangência e desagregação com que será construído, ao lado do pequeno número de variáveis estritamente endógenas, o que lhe permitirá grande flexibilidade na fixação (ou hipóteses de variação) dos parâmetros e dos termos exógenos sob diferentes situações específicas.

A característica distintiva deste modelo em relação aos habitualmente empregados para explicar a dinâmica capitalista, seja o crescimento a longo prazo ou o ciclo econômico, é a incorporação explícita dos determinantes microeconômicos desta dinâmica. A unidade de análise e de agregação será a indústria ou mercado, e não o conjunto de economia ou do setor privado, ou mesmo os departamentos ou macrossetores de destinação da produção final, como, por exemplo, no esquema empregado por Kalecki para expor a determinação da renda em conexão com sua distribuição. [1] O propósito é o de deixar transparecer a influência específica sobre a dinâmica global das decisões de dispêndio das unidades de gasto e renda e de sua inserção na estrutura de produção, distribuição e consumo. Com isso, pretende-se evitar a excessiva agregação dos modelos macroeconômicos que, em nome da simplicidade da exposição e dos resultados, não

1 Kalecki (1954, Cap. 3, ou 1968).

apenas obscurece o papel das relações intersetoriais, mas de fato as *distorce,* ao representar seus efeitos por meio de parâmetros "médios" que não podem permanecer estáveis nem mesmo frente às alterações da estrutura produtiva pela ação das próprias variáveis endógenas (consumo, investimento, etc.).

Ao colocar em primeiro plano como referência teórica as relações intersetoriais, parece inevitável recorrer-se às técnicas de insumo-produto formuladas originalmente por Leontief e amplamente aperfeiçoadas e utilizadas desde então. É bem verdade que a aplicação destes métodos tem-se voltado com maior intensidade à pesquisa empírica, e quase exclusivamente à análise estática,[2] mas não há impedimento *a priori* para que sejam usados em um modelo dinâmico. Seu próprio autor realizou uma tentativa nesta direção, embora com resultados pouco satisfatórios.[3]

No âmbito teórico, o desenvolvimento das técnicas de manipulação das matrizes de relações intersetoriais e de suas propriedades matemáticas tem sido considerável, mas infelizmente limitado ao marco da análise das condições de equilíbrio econômico geral. Para esta, importa menos a trajetória do sistema econômico do que a verificação das suas condições de estabilidade, isto é, de convergência a uma situação de equilíbrio, com o que os resultados formais obtidos são de pouca valia para um modelo dinâmico.

Por outro lado, no âmbito da pesquisa aplicada destas técnicas, tem prevalecido uma tendência a mantê-las isoladas do corpo central da teoria econômica, confinando-as a um ramo especializado de Economia Aplicada. Tal tendência parece resultar de um equívoco básico que opõe os economistas "keynesianos", que lidam com conceitos macroeconômicos agregados e até certo ponto com a dinâmica, aos autodenominados *"input-outputters"*, que privilegiam as parti-

2 Especialmente a análise de "setores-chave" baseada na avaliação dos *backward* e *forward linkages* dos setores da economia, que usualmente nem sequer incorporam os efeitos multiplicadores da renda, quanto menos os efeitos aceleradores sobre o investimento.

3 Leontief (1970). A principal deficiência do modelo é o irrealismo na determinação do investimento, que por hipótese sempre ajusta a capacidade produtiva.

cularidades técnicas da estrutura econômica num contexto quase sempre estático.[4] Esta dicotomia é, em boa medida, artificial e pode e deve ser superada. O modelo apresentado a seguir é um esforço nessa direção, propondo compatibilizar estes dois aspectos pela introdução dos conceitos macroeconômicos — basicamente, os relacionados à demanda efetiva —, de forma *desagregada*, e pela incorporação da matriz de insumo-produto e correlatas — matrizes de investimento e consumo, entre outras —, num contexto *dinâmico*. Em poucas palavras, o que se propõe é uma síntese de Kalecki com Leontief, ambos devidamente adaptados.[5]

Encontram-se, no entanto, com certa freqüência algumas objeções ao uso de modelos de insumo-produto que convém esclarecer de início. A mais comum refere-se à suposta constância dos coeficientes de produção (ou de capital, se for o caso), que envolveria duas hipóteses consideradas irrealistas: a manutenção de preços relativos inalterados e a rigidez dos coeficientes técnicos, pressupondo retornos constantes na utilização dos insumos (ou do capital fixo). Quanto ao primeiro aspecto, trata-se de um mal-entendido. É verdade que quase todas as tabelas de insumo-produto lidam exclusivamente com valores monetários, o que pressupõe uma dada estrutura de preços relativos. Como cada coeficiente adimensional daí resultante deve ser interpretado como o produto de um coeficiente técnico (físico) dimensional pela relação dos preços correspondentes, parece à primeira vista que deverá se modificar com qualquer variação de preços relativos. Entretanto, esta conclusão é falsa: os coeficientes assim obtidos podem ser encarados como coeficientes *técnicos*, sobre os quais se operou uma simples mudança na unidade física de medida dos produtos respectivos de modo a convertê-los em grande-

4 Veja-se, por exemplo, Gossling (1977), o qual chega a sugerir que a "insuficiência de demanda efetiva" na *Teoria Geral* de Keynes teria sido fruto de uma queda, à época, dos coeficientes de insumos e de capital; se a situação fosse a inversa, teria acarretado uma "insuficiência de oferta efetiva" (*sic*), invalidando as "técnicas keynesianas de pensamento" (p. 21).

5 Sem esquecer que entre os determinantes da tendência as contribuições de Schumpeter têm um papel fundamental.

zas homogêneas (monetárias).[6] Dada uma estrutura de preços inicial, esta matriz não sofre nenhuma influência direta de qualquer mudança posterior nos preços relativos, sendo, portanto, indiferente o emprego de unidades físicas ou monetárias. O único efeito possível seria *indireto,* se a alteração de preços relativos vier a induzir alguma modificação nos próprios coeficientes físicos.

Isto nos leva ao segundo aspecto: a suposição de coeficientes inalterados frente a mudanças na estrutura produtiva. De fato, esta hipótese não tem uma validade teórica geral, mas é menos arbitrária do que poderia parecer, especialmente aos economistas habituados às hipóteses neoclássicas tradicionais de substituição contínua de fatores em função dos preços e de rendimentos decrescentes.

Em primeiro lugar, os coeficientes só precisam manter-se fixos durante o período de referência para a aplicação da matriz de relações intersetoriais, que deve ser no mínimo igual ao maior período de produção setorial. Como este período não é muito grande no caso da produção intermediária, e em geral inferior ao período de investimento,[7] não é de se esperar a ocorrência de mudanças técnicas importantes durante o intervalo em que se supõem fixos os coeficientes. De um período para outro, porém, a matriz de coeficientes

[6] Formalmente, a operação é a seguinte: dada uma matriz **A** de coeficientes técnicos físicos de produção, sua conversão em matriz de coeficientes técnicos adimensionais seria feita pela equação $\hat{\mathbf{p}}\mathbf{A}\hat{\mathbf{p}}^{-1}$, onde $\hat{\mathbf{p}}$ é a matriz diagonal, formada pelos componentes do vetor de preços **p**, e o expoente $^{-1}$ indica inversão. A matriz obtida é, portanto, semelhante à matriz **A**, tendo o mesmo determinante e os mesmos autovalores, o mesmo ocorrendo com sua inversa, $\hat{\mathbf{p}}\mathbf{A}^{-1}\hat{\mathbf{p}}^{-1}$. Esta operação consiste numa simples mudança de unidades. Ressalve-se, no entanto, que isto só se aplica a setores com produtos homogêneos, ou cujo *mix* não se altera no intervalo considerado.

[7] Os períodos de produção e de investimento são definidos, respectivamente, como os intervalos médios entre decisões de produzir e investir de cada unidade produtiva. Em geral, o primeiro terá como limite inferior o período de *turnover* do capital circulante, isto é, da aquisição de insumos até a venda do produto acabado, enquanto o segundo não será em regra menor que o prazo de "gestação" ou "maturação" do investimento, isto é, da encomenda dos bens de investimento até sua instalação e disponibilidade para operação. Por simplicidade, considera-se aqui o período médio de cada setor de produção, supondo-o homogêneo em cada setor e determinado tecnicamente.

pode e deve ser modificada em função de mudanças técnicas;[8] o emprego habitual de coeficientes constantes ao longo do tempo é apenas uma hipótese simplificadora, em prejuízo maior ou menor do realismo, e que pode ser dispensada.

Em segundo lugar, a alteração dos coeficientes poderia ocorrer não só por mudanças técnicas, mas também por não-linearidades na utilização dos insumos, isto é, pela ocorrência de rendimentos não-constantes na produção. Mas é importante notar que neste caso supor coeficientes dados em cada período de produção não implica admitir retornos constantes de escala — o que seria muito irrealista — nem mesmo rendimentos constantes a curto prazo, ou seja, com técnica e capacidade produtiva dadas, o que seria uma hipótese geral bastante razoável como aproximação. Esta aproximação é *desnecessária* porque a produção não é tomada como variável de ajuste, mas sim *dada* juntamente com os coeficientes de insumos a cada período; a variável resultante são as vendas de cada setor, que pode diferir da produção através de variação de estoques.

Em função disto, deve-se desfazer o equívoco comum de identificar o modelo de insumo-produto com um sistema de equilíbrio geral de tipo walrasiano, o que tornaria difícil sua aplicação dinâmica. Dependendo da forma em que seja utilizado, ele torna dispensável *qualquer* noção de equilíbrio, inclusive entre oferta e demanda. A única hipótese necessária é simplesmente o truísmo de que o total de compras iguala o total de vendas. Para tanto, como foi sugerido acima, basta introduzir como variável de entrada o vetor de produção programada de cada setor — que implica uma demanda real sobre cada setor de produção intermediária — e como variável de saída o vetor de vendas intermediárias de cada setor, adicionado ao(s) vetor(es) da demanda final, obtendo-se o total de vendas por setor.[9] Assim, respeitadas as *restrições* quanto ao nível máximo de *produção,* limitado pela capacidade instalada, e de *vendas,* limi-

[8] Em princípio, estas mudanças podem ser "autônomas" ou induzidas por alterações de preços relativos dos insumos acima de um determinado patamar (estas possibilidades serão consideradas mais adiante).

[9] Dados os vetores de produção $\mathbf{x}^*$ e de demanda final ${}^f\mathbf{x}$ e a matriz de coeficientes de insumos $\mathbf{A}$, o vetor de vendas totais será $\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}^* + {}^f\mathbf{x}$. Nenhuma hipótese de equilíbrio foi introduzida.

tado pelo volume de estoques, nada impede que o nível de vendas de qualquer setor intermediário possa diferir do nível previsto (que determinou a produção programada) e que a diferença apareça como variação imprevista de estoques. Neste sentido, o modelo permite até mesmo incorporar os efeitos dinâmicos das flutuações das vendas sobre a produção e a renda, e desta sobre as vendas novamente. Além disso, o consumo e o investimento não serão considerados parte da demanda final exógena, como é usual, mas incorporados como variáveis endógenas,[10] tornando o modelo quase-fechado e de maior poder explicativo. Apenas as exportações[11] e os gastos governamentais, relativamente independentes do nível interno de atividade, serão mantidos como demanda final exógena.

A apresentação da versão mais geral e completa do modelo terá um conteúdo formal bastante complexo, e a análise rigorosa dos resultados exigiria um considerável esforço suplementar, principalmente através de simulações. Contudo, a análise de uma versão simplificada permitirá extrair algumas das conclusões gerais mais relevantes para a interpretação da dinâmica da economia capitalista.

2 — O modelo dinâmico geral

O modelo será construído pela generalização para o conjunto da economia e integração dos processos de decisão e de interação relativos à produção, geração e distribuição de renda e investimento de uma indústria ou mercado qualquer. A exclusão de qualquer agregação além do mínimo razoável — o nível de indústria ou mercado para a produção e o investimento, as categorias funcionais ou sociais para a formação e apropriação de rendimentos — torna inevitável

[10] Não inteiramente no caso do investimento, devido à presença de investimentos tanto em inovações como públicos, que mantêm certo grau de dependência da política econômica e de autonomia das condições estritas de mercado.

[11] Quanto às importações, aparecerão implicitamente como um "vazamento" das vendas dos setores, uma vez que, por hipótese, os coeficientes de insumos, capital e consumo referir-se-ão apenas à demanda por produtos domésticos.

o emprego do cálculo matricial, à custa da simplicidade e alguma transparência analítica, mas em benefício, espera-se, do realismo e rigor da abordagem.

O eixo principal do modelo é a determinação do volume físico de vendas de cada um dos n setores, para os diferentes destinos, durante um período t de referência: [12]

$$\mathbf{x}^t = {}^a\mathbf{x}^t + {}^c\mathbf{x}^t + {}^i\mathbf{x}^t + {}^f\mathbf{x}^t \tag{1}$$

onde $\mathbf{x}^t$ é o vetor $(n \times 1)$ de vendas totais por setor, ${}^a\mathbf{x}^t$ o vetor de vendas de produtos intermediários, ${}^c\mathbf{x}^t$ o de vendas para consumo, ${}^i\mathbf{x}^t$ o de vendas de bens de investimento e ${}^f\mathbf{x}^t$ o de vendas para demanda final autônoma (exportação e gastos do governo). Será explicitada em seqüência a determinação de cada uma destas parcelas. Os vetores de vendas intermediárias e para consumo dependem da determinação prévia dos níveis programados de produção setorial em t.

2.1 — Produção

Admite-se que o nível de produção física programado para o período de produção $t + 1$ de um setor i qualquer é dado por:

$$x_i^{*t+1} = (1 + \sigma_i)\ {}^*x_i^{t+1} - {}^s x_i^t$$

onde x_i^{*t+1} denota a produção programada, ${}^*x_i^{t+1}$ as vendas previstas, ${}^s x_i^t$ o volume de estoques ao final do período t e σ_i a proporção das vendas que as empresas do setor planejam em média manter como estoques no período $t + 1$. A equação simplesmente afirma que a produção visa atender as vendas esperadas e o acréscimo de estoques desejado.

[12] Originalmente escolhido, por conveniência, como o menor período de produção dentre os vários setores. A vantagem desta hipótese é que evitaria supor as decisões de produção das empresas concentradas no tempo, captando melhor a multiplicidade das decisões dentro de uma indústria. Nesta versão resumida, no entanto, será considerado o período médio de produção, para evitar complicar excessivamente o modelo.

A determinação das vendas previstas, em condições de estabilidade na estrutura do mercado, pode ser aproximada pela projeção do crescimento recente:

$$^{*}x_i^{t+1} = x_i^t + \gamma_i \ (x_i^t - x_i^{t-1})$$

onde x_i^t é o volume de vendas efetivo e γ_i um parâmetro de projeção que reflete o estado das expectativas e as condições de concorrência. Em geral, deve-se ter $\gamma_i \gtreqless 1$, [13] exceto quando o estado de confiança do mercado for muito acima ou abaixo do normal, ou quando algumas empresas tiverem a intenção de desenvolver um esforço de vendas para ampliar suas fatias de mercado, crescendo mais rápido que o mercado.

Substituindo a segunda equação na primeira, tem-se:

$$x_i^{*t+1} = (1 + \sigma_i) \ [x_i^t + \gamma_i \ (x_i^t - x_i^{t-1})] - {}^s x_i^t \tag{2}$$

A parcela referente aos estoques pode ser eliminada como segue. Como, por definição, a produção é igual ao total de vendas mais a variação de estoques de produtos acabados, ou semi-acabados, $x_i^{*t} = x_i^t + {}^s x_i^t - {}^s x_i^{t-1}$, pode-se substituir este resultado na equação anterior defasada de 1 período, obtendo-se:

$$x_i^t + {}^s x_i^t = (1 + \sigma_i) \ [x_i^{t-1} + \gamma_i \ (x_i^{t-1} - x_i^{t-2})]$$

Finalmente, a substituição deste resultado na equação anterior fornece:

$$x_i^{*t+1} = [1 + (1 + \sigma_i) \ (1 + \gamma_i)] \ x_i^t - (1 + \sigma_i) \ (1 + 2\gamma_i) \ x_i^{t-1} + \\ + (1 + \sigma_i) \ \gamma_i x_i^{t-2} \tag{2'}$$

Esta equação supõe implicitamente o mesmo período de produção para os vários setores. Pode-se eliminar essa restrição desnecessária tomando como intervalo de tempo de referência o menor dentre os

[13] Note-se que, para simplificar o modelo, a projeção do crescimento é suposta linear, podendo ser interpretada como uma projeção cautelosa. Caso se pretenda corrigir a projeção, considerando-a em termos de taxa em lugar do crescimento absoluto, basta fazer γ_i adequadamente maior.

períodos de produção. Definindo a extensão do período de produção de cada setor como h_i (inteiro) $\geqslant 1$, a equação anterior pode ser modificada adequadamente. Esta precisão é importante porque permitiria explicitar uma das especificidades setoriais que afetam a dinâmica global, mas tornaria o modelo mais complicado. Nesta exposição resumida será então preferível tomar como unidade de tempo o período médio de produção, ou, mais precisamente, supor que tais períodos são uniformes.

Em notação matricial, supor um único período de produção implica $\hat{\mathbf{h}} = \mathbf{I}$, e a equação (2') reduz-se a:

$$\mathbf{x}^{*t+1} = [\mathbf{I} + (\mathbf{I} + \hat{\sigma})\ (\mathbf{I} + \hat{\gamma})]\ \mathbf{x}^t - (\mathbf{I} + \hat{\sigma})\ (\mathbf{I} + 2\hat{\gamma})\ \mathbf{x}^{t-1} + \\ + (\mathbf{I} + \hat{\sigma})\ \hat{\gamma}\mathbf{x}^{t-2} \qquad (3$$

onde $\mathbf{x}^*$ é o vetor $(n \times 1)$ de produção setorial, $\mathbf{x}$ o vetor $(n \times 1)$ de vendas e $\hat{\sigma}$ e $\hat{\gamma}$ as matrizes diagonais formadas com σ_i e γ_i.

Além disso, a produção de cada setor determinada em (2) está sujeita à restrição de que não pode ser negativa nem exceder a capacidade por mais que uma fração β_i (horas extras, novos turnos, etc.) :

$$0 \leqslant x_i^{*t+1} \leqslant \beta_i \bar{x}_i^t$$

onde $\bar{x}_i^t$ é a capacidade produtiva instalada no setor no final do período t, e que se supõe disponível para operar no período $t + 1$, e $\beta_i \geqslant 1$ representa a margem de sobreutilização possível da capacidade. Generalizando: [14]

$$\phi \leqslant \mathbf{x}^{*t+1} \leqslant \hat{\beta}\bar{\mathbf{x}}^t \qquad (4)$$

onde ϕ é o vetor nulo $(n \times 1)$. A restrição análoga para as vendas é a seguinte: sendo a produção igual às vendas mais a variação

[14] Em mercados competitivos com preços flexíveis, normalmente $\beta_i = 1$, e a restrição será $x_i^{*t+1} = \bar{x}^t$, que se substitui nesses casos à própria equação (3).

de estoques, segue-se que as vendas não podem ultrapassar a produção mais o total anterior de estoques:[15]

$$0 \leqslant x_i^{t+1} \leqslant x_i^{*t+1} + {}^s x_i^t$$

Substituindo o último membro pelo seu valor na equação (2), resulta:

$$0 \leqslant x_i^{t+1} \leqslant (1 + \sigma_i) \; [x_i^t + \gamma_i \, (x_i^t - x_i^{t-1})]$$

Em notação matricial:

$$\phi \leqslant \mathbf{x}^{t+1} \leqslant (\mathbf{I} + \hat{\sigma}) \; [\mathbf{x}^t + \hat{\gamma}\,(\mathbf{x}^t - \mathbf{x}^{t-1})] \qquad (5)$$

2.2 — Vendas intermediárias

As vendas de produtos intermediários são determinadas pelas necessidades de produção dos diferentes setores, conforme a equação (2'), e pela estrutura de coeficientes técnicos de insumos produzidos domesticamente, representada pela coluna correspondente da matriz $(n \times n)$ de coeficientes físicos de insumos $\mathbf{A}$. Pode-se, então, escrever:

$${}^a\mathbf{x}^t = \mathbf{A}\mathbf{x}^{*t} \qquad (6)$$

em que o vetor de produção $\mathbf{x}^{*t}$ é dado pela equação (3) sujeita à restrição (4), ambas defasadas, e o vetor de vendas ${}^a\mathbf{x}^t$ sujeito à restrição (5), bem como às restrições contidas nas notas 14 e 15 para os mercados com preços flexíveis. Note-se que a imposição da restrição (5) às vendas de bens intermediários implica uma restrição adicional à produção dos diferentes setores, além da restrição (4), estabelecendo como que um "racionamento" nas compras de insumos.

15 Em mercados com preços flexíveis, a restrição é, simplesmente, $x_i^{t+1} = x_i^{*t+1}$.

A propósito desta equação (6), pode ser útil um breve comentário comparativo com os métodos usuais de insumo-produto. Estes, como se sabe, não fazem normalmente distinção entre produção e vendas, admitindo que a oferta (e, portanto, a produção) se ajusta à demanda em cada setor durante o período de referência, com o que a matriz inversa de Leontief pode ser utilizada para medir os impactos diretos e indiretos da demanda final sobre a produção, o emprego e a renda. Os multiplicadores estáticos assim calculados referem-se a um período de tempo arbitrário, sujeito apenas à restrição de que deve ser longo o bastante para que a produção se ajuste à demanda e suficientemente curto para que os coeficientes da matriz possam ser admitidos como fixos.

No presente modelo, ao contrário, a inversa de Leontief ou matriz de impactos não tem maior significado, porque a igualdade entre produção e vendas não é, em geral, assumida — exceto nos setores de preços flexíveis, em que a variação de estoques como variável de ajuste entre produção e vendas está excluída (e a própria produção está limitada mais ou menos rigidamente à capacidade instalada) —, assim como o período de referência não é arbitrário ou contábil, mas economicamente definido, como um período de produção. Os efeitos multiplicadores da demanda final sobre a produção e o emprego, nesta ótica, só se dariam sucessivamente, pela interação entre vendas e decisões de produzir, nos termos da equação (3). A capacidade instalada atua como restrição à produção, conforme (4), mas não estará necessariamente fixa durante a operação deste "multiplicador", uma vez que os períodos de produção e investimento podem ser heterogêneos a ponto de o período de produção de alguns setores ser da mesma ordem de grandeza do período de investimento de outros, ou mesmo do próprio setor.

2.3 — Formação de renda e o consumo

A geração de renda ou valor adicionado em cada setor está associada ao nível de produção e ao processo de formação de preços. Admitindo-se a fixação de um *mark up* sobre os custos diretos unitários (de salários e insumos) como regra predominante de formação dos preços,[16] e que estes custos sejam essencialmente independentes do volume de produção, pode-se escrever para um período t:

$$\mathbf{p}^t = (\mathbf{p}^t\mathbf{A} + \mathbf{w}^t)\ \hat{\mathbf{k}} \tag{7}$$

onde $\mathbf{p}^t$ é o vetor $(1 \times n)$ de preços, $\mathbf{w}^t$ é o vetor $(1 \times n)$ de custos de salários por unidade de produção (igual ao quociente entre o salário médio e a produtividade média do trabalho) e $\hat{\mathbf{k}}$ a matriz diagonal formada com os *mark ups* k_i de cada setor, dados em função dos padrões de concorrência respectivos. Supõe-se que esta equação seja válida para um período de produção, isto é, que a produção é definida de antemão, juntamente com o *mark up* e os salários médios — e, portanto, os custos salariais unitários $\mathbf{w}^t$ —, e que os preços em geral também sejam dados no início do período de produção, como preços de insumos ou de produtos. Isto só não se aplica aos produtos com preços flexíveis, que podem variar ao longo do período, mas enquanto preços de produtos e não enquanto insumos. Não há qualquer incoerência nesta hipótese, pois é perfeitamente possível que o preço de um determinado insumo seja flexível ao longo do seu próprio período de produção, ao mesmo tempo em que é dado para as indústrias que o demandam — ainda que em cada uma delas num nível possivelmente diferente.

A fim de tornar geral a equação (7), portanto, é suficiente tomar como unidade de tempo de referência, nesta versão simplificada, o período de produção médio, supor que o vetor de preços $\mathbf{p}^t$ refere-se à média de cada período, de forma a abranger todos os casos, e, finalmente, assumir que os produtos de mercados competitivos com preços flexíveis têm estes preços dados exogenamente.[17] É desnecessário, para os objetivos limitados deste modelo, tentar formular hipóteses gerais sobre o comportamento destes preços, em parte porque estão sujeitos à influência de elementos especulativos, mas

16 Exceto nos mercados de preços flexíveis. A adaptação que deve ser feita nestes casos é explicada adiante.

17 Isto equivale a interpretar o parâmetro k_i destes setores como a relação preço/custo direto *ex-post*, determinada pelo volume de produção do setor, pela elasticidade-preço da demanda e pelos custos diretos, conhecidos *ex-ante*.

principalmente porque não se está assumindo nenhuma hipótese de substituição contínua de produtos ao estilo neoclássico, seja de insumos ou de bens de consumo, em função dos preços.

É suficiente reconhecer, no caso dos insumos, que seu preço estará sujeito a variações ao longo do seu período de produção, devidas principalmente à elasticidade da oferta (incluindo os componentes especulativos), pois a elasticidade de sua demanda a curto prazo será muito baixa, refletindo a dificuldade de substituição dos insumos no período de produção — quer dizer, sem qualquer mudança técnica. A utilização de um determinado insumo (e, portanto, a produção dos setores que o empregam) será limitada pela sua disponibilidade, e não por seu preço — como se verifica na equação (6) com as respectivas restrições. As variações dos preços flexíveis de bens de consumo, por sua vez, dependerão também das elasticidades-preço e renda da demanda, porém tampouco é certo que os padrões de consumo se alterem de imediato frente a qualquer mudança dos preços relativos. Em qualquer caso, todavia, as variações de preços ocorridas entre períodos de produção ou ao longo de um período (no caso de preços flexíveis) devem ser consideradas como um dos fatores responsáveis por possíveis alterações, a cada período de produção, nos coeficientes de insumo e nos de consumo (apresentados a seguir), ou, a cada período de investimento, nos de capital. A questão da mudança dos coeficientes será abordada mais à frente.

Dados os coeficientes de salários e os preços, fica também determinado o outro componente básico da renda, o excedente bruto,[18] por unidade de produção:

$$\mathbf{e}^t = \mathbf{p}^t\,(\mathbf{I} - \mathbf{A}) - \mathbf{w}^t$$

[18] Inclui os lucros, ordenados, impostos, juros, aluguéis e serviços não incluídos nos custos diretos. A rigor, estes itens deveriam ser desmembrados, o que, entretanto, traria sérias dificuldades, porque muitos deles são custos mais ou menos fixos e não poderiam ser tratados como um coeficiente unitário basicamente independente do nível de produção, ao contrário do excedente bruto como um todo, introduzindo não-linearidades que complicariam o modelo.

em que $\mathbf{e}^t$ é o vetor $(1 \times n)$ de coeficientes de excedente bruto unitário, ou, substituindo (7) nesta equação:

$$\mathbf{e}^t = \mathbf{w}^t\hat{\mathbf{k}}(\mathbf{I} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{k}})^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{A}) - \mathbf{w}^t \qquad (8)$$

Note-se que, sendo $\mathbf{w}^t$, $\hat{\mathbf{k}}$ e $\mathbf{A}$ dados antecipadamente a cada período de produção t, $\mathbf{e}^t$ também o será. Em princípio, estes parâmetros podem ser considerados independentes do nível de produção, mas qualquer hipótese de variação pode ser introduzida exogenamente. No caso particular dos mercados de preços flexíveis, o componente e_i^t respectivo será determinado exogenamente, da mesma forma que o preço p_i^t e o *mark up* k_i, como a média observada no período.[19]

Reunindo os coeficientes $\mathbf{w}$ e $\mathbf{e}$ de rendimentos por unidade de produção, pode-se construir a matriz $(2 \times n)$ auxiliar $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix}$ que permite calcular o total de renda de cada classe funcional de renda, formando o vetor (2×1) $\mathbf{y}_v^t$:

$$\mathbf{y}_v^t = \mathbf{V}\mathbf{x}^{*t} \qquad (9)$$

O próximo passo é converter a geração e apropriação funcional dos rendimentos em renda pessoal ou familiar, a fim de determinar em seguida o consumo. Para tanto, é possível construir duas matrizes adicionais: a matriz $\mathbf{D}$ $(m \times 2)$, tendo como elementos a quantidade de renda familiar de cada uma das m classes de renda familiar necessárias para caracterizar os diferentes padrões de consumo, que se origina de uma unidade de renda apropriada por cada uma das duas categorias de renda funcional nas atividades econômicas capitalistas; e a matriz $\mathbf{S}$ $(m \times m)$, que representa os fluxos unitários de renda familiar gasta e recebida a título de serviços pessoais, fora dos n setores incluídos no sistema empresarial. Denotando por $\mathbf{y}_d^t$ o vetor $(m \times 1)$ de renda familiar recebida em t, pode-se então escrever:

$$\mathbf{y}_d^t = \mathbf{D}\mathbf{y}_v^t + \mathbf{S}\mathbf{y}_d^t$$

[19] Supor que também nestes setores o coeficiente e_i^t fosse fixado *a priori* equivaleria a fazer a hipótese restritiva de uma elasticidade-preço da demanda unitária em torno do nível de produção dado.

ou:

$$\mathbf{y}_d^t = (\mathbf{I} - \mathbf{S})^{-1}\ \mathbf{D}\mathbf{y}_v^t$$

ou ainda, de (9):

$$\mathbf{y}_d^t = (\mathbf{I} - \mathbf{S})^{-1}\ \mathbf{D}\mathbf{V}\mathbf{x}^{*t} \tag{10}$$

Finalmente, as vendas de setores para consumo final podem ser obtidas construindo a matriz $\mathbf{C}$ $(n \times m)$ de coeficientes de consumo físico por unidade de renda familiar de cada uma das m classes. Tem-se, então:

$${}^c\mathbf{x}^t = \mathbf{C}\mathbf{y}_d^t$$

ou, de (10):[20]

$${}^c\mathbf{x}^t = \mathbf{C}\ (\mathbf{I} - \mathbf{S})^{-1}\ \mathbf{D}\mathbf{V}\mathbf{x}^{*t} \tag{11}$$

Esta equação não supõe que os coeficientes das matrizes **C**, **S**, **D** e **V** sejam estáveis; todos podem variar com os níveis de renda, em salários e excedente, e com a estrutura ocupacional de cada setor, bem como com as mudanças técnicas. Em particular, a matriz **C** é afetada também pelos preços e pelo nível de rendimentos médios em salários e excedente. O que importa é que sejam dados no período de referência, de forma basicamente independente do nível de produção (ao menos para variações não muito grandes da produção). A modificação destes coeficientes de um período a outro será considerada, ainda que de modo sucinto, adiante.

Reunindo as vendas intermediárias e de consumo, ambas em função da produção conforme (6) e (11), obtém-se:

$${}^a\mathbf{x}^t + {}^c\mathbf{x}^t = \mathbf{A}^*\mathbf{x}^{*t} \tag{12}$$

onde $\mathbf{A}^* = \mathbf{A} + \mathbf{C}\ (\mathbf{I} - \mathbf{S})^{-1}\ \mathbf{D}\mathbf{V}$.

[20] Esta solução é estruturalmente idêntica à seguida por Prado e Kadota (1982), baseada, entre outros, em Pyatt e Round (1978). Apenas os autores preferem reunir todas estas matrizes como blocos de uma única matriz maior, bem como admitem a igualdade entre produção e vendas, ambas as hipóteses destinadas à obtenção de uma matriz de impactos.

Como a produção $\mathbf{x}^{*t}$, pela equação (3), é determinada a partir das vendas de períodos anteriores, a equação (12) reduz-se exclusivamente ao comportamento das vendas em vários períodos.

2.4 — Investimento

O investimento induzido pelo crescimento do mercado é o último componente endógeno da determinação das vendas que falta analisar.

Definindo-se o intervalo de tempo de referência como o período de gestação ou maturação do investimento em cada setor, isto é, o intervalo entre a decisão de investir e a disponibilidade da nova capacidade produtiva para entrar em operação, a decisão de investir em acréscimo de capacidade ao final do período t visa ajustar a capacidade instalada ao final de $t + 1$ ao volume de produção previsto como necessário para $t + 2$, durante o qual aquela capacidade estará em atividade. Este nível de produção, como foi visto acima, deve ser suficiente para fazer face às vendas previstas em $t + 2$ e ajustar os estoques de produtos acabados, semi-acabados e insumos à proporção σ desejada das vendas no mesmo período.

A previsão do nível de vendas, em condições de estabilidade da estrutura do mercado, é aquela já discutida na determinação da produção: como primeira aproximação, a projeção do crescimento recente do mercado. A projeção da produção, portanto, deve ser a soma da projeção das vendas para o segundo período subseqüente com a variação de estoques desejada naquele período:

$$(2 + \kappa_i \sigma_i)\ \gamma_i\ (x_i^t - x_i^{t-1})$$

onde $\varkappa_i$ é a fração do período de investimento correspondente ao período de produção e σ_i e γ_i são os mesmos parâmetros presentes na equação de produção (2).

Por outro lado, o acréscimo desejado de capacidade deve considerar também o nível atual de utilização da capacidade instalada, para efetuar a correção dos possíveis erros de previsão anteriores. Chamando de $\alpha_i \leqslant 1$ o grau de utilização planejado da capacidade, o componente de correção será $x_i^t - \alpha_i \bar{x}_i^t$, onde $\bar{x}_i^t$ é a capacidade instalada atual. Reunindo ambos os componentes, de "projeção" e de "correção", o acréscimo desejado de capacidade ao fim de t para ser instalado ao fim de $t + 1$ será:

$$\Delta^* \bar{x}_i^t = \frac{1}{\alpha_i} x_i^t - \bar{x}_i^t + (2 + \kappa_i \sigma_i) \frac{\gamma_i}{\alpha_i} (x_i^t - x_i^{t-1}) \tag{13}$$

No caso de mercados competitivos com preços flexíveis, em geral deve-se ter $\alpha_i = 1$, e a variação do nível de vendas a ser projetada deve ser corrigida para levar em conta possíveis variações dos preços em relação ao "normal", previsto pelas empresas para assegurar a margem mínima de lucros considerada aceitável nestes mercados. Esta correção pode ser feita multiplicando-se o nível de vendas efetivo x_i^t pelo fator E_i^t, função da elasticidade-preço da demanda e da variação de preços observada no período t, que converte aquele nível de vendas no nível "virtual" que seria alcançado caso os preços não se tivessem afastado do "normal".[21] É este nível "virtual" que interessa tanto para a projeção do crescimento do mercado quanto para medir o grau de utilização atual da capacidade. A equação passa a ser:

$$\Delta^* \bar{x}_i^t = E_i^t x_i^t - \bar{x}_i^t + (2 + \kappa_i \sigma_i) \; \gamma_i \; (E_i^t x_i^t - E_i^{t-1} \; x_i^{t-1}) \tag{13'}$$

O aumento de capacidade planejado no final de t converte-se em aquisição de bens de capital fixo no período $t + 1$ pela sua multiplicação pelo vetor $\mathbf{b}_i$ de relação física incremental capital/capacidade produtiva, associado à tecnologia adotada. Se se acrescentar a este investimento em ampliação de capacidade, ou investimento líquido, a reposição dos ativos fixos existentes em t que deverão ser

[21] Pode-se demonstrar que este fator é:

$$E_i^t = \frac{1 + \dfrac{\Delta p_i^t}{p_i}}{1 + \dfrac{\Delta \bar{p}_i^t}{\bar{p}_i} (1 - \eta_i)}$$

onde $\bar{p}_i$ é o preço "normal" da indústria i nas condições de custos vigentes, Δp_i^t é o desvio do preço observado p em relação a $\bar{p}_i$ e η_i a elasticidade-preço da demanda.

desativados em $t+1$, designada pelo vetor $^*\delta^t$,[22] obter-se-á o investimento bruto em termos físicos:

$$^i\mathbf{x}_i^{t+1} = \mathbf{b}_i \; \Delta^*\overline{x}_i^t + {}^*\delta_i^t$$

onde $^i\mathbf{x}_i^{t+1}$ representa a aquisição total de bens de capital pelo setor i em $t+1$. Substituindo $\Delta^*\overline{x}_i^t$ pelo seu valor em (13) e (13'), tem-se:

$$^i\mathbf{x}_i^{t+1} = \mathbf{b}_i \left[\frac{1}{\alpha_i} E_i^t x_i^t - \overline{x}_i^t + (2 + \kappa_i \sigma_i) \frac{\gamma_i}{\alpha_i} (E_i x_i^t - E_i^{t-1} x_i^{t-1}) \right] + {}^*\delta_i^t \tag{14}$$

em que $\alpha_i = 1$ se i for um mercado competitivo de preços flexíveis e $\alpha_i \leqslant 1$ e $E_i = 1$ se este for um mercado oligopolizado, com excesso planejado de capacidade e preços rígidos.

O nível de capacidade instalada $\overline{x}_i$ pode ser eliminado da equação acima, considerando-se que esta capacidade em cada setor é determinada por:

$$\overline{x}_i^{t+1} = \Delta^*\overline{x}_i^t + (1 + {}^*\delta_i^t - \delta_i^t) \; \overline{x}_i^t$$

onde $^*\delta^t$ e δ^t são, respectivamente, as frações da capacidade $\overline{x}_i^t$ cuja reposição foi prevista em t e efetivada em $t+1$.[23] Esta distinção pretende levar em conta a possibilidade de perdas de equipamento ou obsolescência imprevistas, bem como o cancelamento de parte das decisões de investir já tomadas. Pode ser incorporada, caso se julgue necessário, mas ao custo de complicar ainda mais o modelo sem de fato acrescentar muito em termos analíticos. Por isso será preferível ignorá-la, introduzindo, se necessário, alterações *ad hoc*,

[22] Note-se que os componentes desse vetor podem não ser múltiplos dos componentes de $\mathbf{b}$ mesmo com técnica constante, devido às diferentes durabilidades dos ativos fixos.

[23] O produto $^*\delta_i^t \; \overline{x}_i^t$ é a capacidade que se espera desativar em $t+1$, correspondente ao vetor de reposição $^*\delta_i^t$, e o produto $\delta_i^t \; \overline{x}^t$ é a capacidade efetivamente desativada em $t+1$, correspondente ao vetor $\boldsymbol{\delta}_i$.

exógenas, no investimento de cada setor; a equação anterior reduz-se simplesmente a:

$$\bar{x}_i^{t+1} = \Delta^* \bar{x}_i^t + \bar{x}_i^t$$

Introduzindo este resultado nas equações (13) e (13') que definiram $\Delta^* \bar{x}_i^t$, obtém-se:

$$\bar{x}_i^{t+1} = \frac{1}{\alpha_i} E_i^t x_i^t + (2 + \kappa_i \sigma_i) \frac{\gamma_i}{\alpha_i} (E_i^t x_i^t - E_i^{t-1} x_i^{t-1})$$

Analogamente, para o período t:

$$\bar{x}_i^t = \frac{1}{\alpha_i} E_i^{t-1} x_i^{t-1} + (2 + \kappa_i \sigma_i) \frac{\gamma_i}{\alpha_i} (E_i^{t-1} x_i^{t-1} - E_i^{t-2} x_i^{t-2})$$

Subtraindo a segunda da primeira:

$$\Delta^* \bar{x}_i^t = \bar{x}_i^{t+1} - \bar{x}_i^t = \frac{1}{\alpha_i} \{ [1 + (2 + \kappa_i \sigma_i) \gamma_i] E_i^t x_i^t -$$
$$- [1 + (4 + 2\kappa_i \sigma_i) \gamma_i] \cdot E_i^{t-1} x_i^{t-1} + (2 + \kappa_i \sigma_i) \gamma_i E_i^{t-2} x_i^{t-2} \}$$

Note-se que esta equação envolve a simplificação de supor os parâmetros $\varkappa$, σ, γ e α *constantes* entre $t - 1$ e t.

O vetor de investimento passa a ser, então:

$$^i\mathbf{x}_i^{t+1} = \mathbf{b}_i \frac{1}{\alpha_i} \{ [1 + (2 + \kappa_i \sigma_i) \gamma_i] E_i^t x_i^t - [1 + (4 + 2\kappa_i \sigma_i) \gamma_i] E_i^{t-1} x_i^{t-1} +$$
$$+ (2 + \kappa_i \sigma_i) \gamma_i E_i^{t-2} x_i^{t-2} \} + {}^*\delta_i^t \qquad (15)$$

Esta equação determina o total de vendas por setor de cada tipo de bens de capital sob a hipótese de um único período de investimento para todos os setores. Esta hipótese, contudo, é irrealista, e poderia ser removida de forma análoga à hipótese de um único período de produção, da equação (2). Para tanto, bastaria supor que o intervalo de tempo de referência é o menor dentre os períodos de investimento e que as decisões de investir dos setores com período de investimento superior ao mínimo são uniformemente distribuídas ao longo daquele período.[24] No entanto, como antes, para simplificar esta exposição será feita a hipótese de que o período de investimento é uniforme entre os setores.

A equação de determinação do vetor de investimento bruto em bens de capital fixo pode ser generalizada para o conjunto da economia formando a matriz $\mathbf{B}$ $(n \times n)$ de coeficientes de bens de capital por unidade de capacidade de cada setor, tendo como colunas os vetores $\mathbf{b}_i$ da equação (14). Admitindo iguais períodos de investimento, tem-se, então, de (15):

$$
\begin{aligned}
{}^{i}\mathbf{x}^{t+1} = \mathbf{B}\hat{\alpha}^{-1} \{ [\mathbf{I} + (2\mathbf{I} + \hat{\kappa}\hat{\sigma})\,\hat{\gamma}]\, \hat{\mathbf{E}}^{t}\mathbf{x}^{t} - [\mathbf{I} + 2\,(2\mathbf{I} + \hat{\kappa}\hat{\sigma})\gamma]\, \hat{\mathbf{E}}^{t-1}\,\mathbf{x}^{t-1} + \\
+ (2\mathbf{I} + \hat{\kappa}\hat{\sigma})\,\hat{\gamma}\hat{\mathbf{E}}^{t-2}\,\mathbf{x}^{t-2} \} + {}^{*}\Delta^{t}\,\mathbf{u} \qquad (16)
\end{aligned}
$$

onde ${}^{*}\Delta^{t}$ é a matriz $(n \times n)$, cujas colunas são os vetores de reposição ${}^{*}\delta_i^t$, e $\mathbf{u}$ é o vetor $(n \times 1)$ de componentes unitários.

Interessa também calcular o *dispêndio* em investimento bruto e em variação de estoques para efeito da aplicação de uma *restrição financeira* às decisões de investir em cada setor. O dispêndio em investimento bruto é obtido pela multiplicação da equação (15) pelo vetor $(1 \times n)$ de preços $\mathbf{p}^{t+1}$; adicionando-se o investimento em variação de estoques, tem-se o gasto total em investimento de cada setor i:

$$
\begin{aligned}
I_i^{t+1} = \mathbf{p}^{t+1} \Big[\mathbf{b}_i \frac{1}{\alpha_i} \{ [1 + (2 + \kappa_i\sigma_i)\,\gamma_i]\, E_i^t x_i^t - [1 + (4 + \\
+ 2\kappa_i\sigma_i)\,\gamma_i]\, E_i^{t-1} x_i^{t-1} + (2 + \kappa_i\,\sigma_i)\,\gamma_i\, E_i^{t-2} x_i^{t-2} \} + \\
+ {}^{*}\delta_i^t \Big] + {}^{s}p_i^{t+1}\,\Delta^{s} x_i^{t+1} \qquad (17)
\end{aligned}
$$

onde o preço ${}^{s}p_i^t$ depende da avaliação dos estoques e $\Delta^{s} x_i^{t+1} = {}^{s}x_i^{t+1} - {}^{s}x_i^t$ é a variação de estoques efetivamente observada. A

[24] A vantagem desta suposição é a mesma apontada para o período de produção mínimo como referência: evitar concentrar artificialmente no tempo as decisões de investir de cada setor, dado que em geral não são constituídos por uma única empresa.

variação de estoques, como se viu, é determinada simplesmente como $\Delta^s x_i^{t+1} = x_i^{*t+1} - x_i^{t+1}$. Este investimento é contábil, não envolvendo compras de bens de capital, mas deve ser considerado para efeito de imposição de restrições financeiras ao dispêndio total em investimento.

A equação (17) — e através dela as equações (15) e (16) — está sujeita à *restrição financeira* de que o investimento não pode ser tão grande que eleve excessivamente o grau de endividamento das empresas — ameaçando-as de insolvência —, reduza abaixo dos níveis mínimos aceitáveis a disponibilidade de liquidez, ou diminua excessivamente os dividendos pagos aos acionistas (ou as retiradas dos proprietários). Essa restrição não será introduzida nesta apresentação resumida do modelo. Basta indicar que os lucros brutos de cada período, necessários para a imposição desta restrição, são facilmente determináveis pela equação (8), que fornece o excedente bruto unitário: basta notar que, multiplicando-o pela produção de cada setor, obtém-se a soma dos lucros brutos com os custos indiretos do setor.

Por sua vez, o estoque de capital ao fim de cada período é obtido simplesmente somando-se o investimento do período ao estoque de capital anterior de cada setor. É suficiente, portanto, conhecer o estoque de um período inicial qualquer. Já o capital próprio, necessário ao cálculo do grau de endividamento, é obtido pela capitalização, a cada período, dos lucros retidos.

Um *segundo* tipo de *restrição* à equação de investimento (16) — e, portanto, também à (17) — refere-se à *assimetria* do comportamento do investimento em aumentos ou reduções da capacidade instalada: o investimento bruto não pode ser negativo, isto é, a capacidade a ser mantida em $t+1$ pelo setor i que decide investir ao final de t não pode cair, em relação à capacidade instalada em t, por mais do que a perda de capacidade prevista para $t+1$ devida ao término de vida útil ou obsolescência dos equipamentos e demais ativos fixos, a menos que a redução líquida desejada da capacidade tenha permanecido abaixo de uma fração mínima ξ_i da capacidade prevista por mais de ν_i períodos. Portanto, a determinação da capacidade será dada, como já se viu, por $\bar{x}_i^{t+1} = \Delta^* \bar{x}_i^t + \bar{x}_i^t$, mas sujeita à restrição:

$$\bar{x}_i^{t+1} \geqslant (1 - {}^*\delta_i^t)\, \bar{x}_i^t \tag{18}$$

equivalente a:

$$ {}^{i}\mathbf{x}_i^{t+1} \geqslant \phi \tag{18'} $$

para todo i, *a menos que*:

$$ \Delta^* \bar{x}_i^t + {}^*\delta_i^t \, \bar{x}_i^t < - \xi_i \, (1 - {}^*\delta_i^t) \, \bar{x}_i^t \tag{19} $$

por $\mathbf{v}_i$ períodos.

Por último, os componentes autônomos do investimento serão incluídos na demanda final, considerada a seguir.

2.5 — Demanda final

O último componente da determinação das vendas dos vários setores que resta mencionar é o vetor de demanda final, constituída por aqueles itens que não podem ser considerados como determinados pela interação endógena entre vendas, produção, rendimentos, consumo e investimento. São eles: as exportações, os gastos governamentais, inclusive investimentos públicos, e os componentes autônomos do investimento dos diferentes setores. Estes últimos dependem basicamente de mudanças técnicas e inovações de produtos.

É importante observar que os componentes autônomos do investimento dos setores existentes devem ser incluídos nas respectivas equações de determinação das compras de bens de investimento (15) e (16) e de dispêndio em investimento (17), relativos à decisão de cada setor i de investir ao final de t. Isto seria feito acrescentando a parcela $\mathbf{b}_i \Delta^* \bar{x}_{a_i}^t$ à equação (15), a parcela $\mathbf{B} \Delta^* \bar{\mathbf{x}}_a^t$ à equação (16) e a parcela $\mathbf{p}^{t+1} \mathbf{b}_i \Delta^* \bar{x}_{a_i}^t$ à equação (17) — em que $\Delta^* \bar{x}_{a_i}^t$ designa o acréscimo autônomo de capacidade decidido pelo setor i em t para entrar em operação ao fim de $t + 1$.

2.6 — Equação final

De posse dos resultados anteriores, podemos finalmente voltar à equação (1), expressando cada uma de suas parcelas em termos do fluxo de vendas de períodos anteriores. Reunindo as equações (12) e (3) defasada, pode-se expressar as vendas intermediárias e de consumo em termos das vendas de períodos anteriores:

$$
\begin{aligned}
{}^{a}\mathbf{x}^{t} + {}^{c}\mathbf{x}^{t} = \mathbf{A}^{*} \{ & [\mathbf{I} + (\mathbf{I} + \hat{\sigma}) (\mathbf{I} + \hat{\gamma})] \hat{\mathbf{E}}^{t-1}\mathbf{x}^{t-1} - \\
& - (\mathbf{I} + \hat{\sigma}) (\mathbf{I} + 2\hat{\gamma}) \hat{\mathbf{E}}^{t-2}\mathbf{x}^{t-2} + (\mathbf{I} + \hat{\sigma}) \hat{\gamma}\hat{\mathbf{E}}^{t-3}\mathbf{x}^{t-3} \}
\end{aligned}
$$

Somando a esta última a equação (16) das vendas de bens de investimento (defasada) e substituindo o resultado na equação (1), chega-se à *equação final*:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}^{t} = & \{ \mathbf{A}^{*}[\mathbf{I} + (\mathbf{I} + \hat{\sigma}) (\mathbf{I} + \hat{\gamma})] + \mathbf{B}\hat{\alpha}^{-1} [\mathbf{I} + (2\mathbf{I} + \hat{\kappa}\hat{\sigma})\hat{\gamma}] \} \hat{\mathbf{E}}^{t-1}\mathbf{x}^{t-1} - \\
& - \{ \mathbf{A}^{*} (\mathbf{I} + \hat{\sigma}) (\mathbf{I} + 2\hat{\gamma}) + \mathbf{B}\hat{\alpha}^{-1} [\mathbf{I} + 2 (2\mathbf{I} + \hat{\kappa}\hat{\sigma})\hat{\gamma}] \} \hat{\mathbf{E}}^{t-2}\mathbf{x}^{t-2} + \\
& + [\mathbf{A}^{*} (\mathbf{I} + \hat{\sigma}) \hat{\gamma} + \mathbf{B}\hat{\alpha}^{-1} (2\mathbf{I} + \hat{\kappa}\hat{\sigma}) \hat{\gamma}] \hat{\mathbf{E}}^{t-3} \mathbf{x}^{t-3} + \\
& + {}^{*}\Delta^{t}\mathbf{u} + \mathbf{B}\Delta^{*}\mathbf{x}_{a}^{t} + {}^{f}\mathbf{x}^{t} \qquad (20)
\end{aligned}
$$

Dado que o período de produção é, em geral, inferior ao de investimento, é necessário considerar este último como unidade de tempo de referência para a equação (20). Convém ainda lembrar que todos os coeficientes podem variar entre períodos,[25] e que a equação (20) está sujeita às restrições:

— (4), para a produção;

— (5), para as vendas;

— financeira, aplicada à equação (17) e extensiva às equações (15) e (16); e

— (18) e (19) para a capacidade produtiva, extensiva às equações (15), (16) e (17).

[25] Exceto os parâmetros $\hat{\kappa}$, $\hat{\sigma}$, $\hat{\gamma}$ e $\hat{\alpha}$, que devem permanecer constantes devido à restrição introduzida na derivação da equação de investimento (15), a fim de eliminar a variável capacidade instalada. Essa simplificação pode ser suprimida retornando-se à equação (14) para o investimento e tratando a capacidade instalada como variável de estado, determinada ao fim de cada período de investimento.

(20) é uma equação matricial a diferenças de terceira ordem [26] com termo independente e coeficientes variáveis. Para obter a solução, pode-se decompô-la em duas partes:

a) os termos em $\mathbf{x}$ formam a equação homogênea:

$$\mathbf{x}^t = \mathbf{F}_1^t\mathbf{x}^{t-1} + \mathbf{F}_2^t\mathbf{x}^{t-2} + \mathbf{F}_3^t\mathbf{x}^{t-3} \tag{21}$$

onde as matrizes $\mathbf{F}_i^t$ são dadas pela equação (20), e que fornece a *solução homogênea* $\mathbf{x}_h^t$, capaz em princípio de produzir *flutuações* periódicas; e

b) a equação formada com os termos independentes, correspondendo, respectivamente, ao investimento em reposição, ao investimento autônomo e à demanda final:

$$\mathbf{x}^t = {}^*\Delta^t\mathbf{u} + \mathbf{B}\Delta^*\mathbf{x}_a^t + {}^f\mathbf{x}^t \tag{22}$$

que dá a *solução particular* $\mathbf{x}_p^t$, responsável pela introdução de um componente de *tendência* na trajetória.

A solução *geral* é obtida pela soma das soluções homogênea e particular:

$$\mathbf{x}^t = \mathbf{x}_h^t + \mathbf{x}_p^t \tag{23}$$

O processo geral de obtenção desta solução não será apresentado aqui. A presença das restrições e a variabilidade dos coeficientes tornam inviável obter uma solução algébrica para a equação, exigindo um tratamento através de simulação em computador. A análise feita na seção a seguir será baseada em várias hipóteses simplificadoras que possibilitem um tratamento matemático, com o objetivo de examinar as características da trajetória de "longo prazo" — ou o *ciclo econômico* propriamente dito — associada ao investimento, e correspondente ao termo multiplicado por $\mathbf{B}$ das matrizes $\mathbf{F}_i^t$ da equação (21); para que os efeitos derivados da produção, renda e consumo não sejam excluídos — nem poderiam sê-lo numa análise referida a períodos mais longos —, será feita abstração somente dos efeitos dinâmicos

[26] Devido à simplificação de considerar períodos de produção e de investimento uniformes; caso contrário, seria de ordem bem mais elevada.

dos desvios de "curto prazo" entre produção e vendas, considerando-as ajustadas no período de investimento de referência.[27]

Antes de passar a esta análise simplificada do modelo, convém fazer um breve comentário recuperando os principais fatores responsáveis pelo nível e pelas mudanças dos coeficientes e parâmetros envolvidos na equação final (20).

Os parâmetros α e γ dependem das condições de concorrência. Enquanto α tenderá a ser tanto mais baixo quanto mais oligopolizado o mercado e quanto maiores as indivisibilidades técnicas associadas ao incremento de capacidade produtiva, γ tenderá a variar diretamente com o "estado de confiança" do mercado, e será tanto maior quanto mais agressiva a estratégia de crescimento de pelo menos algumas empresas do mercado. O parâmetro σ, relativo à formação de estoques, é função crescente da variabilidade sazonal das vendas e da incerteza associada a essa previsão, dependendo, portanto, do tipo de mercado; é provável que seja maior na produção de bens de consumo. Já o parâmetro $\varkappa$, razão entre os períodos de produção e de gestação do investimento, depende apenas das características técnicas do setor. O mesmo se aplica às durações destes períodos.

Os coeficientes da matriz **A*** dependem dos coeficientes de **A**, **C**, **D**, **S** e **V**. Quanto aos coeficientes da primeira, dependem das características técnicas de produção dos setores, estando sujeitas a mudanças técnicas autônomas ou induzidas por mudanças de preços relativos dos insumos; neste último caso, como já foi dito, quando a mudança destes preços for substancial, segundo critérios circunstanciais que dificilmente se poderia generalizar. A matriz **C** depende dos padrões de consumo por classe de renda vigentes, variando com eles. Como seus coeficientes têm a dimensão de quantidades físicas por unidades de renda monetária, são sensíveis a mudanças nos

[27] Admitindo-se, como é razoável, que o período de investimento seja em regra muito superior ao período de produção, pode-se demonstrar que os desvios de "curto prazo" entre produção e vendas, que resultam em variações de estoques — correspondentes ao termo multiplicado por **A*** nas matrizes $\mathbf{F}_i^t$ da equação (21) —, dão origem a flutuações de curto período. Estas flutuações serão abstraídas na análise a seguir.

preços absolutos e relativos e na renda média de cada classe de renda familiar. Uma forma possível de determinar suas alterações seria considerar que os coeficientes de consumo variam com os preços dos bens de consumo e a elasticidade-preço da demanda, de um lado, e com os preços, as rendas médias familiares e a elasticidade-renda da demanda, de outro. A equação abaixo expressa estes dois efeitos:

$$\Delta c_{ij} = \left[- \frac{\Delta p_i}{p_i} \eta_{ij} + \frac{\Delta \bar{y}_{dj}}{\bar{y}_{dj}} (\nu_{ij} - 1) \right] c_{ij}$$

onde c_{ij} são os coeficientes de **C**, η_{ij} e ν_{ij} são, respectivamente, as elasticidades-preço e renda da demanda do produto i pela classe de renda familiar j e $\bar{y}_{dj}$ é a renda média da classe de renda familiar j, que corresponde ao componente j do vetor $\bar{\mathbf{y}}_d$ $(m \times 1)$, obtido pela multiplicação $(\mathbf{I} - \mathbf{S})^{-1}$ $\mathbf{Dv}^*$, onde $\mathbf{v}^*$ é o vetor (2×1) de rendimentos funcionais (salários e excedente) por unidade familiar. [28]

A matriz **D** varia com a estrutura ocupacional das empresas e das famílias, particularmente com a distribuição funcional da renda. Seus coeficientes só se manteriam razoavelmente estáveis na ausência de mudanças importantes na distribuição. Por outro lado, eles serão tanto mais estáveis quanto menor o número de classes de renda consideradas, embora evidentemente isto implique reduzir a diversidade de padrões de consumo presentes na matriz **C**, diminuindo a precisão da análise dos efeitos das variações na produção e/ou na distribuição funcional da renda sobre o consumo. A matriz **S** depende da maior ou menor importância dos serviços pessoais, fora do circuito de transações capitalistas da economia, na formação da renda familiar. A matriz **V** reflete a apropriação de rendimentos sob a forma de salários e lucros, bem como os correlatos a estes, nas atividades capitalistas, e depende do nível médio de salários nominais, da produtividade do trabalho, da estrutura dos custos diretos de produção e dos *mark ups* sobre estes custos. As estruturas ocupacional

28 Não é possível usar aqui diretamente a equação (10), porque ela fornece o total de renda familiar de cada classe, e não sua média. Um aumento no vetor de produção, por exemplo, aumentaria este total sem alterar a média, não afetando portanto os coeficientes de consumo. Daí, inclusive, estes coeficientes serem mais sensíveis aos preços do que ao nível de produção, que afetaria em princípio mais o nível de emprego do que as rendas funcional e familiar médias.

e de remunerações, além dos salários de base, obviamente afetam os salários médios, enquanto as características técnicas e de concorrência do mercado afetam a produtividade e os *mark ups*. A estrutura de custos indiretos (que incluem ordenados, juros, impostos, etc.), por sua vez, afeta a composição dos coeficientes de excedente bruto, podendo assim alterar indiretamente os coeficientes da matriz **D**.

Por último, a matriz **B** de relações físicas incrementais capital/capacidade produtiva depende basicamente da tecnologia empregada em cada setor e da escala de produção, variando em função de modificações tecnológicas, seja por inovações de processos ou produtos — "autônomos" ou decorrentes de mudanças importantes de preços relativos de bens de investimento, ou ainda determinados por facilidades de financiamento ou subsídios, entre outros fatores —, ou em conseqüência de variações nas escalas de produção, se houver economias ou deseconomias de escala ligadas ao capital fixo. Mudanças na estrutura produtiva associadas à introdução de novas atividades econômicas — seja por substituição de importações ou pela incorporação de novos produtos — afetarão diretamente, como é óbvio, não só esta matriz, mas também as matrizes **A**, **V** e **C**.

3 — Análise do modelo simplificado: o ciclo econômico

A trajetória endógena das variáveis econômicas — centrada neste modelo nas vendas, mas extensiva às demais, inclusive as agregadas — produzida por sua interação no tempo, particularmente sob a ação do investimento, determina flutuações que configuram teoricamente o ciclo econômico, como o componente da dinâmica econômica associado à demanda efetiva. Sua análise, numa primeira aproximação ao modelo destinada a permitir um tratamento matemático geral, pode ser feita com a introdução das seguintes hipóteses simplificadoras no modelo geral:

1.ª) O período de tempo de referência será o período médio de investimento, em virtude da grande complexidade envolvida em se considerar a diversidade de períodos de investimento.

2.ª) Serão abstraídas as discrepâncias entre produção e vendas (e, portanto, as flutuações de "curto prazo" das vendas), supondo que o período médio de investimento é suficientemente maior que os períodos de produção (com raras exceções) para que as empresas ao menos tentem ajustar a produção às vendas (e, portanto, os estoques ao nível desejado). Isto implica supor no período de referência $\mathbf{x}^{*t} = \mathbf{x}^t$, com o que a equação (12) passa a ser:

$$^{a}\mathbf{x}^t + {}^{c}\mathbf{x}^t = \mathbf{A}^*\mathbf{x}^t \qquad (12')$$

Supõe-se também que o período de investimento é suficientemente extenso para que o consumo a partir da renda gerada se realize no período.

3.ª) Os parâmetros γ_i serão supostos constantes e uniformes entre os vários setores, iguais à respectiva média; em particular, supõe-se $\gamma_i = 1$ para todo i.[29] Em segundo lugar, como nas equações de investimento sempre aparece o produto $\varkappa_i\sigma_i$, e dado que $\varkappa_i$ é uma fração e σ_i é pequeno, este produto será desprezado, fazendo-se $\varkappa_i\sigma_i = 0$. Por último, considerando que o investimento em reposição é essencialmente endógeno, será conveniente incorporá-lo à equação homogênea, em lugar de mantê-lo como termo independente, mediante uma simplificação adequada. Esta consiste em supor que a estrutura do vetor ${}^*\delta_i^t$ é aproximadamente igual à do vetor $\mathbf{b}_i$ para cada setor i (donde ${}^*\delta_i^t = \mathbf{b}_i {}^*\delta_i^t\, \bar{x}_i^t$) e que a taxa de depreciação real ${}^*\delta_i^t$ é uniforme entre setores e estável (abstraindo assim o efeito das diferentes durabilidades dos ativos fixos),[30] ou seja, ${}^*\delta_i^t = \delta$ (donde ${}^*\delta_i^t = \mathbf{b}_i\,\delta\,\bar{x}_i^t$).

[29] Esta suposição é muito arbitrária. É provável que este parâmetro de projeção difira muito entre setores e ao longo do tempo, em função inversa do grau de incerteza envolvido na previsão do crescimento do mercado. O ideal seria não fixar qualquer valor, o que, entretanto, tornaria a análise da trajetória excessivamente complexa.

[30] Esta restrição não é tão séria como poderia parecer, tendo-se em conta que as decisões de investir em cada setor não são, em regra, fortemente concentradas no tempo.

4.ª) Será feita abstração das mudanças nos parâmetros e nos coeficientes das matrizes $\mathbf{A}^*$ e $\mathbf{B}$ e, dentro de certos limites, dos coeficientes distributivos setoriais e dos preços relativos (e, portanto, dos coeficientes de consumo).

5.ª) As restrições (4) e (5), relativas à produção e às vendas, assim como a restrição financeira e as restrições (18) e (19), para a capacidade produtiva, todas relativas ao investimento, serão ignoradas.

6.ª) Para que as variações de preços nos mercados de preços flexíveis traduzam-se inteiramente em variações "virtuais" das vendas, para efeito da projeção do crescimento das vendas necessária à decisão de ampliar a capacidade, supõe-se uma elasticidade-preço da demanda unitária, isto é, $\hat{\mathbf{E}}^t = \mathbf{I}$, donde se segue que nos mercados de preços flexíveis x_i^t representa vendas "virtuais".

Das equações (1) e (12′) anteriores, tem-se $\mathbf{x}^t = \mathbf{A}^*\mathbf{x}^t + {}^i\mathbf{x}^t + {}^f\mathbf{x}^t$, sendo $\mathbf{A}^* = \mathbf{A} + \mathbf{C}\ (\mathbf{I} - \mathbf{S})^{-1}\ \mathbf{DV}$, e onde ${}^f\mathbf{x}^t$ inclui as exportações, os gastos do governo e os componentes autônomos do investimento. O vetor de investimento ${}^i\mathbf{x}^t$ é dado pela equação (16). Defasando-a de 1 período, fazendo $\hat{\gamma} = \mathbf{I}$, $\hat{\kappa}\hat{\sigma} = \phi$ e ${}^*\Delta^t\mathbf{u} = \mathbf{B}\delta\mathbf{x}^t$ pela 3.ª hipótese anterior, $\hat{\mathbf{E}}^t = \mathbf{I}$ pela 6.ª hipótese e substituindo-a na anterior, tem-se:

$$ {}^i\mathbf{x}^t = \mathbf{B}\,[\hat{\alpha}^{-1}\ (3\mathbf{x}^{t-1} - 5\mathbf{x}^{t-2} + 2\mathbf{x}^{t-3}) + \delta\bar{\mathbf{x}}^{t-1}] $$

mas $\bar{\mathbf{x}}^{t-1} = \Delta^*\bar{\mathbf{x}}^{t-2} + \bar{\mathbf{x}}^{t-2}$, por hipótese, e $\Delta^*\bar{\mathbf{x}}^{t-2} = \hat{\alpha}^{-1}\mathbf{x}^{t-2} + 2\hat{\mathbf{x}}^{t-2} + 2\hat{\alpha}^{-1}\ \hat{\gamma}\ (\mathbf{x}^{t-2} - \mathbf{x}^{t-3})$, de (13); logo, com $\hat{\gamma} = \mathbf{I}$, $\delta\bar{\mathbf{x}}^{t-1} = \hat{\alpha}^{-1}\ 3\,\delta\,\mathbf{x}^{t-2} - 2\,\delta\,\mathbf{x}^{t+3}$. Substituindo este resultado na equação acima, obtém-se:

$$ {}^i\mathbf{x}^t = \mathbf{B}\hat{\alpha}^{-1}\ [3\mathbf{x}^{t-1} - (5 - 3\delta)\ \mathbf{x}^{t-2} + 2\ (1 - \delta)\ \mathbf{x}^{t-2}] $$

Finalmente, substituindo na equação em $\mathbf{x}^t$, tem-se:

$$ \mathbf{x}^t = \mathbf{A}^*\mathbf{x}^t + \mathbf{B}\hat{\alpha}^{-1}\,[3\mathbf{x}^{t-1} - (5 - 3\delta)\ \mathbf{x}^{t-2} + 2\ (1 - \delta)\ \mathbf{x}^{t-3}] + {}^f\mathbf{x}^t $$

ou:

$$ \mathbf{x}^t = 3\mathbf{H}\mathbf{x}^{t-1} - (5 - 3\delta)\ \mathbf{H}\mathbf{x}^{t-2} + 2\,(1 - \delta)\ \mathbf{H}\mathbf{x}^{t-3} + (\mathbf{I} - \mathbf{A}^*)^{-1}\,{}^f\mathbf{x}^t \quad (24) $$

onde $\mathbf{H} = (\mathbf{I} - \mathbf{A}^*)^{-1}\ \mathbf{B}\hat{\alpha}^{-}$.

Esta equação a diferenças matriciais de terceira ordem pode ser reduzida à primeira ordem definindo $\mathbf{y}_i^t = \mathbf{x}^{t-1}$, obtendo-se o sistema:[31]

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^t &= 3\mathbf{H}\mathbf{x}^{t-1} - (5 - 3\delta)\ \mathbf{H}\mathbf{y}_1^{t-1} + 2\,(1 - \delta)\ \mathbf{H}\mathbf{y}_2^{t-1} + (\mathbf{I} - \mathbf{A}^*)^{-1}\ {}^f\mathbf{x}^t \\
\mathbf{y}_1^t &= \mathbf{x}^{t-1} \\
\mathbf{y}_2^t &= \mathbf{y}_1^{t-1}
\end{aligned}$$

Com:

$$\mathbf{z}^t = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^t \\ \mathbf{y}_1^t \\ \mathbf{y}_2^t \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}^t = \begin{bmatrix} (\mathbf{I} - \mathbf{A}^*)^{-1}\ {}^f\mathbf{x}^t \\ \phi \\ \phi \end{bmatrix}$$

a equação passa a ser:

$$\mathbf{z}^t = \mathbf{G}\mathbf{z}^{t-1} + \mathbf{v}^t \tag{25}$$

onde:

$$\mathbf{G}\ (3n \times 3n) = \begin{bmatrix} 3\mathbf{H} & -(5 - 3\delta)\ \mathbf{H} & 2\,(1 - \delta)\ \mathbf{H} \\ \mathbf{I} & \phi & \phi \\ \phi & \mathbf{I} & \phi \end{bmatrix}$$

A solução homogênea da equação (25) será uma combinação linear das "soluções características" $\mathbf{z}_i^t = \lambda_i^t\, \bar{\mathbf{z}}_i$, onde λ_i são as raízes características de $\mathbf{G}$ e $\bar{\mathbf{z}}_i$ são os vetores característicos respectivos.

As raízes da equação característica $|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{G}| = 0$, como se demonstra no *Apêndice*, devem satisfazer à equação:

$$\eta^3 = \frac{5 - 3\delta}{2\,(1 - \delta)}\ \eta^2 + \frac{3}{2\,(1 - \delta)}\ \eta - \frac{1}{2\,(1 - \delta)\,\mu} = 0 \tag{26}$$

onde $\eta = \dfrac{1}{\lambda}$ e μ é a raiz característica correspondente de $\mathbf{H}$.

[31] Consulte-se, por exemplo, Miller (1968, Cap. 2).

As raízes desta equação determinam a forma da trajetória. Para cada uma das n raízes características μ_i de $\mathbf{H}$, há três raízes características λ_i de $\mathbf{G}$, totalizando $3n$. Sendo λ função crescente de μ, bastará analisar a raiz dominante λ^*, correspondente à raiz dominante $\mu^* > 0$,[32] para determinar as condições de existência de flutuações periódicas e de estabilidade, bem como as características gerais da trajetória (amplitude e período).

Os valores das raízes η_i de (26) para qualquer μ podem ser calculados por uma adequada transformação de variáveis. Fazendo $\eta = x + \frac{5 - 3\delta}{6(1 - \delta)}$, a equação (26) pode ser resolvida em x. Contudo, dada a dificuldade em manejar os coeficientes de x, é preferível fixar valores plausíveis para δ e estabelecer as condições correspondentes a esses valores. Fazendo $\delta = 0{,}1$, a equação (26) fica:

$$\eta^3 - 2{,}61\,\eta^2 + 1{,}67\,\mu - \frac{1}{1{,}8\,\mu} = 0 \tag{26'}$$

e a equação reduzida será, com $\eta = x + 0{,}87$:

$$x^3 - 0{,}60\,x - \left(\frac{1}{1{,}8\,\mu} - 0{,}13\right) = 0 \tag{27}$$

A condição geral para que haja duas raízes complexas e uma real, três raízes reais (sendo duas iguais) ou três raízes reais e desiguais é, respectivamente:

$$\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27} \gtreqless 0$$

onde a e b são os coeficientes da equação acima na forma $x^3 + ax + b = 0$. A condição referente aos valores das raízes fica, então:

$$\mu \gtreqless 1{,}81 \tag{28}$$

[32] Dado que $\mathbf{H} = (\mathbf{I} - \mathbf{A}^*)^{-1}\,\mathbf{B}\hat{\alpha}^{-1}$ é não-negativa, pois $\mathbf{B}\hat{\alpha}^{-1}$ é não-negativa e $(\mathbf{I} - \mathbf{A}^*)^{-1}$ também é não-negativa porque $\mathbf{A}^*$ é não-negativa e produtiva, já que suas colunas têm soma menor ou igual a 1. Ver, por exemplo, Pasinetti (1977, Apêndice, pp. 275-6).

para que se tenha, respectivamente, raízes complexas conjugadas, raízes reais (sendo duas iguais) e raízes reais desiguais. Para o valor de $\delta = 0{,}05$, a condição (28) ficaria $\mu \gtreqless 1{,}85$; como se vê, o valor de δ não exerce uma influência muito importante.

3.1 — Flutuações periódicas e expansão sem flutuações

1) De (28), a condição para que haja raízes *complexas* e, portanto, *flutuações periódicas,* para $\delta = 0{,}1$, é:

$$\mu < 1{,}81 \tag{29}$$

Aplicada à raiz dominante μ^*, esta condição tem alta probabilidade de se verificar.[33] Se ela se verifica para μ^*, vale *a fortiori* para os demais valores de μ, gerando um total de $2n$ raízes complexas e n raízes reais.

Pode-se demonstrar que as raízes complexas têm maior módulo que as reais, o que não será feito aqui. Logo, se a condição (29) é satisfeita, a tendência à flutuação *sempre* prevalece.

2) Haverá somente raízes *reais* e, portanto, *expansão sem flutuação,* para $\delta = 0{,}1$, se:

$$\mu \geqslant 1{,}81 \tag{30}$$

Como esta situação é muito improvável, apenas afirmarei, sem apresentar demonstração, que a raiz de maior módulo satisfaz à seguinte condição:

$$\lambda^* \geqslant 2{,}38 \tag{31}$$

correspondente à condição (30) para $\mu = \mu^*$, isto é, $\mu^* \geqslant 1{,}81$.

[33] Como se verá adiante, é provável que μ^* se situe no intervalo de 0,4 a 1,4.

3.2 — Estabilidade

A condição de estabilidade da trajetória pode ser obtida (não demonstrarei aqui) diretamente da equação inicial (26'). A situação *limítrofe* de *estabilidade*, quando $|\lambda^*| = 1$, evidentemente ocorre na região $\mu^* < 1{,}81$, onde há *raízes complexas* e *flutuações* periódicas, como se constata pela relação (31). As flutuações serão *explosivas*, *regulares* ou *amortecidas* se, e somente se, respectivamente:

$$\mu^* \gtreqless 0{,}24 \tag{32}$$

Caso se fizesse $\delta = 0{,}05$, a condição seria $\mu^* \gtreqless 0{,}23$. Em geral, verifica-se que o parâmetro δ pouco afeta também a condição de estabilidade, com maiores valores de δ aumentando ligeiramente a probabilidade de o sistema ser estável para um lado μ^*.

3.3 — Análise da solução

1) No caso de haver *flutuações* periódicas, a parte da solução correspondente às raízes complexas conjugadas dominantes λ_2^* e λ_3^* é dada por:

$$\mathbf{z}^{*t} = |\lambda^*|^{(t)} \, [(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) \cos \theta t + (b\mathbf{u} - a\mathbf{v}) \text{ sen } \theta t] \tag{33}$$

onde a e b são constantes que dependem das condições iniciais de cada setor, $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são os vetores que formam os vetores característicos $\bar{\mathbf{z}}_{2,3}^* = \mathbf{u} + i\mathbf{v}$, correspondentes a $\lambda_{2,3}^*$, e θ é o argumento destas raízes na forma polar $\lambda_{2,3}^* = |\lambda^*|$ (cos $\theta \pm i$ sen θ).

Verifica-se de imediato que $\theta = -\omega$, onde ω é o argumento de $\eta_{2,3} = x_{2,3} + 0{,}87$.

Substituindo em (33), tem-se:

$$\mathbf{z}^{*t} = |\lambda^*|^{(t)} \, [(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) \cos \omega t - (b\mathbf{u} - a\mathbf{v}) \text{ sen } \omega t \tag{34}$$

Para cada setor i, a solução é:

$$z_i^{*t} = |\lambda^*|^{(t)} \, [(au_i + bv_i) \cos \omega t - (bu_i - av_i) \text{ sen } \omega t]$$

que pode ser reescrita como:

$$z_i^{*t} = |\lambda^*|^{(t)} \; A_i \; \cos \; (\omega t + \epsilon_i) \tag{35}$$

onde as constantes de amplitude A_i e de fase ϵ_i dependem das condições iniciais do setor i, e $\epsilon_i = arctg \; \dfrac{bu_i - av_i}{au_i + bv_i}$.

Verifica-se, portanto, que a periodicidade das flutuações é a *mesma* nos vários setores, embora a amplitude e a fase em geral sejam distintas.

a) O *crescimento da amplitude das flutuações* das vendas de cada setor depende de $|\lambda^*|^{(t)}$, e a *taxa* deste crescimento por unidade de tempo é $|\lambda^*| - 1$. O valor de $|\lambda^*|$ pode ser determinado pela equação (26′) para $\mu = \mu^*$, dado que $\dfrac{1}{1{,}8 \; \mu^*} = \dfrac{1}{\lambda_1^* \lambda_2^* \lambda_3^*}$.

Verifica-se daí que $|\lambda^*|$ é *função crescente* de μ^*. Conforme (32), para $\mu^* = 0{,}24$, $|\lambda^*| = 1$; para o valor $\mu^* = 0{,}3$, obtém-se $|\lambda^*| = 1{,}098$, significando que a amplitude das flutuações crescerá à taxa de 9,8% por período. Se, por outro lado, fizermos $\delta = 0{,}05$, para $\mu^* = 0{,}3$ obteremos $|\lambda^*| = 1{,}119$. Em geral, menor δ implica maior instabilidade, expressa em maior taxa de crescimento da amplitude das flutuações, embora esta influência seja pequena.

b) O *período das flutuações* é dado, de (35), por $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$. Verifica-se também que T é função crescente de μ^*. Por exemplo, para $\mu^* = 0{,}24$, onde $|\lambda^*| = 1$ e as flutuações serão regulares, tem-se $T = 4{,}4$ períodos de referência e, para $\mu^* = 0{,}3$, $T = 4{,}6$. Por outro lado, com $\delta = 0{,}05$, para $\mu^* = 0{,}3$ obtém-se $T = 4{,}5$. Da mesma forma que sobre a amplitude, o efeito de um δ mais baixo sobre o período das flutuações é de reduzi-lo ligeiramente.

2) Caso haja *expansão sem flutuações*, o componente da solução homogênea correspondente à raiz dominante λ_2^* (ver item *2* da Subseção 3.1) será simplesmente: [34]

$$\mathbf{z}^{*t} = \lambda^{*(t)} \; \mathbf{z}^* \tag{36}$$

[34] Desconsiderando a hipótese remota de haver raízes reais dominantes iguais, quando μ^* fosse exatamente igual a 1,81.

onde $\lambda^* = \lambda_2^*$ e $\bar{z}^* = \bar{z}_2^*$ é o vetor característico associado à raiz λ_2^* de **G**, cujos componentes dependem das condições iniciais de cada setor.

4 — Conclusões do modelo simplificado

A análise da solução homogênea dominante (assintótica) deste modelo linear dinâmico simplificado mostrou as condições em que ela gera flutuações periódicas, bem como as condições em que estas flutuações seriam amortecidas, regulares ou explosivas. Mostrou também que, em circunstâncias extremas, a trajetória dominante pode ser de expansão sem flutuações. Neste último caso, contudo, são necessárias duas qualificações: em primeiro lugar, sendo a solução homogênea completa formada por combinação linear das soluções características, é provável que várias das raízes características não-dominantes λ_i caiam na região complexa e gerem componentes cíclicos de diferentes períodos e amplitudes, de forma que a trajetória completa *não* será simplesmente um crescimento exponencial a taxa constante; e, em segundo, as taxas de crescimento associadas a uma solução dominante sem flutuações seriam tão elevadas que rapidamente seriam contidas e revertidas por não-linearidades e restrições associadas à capacidade produtiva (ou de importação) de determinados insumos ou à disponibilidade de mão-de-obra, exceto sob custos crescentes, podendo alcançar rapidamente a restrição financeira à expansão (as próprias taxas elevadas de ampliação da capacidade acabariam por impor mais ou menos rapidamente este último tipo de restrição). Estas mesmas observações aplicam-se ao caso de um ciclo "explosivo".

Da mesma forma, no caso mais provável em que a solução dominante determine a ocorrência do ciclo econômico sem necessidade de um "teto", a solução homogênea completa tampouco seria a senóide pura correspondente àquela solução, conforme (35), mas uma trajetória complexa formada pela composição de numerosas flutuações secundárias de período e amplitude menores superpostas àquela flutuação primária, cuja determinação precisa exigiria uma análise espectral. Em nenhuma circunstância, portanto, seria possível obter um "ciclo puro" (uma única onda senoidal) tal como resulta dos modelos de ciclo construídos com equações agregadas, independentemente de se introduzirem as necessárias restrições numa fase mais avançada da análise. Por outro lado, o componente dinâmico de tendência, correspondente à solução particular da equação (25), é explicado pelo impacto direto e indireto (inclusive via consumo) do crescimento da demanda final propriamente dita — restrita aqui às exportações e dispêndios governamentais — e pela presença de componentes autônomos do investimento, bem como possivelmente das vendas de certos bens de consumo. Estes componentes seriam explicados basicamente pela introdução de inovações técnicas e de produtos ou ainda de novas indústrias.

No que segue serão extraídas algumas conclusões relativas à trajetória cíclica dominante e aos principais fatores que a afetam, tendo sempre presente que se trata de uma versão muito simplificada do modelo dinâmico geral.

1) O fator mais importante na determinação da *estabilidade* e *período* do ciclo é o autovalor dominante μ^* da matriz $\mathbf{H}$ da equação (24). Como $\mathbf{H} = (\mathbf{I} - \mathbf{A}^*)^{-1}\mathbf{B}\hat{\alpha}^{-1}$ e $\mathbf{A}^* = \mathbf{A} + \mathbf{C}(\mathbf{I} - \mathbf{S})^{-1}\mathbf{DV}$, a amplitude e o período do ciclo, ambos funções crescentes de μ^*, variam diretamente com o autovalor dominante de cada uma das matrizes quadradas $\mathbf{B}\hat{\alpha}^{-1}$, $\mathbf{A}$ e $\mathbf{C}(\mathbf{I} - \mathbf{S})^{-1}\mathbf{DV}$. Dado que são todas não-negativas, seu autovalor dominante será positivo e compreendido entre o mínimo e o máximo da soma de suas colunas quando os coeficientes são expressos em valores monetários. Além disso, são todas produtivas, com a possível exceção de $\mathbf{B}\hat{\alpha}^{-1}$, tendo, portanto, autovalores menores que 1. Embora seja impossível estabelecer *a priori* uma relação funcional simples entre estes autovalores e os coeficientes, pode-se prever que, se as somas dos elementos de cada coluna destas matrizes não forem muito díspares, o autovalor dominante deverá estar próximo do valor médio destas somas, vale dizer, do respectivo coeficiente (monetário) agregado de cada setor econômico. Esta aproximação será adotada para estipular uma faixa de variação plausível de μ^*, adiante.

Em conseqüência, pode-se afirmar genericamente que a taxa de crescimento da amplitude do ciclo e seu período (na região de instabilidade) variam diretamente com:

a) O grau de integração doméstica da estrutura produtiva de insumos, que se reflete no valor médio das somas de coeficientes de cada coluna de **A**. Assim, quanto maior o coeficiente de importação de insumos de cada setor, menores a amplitude e o período do componente dominante do ciclo.

b) As "propensões a consumir" médias por classe de renda contidas na matriz **C** (quando esta é expressa em termos monetários), bem como o impacto direto e indireto dos respectivos setores sobre a estrutura produtiva, a geração de renda e, finalmente, o próprio consumo, efeito multiplicador este embutido na inversa da matriz $(\mathbf{I} - \mathbf{A}^*)$.

c) A proporção em que os rendimentos gerados pelas atividades econômicas empresariais são convertidos em renda familiar, expressa nos coeficientes da matriz **D**, e a proporção em que ela é redistribuída via serviços pessoais para classes de renda familiar de maior propensão a consumir e/ou cujo efeito multiplicador do consumo seja mais alto, expressa nos coeficientes da matriz **S**.

d) A maior incidência dos parâmetros distributivos setoriais, contidos na matriz **V**, sobre os rendimentos — normalmente os salários — que sejam apropriados em maior proporção como renda familiar (matriz **D**) e que gerem maior consumo por unidade de renda familiar (matriz **C**), ou ainda cujo impacto indireto, via estrutura produtiva, sobre a renda e o consumo seja mais elevado.

a) A magnitude das razões incrementais capital/capacidade produtiva expressas nos coeficientes de **B**, bem como seus efeitos indiretos sobre o consumo via estrutura produtiva, que dependem da estrutura de utilização de bens de capital produzidos internamente de cada setor (colunas da matriz **B**). Assim, maiores coeficientes de importação de bens de capital atenuam e diminuem o período do ciclo.

f) Os níveis de excesso de capacidade planejado setoriais representados na matriz $\hat{\alpha}^{-1}$, que crescem com a maior presença de oligopólios na economia. Em outras palavras, a oligopolização conduz, através deste parâmetro, à ampliação e prolongamento do ciclo, embora com a qualificação de que este parâmetro pode se alterar ao longo do ciclo, e sua provável redução nas fases depressivas possa impedir maior aprofundamento da depressão.

A influência dos demais parâmetros será analisada adiante.

2) Tomando-se como aproximação dos autovalores das matrizes $\mathbf{A}^*$ e $\mathbf{B}\hat{\alpha}^{-1}$ os valores médios de suas somas de colunas quando os coeficientes são expressos em termos monetários, pode-se examinar *valores prováveis* para μ^* e, portanto, para o *período do ciclo* e o crescimento de sua *amplitude*. Antes disso, recordemos que esta taxa de crescimento é zero (flutuações regulares) para $\mu^* = 0{,}24$, dadas as hipóteses restritivas do modelo e $\delta = 0{,}1$. O período do ciclo neste caso seria, como vimos, da ordem de 4,4 períodos de referência, que neste modelo simplificado é o período médio de investimento. Se este for da ordem de 1,5 a 2 anos, o período do ciclo com flutuações regulares estará entre 6,6 e 8,8 anos.

Denotando por $\rho(\mathbf{A}^*)$ o autovalor dominante da matriz $\mathbf{A}^*$, pode-se estimar que $\rho(\mathbf{A}^*)$ esteja situado entre 0,5 e 0,7, talvez mais próximo de 0,6. Isto porque a soma dos elementos de uma coluna de $\mathbf{A}^*$ é a soma correspondente em $\mathbf{A}$, que representa a proporção dos gastos com insumos de produção doméstica no valor da produção do setor em questão, mais a soma correspondente em $\mathbf{C}(\mathbf{I} - \mathbf{S})^{-1}\mathbf{DV}$, que representa a proporção consumida da renda gerada no setor. O resultado desta soma é necessariamente menor que 1, e o seu complemento a 1 é dado pela soma dos "vazamentos" em importações, impostos e poupança. Admitindo que esta última soma esteja situada entre 30 e 50% do valor da produção dos setores, segue-se que $\rho(\mathbf{A}^*)$ estaria no intervalo entre 0,5 e 0,7.

Em segundo lugar, $\rho(\mathbf{B})$ é mais difícil de estimar. As estatísticas referentes à relação incremental capital/produto são geralmente imprecisas e requerem, ademais, algumas correções para se chegar à relação incremental capital/capacidade ou capital/produção empregada neste modelo:

a) A relação incremental capital/produto deve ser dividida por cerca de 2, se o valor adicionado representa em média cerca de 50% do valor da produção, para se obter a relação incremental capital/produto.

b) O cálculo da relação capital/produto é usualmente feito pela divisão da taxa de investimento pela taxa de crescimento da renda, no *mesmo* período,[35] o que tende a superestimá-la de acordo com a função investimento desenvolvida no presente modelo. Se o investimento médio em dado período visa ajustar a capacidade à produção projetada para a média do segundo período à frente, como foi suposto, é preciso dividir a relação incremental capital/produto por cerca de 2 para ajustá-la às hipóteses do modelo[36]

c) Por último, resta fixar o período de investimento médio. As estatísticas supõem implicitamente que este período seja de um ano. No entanto, é provável que esta seja uma subestimativa, porque o intervalo entre decisões de investir raramente será inferior a um ano (entre outras razões devido ao comportamento sazonal das vendas em muitos mercados), e em vários setores superior a dois e três anos. Assim, mesmo que os menores períodos de gestação de acréscimos de capacidade sejam inferiores a um ano, é razoável admitir que o período médio de investimento deva situar-se em torno de um e meio a dois anos, impondo um fator de correção adicional entre 0,5 e 2/3 para ter em conta a maior extensão do período de referência.

Reunindo estes três tipos de correção, uma relação incremental capital/produto entre 2 e 3, freqüente nas estatísticas para vários países, converte-se numa relação incremental capital/produto para o presente modelo de seis a oito vezes menor, implicando $\rho(\mathbf{B})$ entre 0,25 e 0,50. Além disso, supondo um grau médio de utilização planejado da capacidade de 0,9 teríamos $\rho(\mathbf{B}\hat{\alpha}^{-1})$ entre 0,27 e 0,55.

Finalmente, pode-se estimar $\rho[(\mathbf{I} - \mathbf{A}^*)^{-1}]$ como $\dfrac{1}{1 - \rho(\mathbf{A}^*)}$, ou seja, entre 2 e 3,3. Assim, a estimativa de $\mu^* = \rho(\mathbf{H})$ seria obtida pelo produto dos valores extremos de $\rho[(\mathbf{I} - \mathbf{A}^*)^{-1}]$ e de $\rho(\mathbf{B}\hat{\alpha}^{-1})$, ou seja, $0{,}54 < \mu^* < 1{,}8$. Mas uma última correção é necessária. Esta versão simplificada do modelo, ao abstrair todas as restrições às várias equações, amplifica artificialmente a instabilidade do sistema. Embora este efeito não possa ser eliminado globalmente, devendo

[35] Por exemplo, Kuznets (1966, Cap. 5).

[36] Caso contrário, seria preciso, evidentemente, alterar o próprio modelo.

ser considerado como uma limitação séria desta versão, pelo menos um aspecto pode ser parcialmente corrigido: o comportamento previsto das vendas não se traduz integralmente em ampliação da capacidade, devido a indivisibilidades técnicas e economias de escala; atribuindo (arbitrariamente, na falta de evidências a respeito) um fator de correção médio em torno de 0,8 para este efeito, e interpretando-o como uma redução proporcional dos coeficientes de **B**, teríamos, finalmente:

$$0,4 < \mu^* < 1,4$$

Com estes valores extremos, e para $\delta = 0,1$, teríamos uma amplitude do ciclo principal situada no intervalo:

$$1,23 < |\lambda^*| < 2,13$$

Estes valores extremos supõem, respectivamente, um período de investimento de referência de dois e um e meio anos; logo, as taxas de crescimento da amplitude do ciclo estariam entre 10 e 65%. É evidente que esta última é apenas teórica, porque um crescimento ou decrescimento tão rápido das vendas colocaria aos diversos setores restrições a muito curto prazo. Em segundo lugar, o período do ciclo estaria situado entre os extremos:

$$4,3 < T < 11,2$$

que correspondem, respectivamente, a 8,6 e 16,8 anos. Este último também é apenas teórico, pois na realidade as restrições que necessariamente se imporiam ao crescimento encurtariam consideravelmente o período do ciclo.

É importante frisar mais uma vez que as simplificações desta versão do modelo ampliam artificialmente a instabilidade do sistema, ao mantê-lo estritamente na região de flutuações "explosivas". Duas dentre elas são particularmente importantes para este efeito: a ausência de restrições às vendas, à produção e à ampliação ou redução de capacidade, de um lado, e a não consideração da diversidade setorial de períodos de investimento, de outro, ambas diminuindo significativamente a inércia do sistema. As hipóteses de uniformidade e estabilidade dos parâmetros γ, σ e δ, de estabilidade dos coeficientes e de ausência de variação de estoques no período de investimento, possivelmente não introduzem distorções tão graves, embora ao fazer $\gamma = 1$ se esteja provavelmente superestimando este parâmetro de projeção, o que acarreta maior instabilidade. Em todo caso, só uma simulação do modelo em sua forma geral poderia dar um retrato mais fiel do poder explicativo quanto às características reais do ciclo econômico e à exata influência de cada parâmetro e dos coeficientes de cada matriz.

3) Embora o modelo determine diretamente apenas o comportamento das vendas ou produção em termos reais, é muito simples determinar a trajetória de qualquer outra variável, bastando aplicar as definições dadas no início do modelo. Especificamente, o comportamento da *renda* total gerada na atividade econômica empresarial pode ser determinado pela soma dos rendimentos gerados em cada setor por unidade de produção multiplicados pelo vetor de produção $\mathbf{x}^t$, determinado em qualquer período t pela equação (35); tem-se, então:

$$Y^t = \mathbf{u}'\mathbf{V}\mathbf{x}^t$$

onde $\mathbf{u}'$ é o vetor (1×2) de componentes unitários. A renda familiar total, que inclui os serviços remunerados pessoais e/ou domésticos, seria dada por:

$$Y_d^t = \mathbf{u}'(\mathbf{I} - \mathbf{S})^{-1}\mathbf{D}\mathbf{V}\mathbf{x}^t$$

sendo $\mathbf{u}'$ neste caso $(1 \times m)$, onde m é o número de classes de renda familiar.

4) Resta examinar a influência dos *parâmetros* δ, $\hat{\gamma}$ e $\hat{\kappa}\hat{\sigma}$. Viu-se que o primeiro, suposto uniforme para simplificar, afeta inversamente a amplitude e o período do ciclo: maiores taxas de depreciação real dos ativos fixos contribuem para amortecer e encurtar as flutuações endógenas, embora seu efeito em geral seja muito limitado devido ao seu valor baixo e à sua pequena margem de variação.

Os parâmetros γ, por simplicidade supostos uniformes e iguais a 1, tendem a aumentar a instabilidade do sistema. Embora este resultado não tenha sido demonstrado no modelo, é fácil constatar que maiores valores de γ aumentam todos os coeficientes de **x** na equação final (24), e pode-se verificar que maiores coeficientes aumentam a probabilidade de o sistema ser instável para um dado μ^*, aumentando a amplitude e o período do ciclo. De fato, é intuitivo que uma projeção menos cautelosa da variação anterior das vendas para efeito de alteração na capacidade produtiva, implicando maior γ, diminui a inércia do sistema econômico e amplia sua instabilidade. É provável que ao fixar $\gamma = 1$ subestime-se fortemente a incerteza das decisões de investir e a inércia correspondente, ampliando artificialmente a instabilidade do ciclo neste modelo; mas qualquer outro valor seria ainda mais arbitrário.

Contudo, sua importância para a dinâmica não se restringe ao valor médio do parâmetro, mas inclui a possibilidade de sua *variação* em distintas fases do ciclo. Assim, uma estratégia competitiva agressiva — seja para ampliar o mercado, tipicamente nos oligopólios diferenciados e mistos, seja para concentrar o mercado, tipicamente nos oligopólios competitivos ou em alguns casos também em oligopólios diferenciados e mistos — pode traduzir-se numa elevação de γ durante a recuperação e o auge do ciclo, amplificando e prolongando o auge.

Por último, a influência de $\widehat{\kappa\sigma}$ é idêntica à de $\hat{\gamma}$, uma vez que sempre aparece multiplicando $\hat{\gamma}$ na equação de investimento. É certo, no entanto, que este efeito é muito reduzido, devido ao baixo valor de $\kappa_i\sigma_i$ e sua provavelmente limitada margem de variação.

5) Como último comentário, vale ainda assinalar que este modelo linear multissetorial mostra mais uma vez que a interação "endógena" entre produção, renda, consumo e investimento — isto é, o componente estrito de "demanda efetiva" da dinâmica, que abstrai as mudanças na técnica, nos produtos e na estrutura competitiva dos mercados — é capaz de explicar o ciclo econômico, mas não a existência de um componente de tendência. Assim, embora o "ciclo puro" no modelo multissetorial não seja uma senóide pura, mas uma composição de ondulações superpostas a uma flutuação primária, e que as várias restrições e a diversidade de períodos de investi-

mento evidentemente afetem endogenamente a trajetória prevista neste modelo simplificado, é certo que o "ciclo puro" não contém qualquer tendência de longo prazo, que pode ser explicada a partir do outro componente teórico da dinâmica, representado pelas inovações, mudanças estruturais e gastos autônomos.

Quanto, em particular, aos gastos do governo, cabe observar que não são independentes do processo de oligopolização de uma economia capitalista, tendendo a aumentar proporcionalmente e a se diversificar com este mesmo processo. Deste modo, os efeitos dinâmicos básicos da presença de oligopólios não se restringem ao comportamento relativamente estável dos preços (com ajuste imediato às vendas via variação de estoques e, a seguir, pela variação no grau de utilização da capacidade), à influência dos parâmetros que representam o excesso planejado de capacidade e a disposição de crescer à frente do mercado, ou a possíveis alterações no processo de inovações afetando o componente autônomo do investimento. Eles incluem a presença em maior ou menor grau de um patamar de gasto público, especialmente de investimento; se este (e, por extensão, a política econômica em geral) é incapaz de alterar as características essenciais do ciclo econômico, pode sem dúvida impedir ou atenuar as depressões e contribuir para sustentar taxas de crescimento positivas a longo prazo.

Estas questões são amplamente conhecidas e não é preciso aprofundá-las aqui. Sendo o presente modelo uma contribuição basicamente analítica e preliminar, é suficiente que ele indique, como espero ter feito, a forma pela qual as condições "exógenas" — inclusive e talvez principalmente as referentes às inovações — devem ser introduzidas e como seus efeitos podem ser determinados. Uma análise mais concreta e abrangente requer como primeiro passo que o modelo seja aperfeiçoado e simulado em sua forma geral, permitindo incorporar todas as restrições e mudanças de parâmetros e coeficientes, bem como o comportamento das variáveis de tendência e sua relação com os próprios parâmetros do componente endógeno. Paralelamente, maior esforço teórico deve ser concentrado na formulação de hipóteses bem fundadas sobre as mudanças estruturais e o processo de inovações. Este é um campo onde resta muito por fazer, certamente não por desinteresse, mas por sua complexidade, que provavelmente se deve em grande parte ao fato de estar situado na interseção de diferentes áreas de conhecimento e bem próximo das respectivas fronteiras.

Apêndice

O modelo simplificado de ciclo econômico chega à seguinte equação:

$$\mathbf{z}^t = \mathbf{G}\mathbf{z}^{t-1} + \mathbf{v}^t$$

onde:

$$\mathbf{G}\,(3n \text{ x } 3n) = \begin{bmatrix} 3\mathbf{H} & -(5-3\delta)\,\mathbf{H} & 2\,(1-\delta)\,\mathbf{H} \\ \mathbf{I} & \phi & \phi \\ \phi & \mathbf{I} & \phi \end{bmatrix}$$

cuja equação característica $|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{G}| = 0$ pode ser obtida com:

$$|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{G}| = \begin{vmatrix} \lambda\mathbf{I} - 3\mathbf{H} & (5-3\delta)\,\mathbf{H} & -2\,(1-\delta)\,\mathbf{H} \\ -\mathbf{I} & \lambda\mathbf{I} & \phi \\ \phi & -\mathbf{I} & \lambda\mathbf{I} \end{vmatrix} = (\lambda \neq 0)$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{I}\lambda - 3\mathbf{H} & \left[5 - 3\delta - \dfrac{2\,(1-\delta)}{\lambda}\right]\mathbf{H} & -2\,(1-\delta)\,\mathbf{H} \\ -\mathbf{I} & \lambda\mathbf{I} & \phi \\ \phi & \phi & \lambda\mathbf{I} \end{vmatrix} =$$

$$= |\lambda\mathbf{I}| \cdot \begin{vmatrix} \lambda\mathbf{I} - 3\mathbf{H} & \left[5 - 3\delta - \dfrac{2\,(1-\delta)}{\lambda}\right]\mathbf{H} \\ -\mathbf{I} & \lambda\mathbf{I} \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^n \cdot \begin{vmatrix} \lambda\mathbf{I} - \left[3 - \dfrac{5-3\delta}{\lambda} + \dfrac{2\,(1-\delta)}{\lambda^2}\right]\mathbf{H} & \left[5 - 3\delta - \dfrac{2\,(1-\delta)}{\lambda}\right]\mathbf{H} \\ \phi & \lambda\mathbf{I} \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^{2n} \cdot \left|\lambda\mathbf{I} - \left[3 - \frac{5-3\delta}{\lambda} + \frac{2\,(1-\delta)}{\lambda^2}\right]\mathbf{H}\right|$$

A condição $|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{G}| = 0$ implica então $|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{H} g(\lambda)| = 0$, onde $g(\lambda) = 3 - \frac{5 - 3\delta}{\lambda} + \frac{2(1-\delta)}{\lambda^2}$. Conclui-se que λ é raiz característica de $\mathbf{H} g(\lambda)$. Mas, como a raiz característica desta última matriz é a *mesma* função linear da raiz característica de $\mathbf{H}$,[37] segue-se que:

$$\lambda = g(\lambda) \cdot \mu$$

onde μ é raiz característica de $\mathbf{H}$. Substituindo $g(\lambda)$, tem-se:

$$\frac{3}{\lambda} - \frac{5 - 3\delta}{\lambda^2} + \frac{2(1-\delta)}{\lambda^3} = \frac{1}{\mu}$$

ou, finalmente:

$$\eta^3 - \frac{5 - 3\delta}{2(1-\delta)} \eta^2 + \frac{3}{2(1-\delta)} \eta - \frac{1}{2(1-\delta)\mu} = 0$$

onde $\eta = \frac{1}{\lambda}$.

Bibliografia

GANTMACHER, F. *The theory of matrices*. Vol. 1. New York, Chelsea Publishing Co., 1959.

GOSSLING, W. Input-output, technological change, and inflation: the end of the Keynesian era? In: LEONTIEF, W., ed. *Structure, system and economic policy*. Cambridge, Cambridge University Press, 1977.

[37] Ver, por exemplo, Gantmacher (1959, Vol. 1, Cap. 4, p. 84).

KALECKI, M. *Theory of economic dynamics*. Londres, George Allen & Unwin, 1954.

———. The Marxian equations of reproduction and modern economics. *Social Science Information, 7,* 1968.

KUZNETS, S. *Modern economic growth: rate, structure and spread (an adaptation)*. New Haven, Yale University Press, 1966.

LEONTIEF, W. The dynamic inverse. In: CARTER, A., e BRODY, A., eds. *Contributions to input-output analysis*. Amsterdam, North Holland, 1970.

MILLER, K. S. *Linear difference equations*. New York, W. A. Benjamin, 1968.

PASINETTI, L. *Lectures on the theory of production*. New York, Columbia University Press, 1977.

POSSAS, M. L. *Dinâmica e ciclo econômico em oligopólio*. Tese de Doutoramento, mimeo. Campinas, UNICAMP, 1983.

PRADO, E. F. S,, e KADOTA, D. K. Multiplicadores de emprego no Brasil. *Pesquisa e Planejamento Econômico,* Rio de Janeiro, *12* (1) :207-30, abr. 1982.

PYATT, G., e ROUND, J. *Keynesian multipliers, the Leontief inverse and the distribution of income*. Mimeo. World Bank, Development Research Center, 1978.

(Originais recebidos em novembro de 1983. Revistos em abril de 1984.)