Elasticidades de Engel para dispêndios familiares na cidade do Rio de Janeiro: outro método de estimação – comentários

José W. Rossi *

1 — Introdução

O método proposto por Hoffmann e Furtuoso (1981) para o cálculo das elasticidades de Engel foi utilizado por Hoffmann, em artigo desta edição de *Pesquisa e Planejamento Econômico,* para demonstrar que a soma ponderada dos resíduos quadráticos obtida por aquele método é menor do que aquela encontrada por este autor [cf. Rossi (1982)], utilizando o método de Kakwani (1978) e métodos tradicionais de estimação.[1]

Conforme argumentaremos nas seções seguintes, a menor soma dos resíduos quadráticos no método de Hoffmann e Furtuoso (1981), comparativamente àquela dos métodos tradicionais, é um resultado inteiramente previsto em análise de regressão, mas nem por isso implica, necessariamente, uma estimação mais precisa das elasticidades. Além disso, a soma ponderada dos resíduos foi apenas um dos dois

* Da COPPE/UFRJ.

1 Com relação a este ponto, aliás, gostaríamos de proceder aqui a dois registros: duas correções ao nosso artigo publicado anteriormente nesta revista [cf. Rossi (1982)] e um agradecimento a Rodolfo Hoffmann, que, refazendo os nossos cálculos, pôde constatar os erros objeto dessas correções. Tais erros referem-se a dois valores da soma ponderada dos resíduos quadráticos na Tabela 5 do nosso artigo anterior [cf. Rossi (1982, p. 602)]: para o item alimentação, onde tem-se $3{,}5 \times 10^5$, o correto seria $31{,}5 \times 10^5$; e, para o item ovos, leite e queijo, onde tem-se 13910, leia-se 5600. Com essas correções melhora o desempenho do método de Kakwani *vis-à-vis* os métodos tradicionais, pois agora os seus resíduos quadráticos seriam menores em 12 dos 19 itens considerados.

critérios utilizados no nosso artigo para avaliar o desempenho dos métodos de estimação das elasticidades. O segundo critério empregado fora o da condição da adição (*adding up*) das elasticidades, e aqui o resultado de Hoffmann é menos satisfatório que o obtido pelo método de estimação de Kakwani (principal método por nós adotado), conforme ele mesmo parece reconhecer no seu artigo.

2 — O método de Hoffmann e Furtuoso (1981)

A técnica denominada por Hoffmann e Furtuoso (1981) de ajustamento de uma poligonal, e que é também conhecido na literatura econométrica [*e.g.*, Pindyck e Rubinfeld (1981, pp. 126-7) ou Gujarati (1978, pp. 302-3)] como "regressão por partes" (*piecewise linear regression*), tem na forma logarítmica do modelo (outras formas funcionais poderiam ser consideradas sem qualquer dificuldade) a seguinte especificação:

$$\log Y_i = a + b \log X_i + \delta_1 D_1 (\log X_i - \log X_0) + \\ + \delta_2 D_2 (\log X_i - \log X_1) + u$$

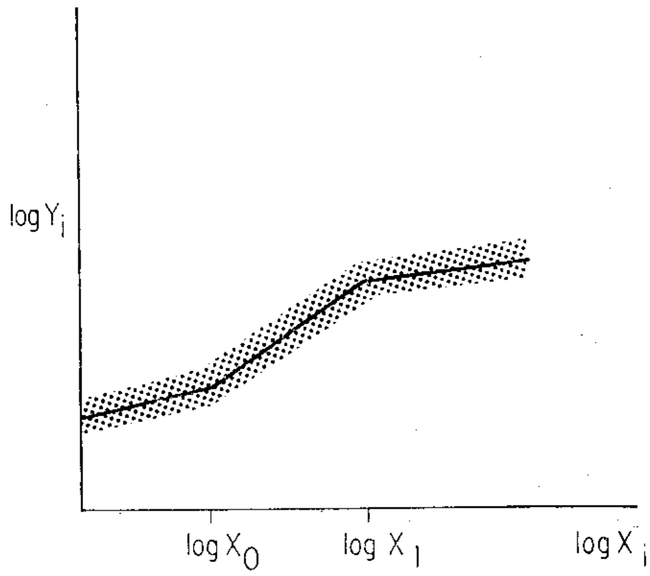
onde:

$$D_1 = \begin{matrix} 1 \text{ para as observações} \geqslant X_0 \\ 0 \text{ de outro modo} \end{matrix}$$

$$D_2 = \begin{matrix} 1 \text{ para as observações} \geqslant X_1 \\ 0 \text{ de outro modo} \end{matrix}$$

e tendo por premissa $E(u) = 0$.

A representação dessa especificação é mostrada no gráfico que se segue.



Note-se que a linha não sofre qualquer descontinuidade, já que: a) se $D_1 = D_2 = 0$, a equação seria então $E(\log Y_i) = a + b \log X_i$, que para $X_i = X_0$ resultaria em $E(\log Y_0) = a + b \log X_0$; b) se $D_1 = 1$ e $D_2 = 0$, temos que $E(\log Y_i) = (a - \delta_1 \log X_0) + (b + \delta_1) \log X_i$, que para $X_i = X_0$ forneceria $E(\log Y_0) = (a - \delta_1 \log X_0) + (b + \delta_1) \log X_0 = a + b \log X_0$, isto é, o mesmo resultado da equação do segmento anterior; e, finalmente, c) se $D_1 = 1$ e $D_2 = 1$, temos $E(\log Y_i) = (a - \delta_1 \log X_0 - \delta_2 \log X_1) + (b + \delta_1 + \delta_2) \log X_i$, que para $X_i = X_1$ produziria $E(\log Y_1) = (a - \delta_1 \log X_0) + (b + \delta_1) \log X_1$, isto é, resultado idêntico ao que corresponderia à equação do segundo segmento.

Esses resultados servem ainda para demonstrar que as elasticidades, apesar de constantes dentro de cada segmento, diferem entre os três segmentos, sendo dadas respectivamente por b, $b + \delta_1$ e $b + \delta_1 + \delta_2$.

3 — A redução nos resíduos quadráticos e as questões dos graus de liberdade e da significância estatística

A obtenção da menor soma nos resíduos quadráticos na especificação acima, *vis-à-vis* o modelo log-log simples, por exemplo, é certamente um fato elementar em análise de regressão, já que a inclusão de variáveis independentes adicionais no modelo — no caso, duas variáveis: D_1 (log X_i — log X_0) e D_2 (log X_i — log X_1) — só poderia reduzir a soma de tais resíduos, mesmo que aquelas variáveis adicionais não apresentassem qualquer significância estatística na regressão. Na verdade, a redução nos resíduos seria obtida mesmo considerando-se dois segmentos apenas, em vez dos três utilizados; obviamente, essas reduções seriam progressivas se quatro segmentos (isto é, considerando-se três *dummies,* em vez de duas), cinco segmentos (quatro *dummies*), etc., fossem considerados sucessivamente.

Naturalmente, ainda outras especificações utilizando variáveis binárias poderiam ser contempladas. Por exemplo, considere-se o modelo:

$$\log Y = a + b \log X_i + \delta_1 D_1 \log X_i + \delta_2 D_2 \log X_i$$

onde:

$$D_1 = \begin{matrix} 1 \text{ se observações } X_0 \leqslant X_i < X_1 \\ 0 \text{ de outro modo} \end{matrix}$$

com D_2 sendo definido como anteriormente. Note-se que é imposta agora a restrição de que os três segmentos tenham a mesma interseção linear, mas possuam inclinações distintas. Uma outra especificação sem essa restrição seria dada por:

$$\log Y = a + b \log X_i + c_1 D_1 + c_2 D_2 + \delta_1 D_1 \log X_i + \delta_2 D_2 \log X_i$$

para D_1 e D_2 definidos de maneira análoga à especificação que acabamos de apresentar. Observe-se que, agora, tanto as interseções como as inclinações são livres para variar nos três segmentos. Em vista desta maior flexibilidade, aliás, a soma dos resíduos quadráticos seria agora ainda menor do que nos casos anteriores.[2] É interessante notar-se aqui que essa especificação produziria os mesmos estimadores que seriam obtidos com três ajustamentos separados (um para cada segmento) da especificação log $Y = a + b$ log X, que, considerando-se a segmentação de três em três classes de renda, permitiria apenas um grau de liberdade em cada estimação; assim, se a classificação das faixas de renda for tal que um dos segmentos contenha duas classes apenas, então o ajustamento ali obtido por essa especificação seria "perfeito" (isto é, com $R^2 = 1$, pois com dois pontos traça-se uma reta), mas nem por isso estatisticamente confiável.

É claro que considerações semelhantes às efetuadas com relação ao modelo log-log aplicam-se às outras funções de Engel tradicionais consideradas em nosso estudo. Por exemplo, no caso da forma log-inversa — também considerada no trabalho de Hoffmann e Furtuoso (1981) —, a correspondente especificação para o caso de três segmentos seria:

$$\log Y_i = a + b\, X_i^{-1} + \delta_1\, D_1 (X_i^{-1} - X_0^{-1}) + \delta_2\, D_2 (X_i^{-1} + X_1^{-1})$$

a qual produziria elasticidades decrescentes dentro de cada segmento.

Se reduções nos resíduos, quando da adoção do método empregado por Hoffmann, são por um lado esperadas, por outro há que se reconhecer serem elas bastante expressivas. Em vista da diferença existente nos graus de liberdade, entretanto, parece que uma comparação mais adequada deveria ser entre os desvios quadráticos ajustados — isto é, dividindo-os pelos respectivos graus de liberdade dos ajustamentos estatísticos. (Esta crítica, aliás, aplica-se também ao nosso estudo anterior, que não levou em consideração as diferenças nos graus de liberdade quando da comparação entre o método de Kakwani e os métodos tradicionais.) Apesar de a adoção desse procedimento não causar qualquer inversão nos resultados obtidos, as diferenças nos resíduos certamente diminuiriam.

[2] Para considerações sobre o uso das variáveis binárias (ou *dummies*) em análise de regressão, cf., por exemplo, Rossi (1981).

Ainda com relação à questão dos resíduos quadráticos, cumpre salientar aqui que reduções sensíveis nos seus valores seriam provavelmente também obtidas com outras especificações tradicionais um pouco mais complexas que aquelas consideradas em nosso estudo. Como evidência empírica dessa afirmativa, ressalte-se que Kakwani (1978) conseguira, com dados de orçamentos familiares relativos à Indonésia, reduções apreciáveis na soma ponderada dos resíduos quadráticos ajustados, para todos os 14 itens de dispêndio considerados no seu estudo: a) quando passa da forma log-inversa (isto é, $\log Y = a + b X^{-1}$) para a log-duplo inversa (isto é, $\log Y = a + b \log X + c X^{-1}$); e b) quando passa da forma semi-log (isto é, $Y = a + b \log X$) para a semi-log inversa (isto é, $Y = a + b \log X + c X^{-1}$). Grandes reduções nos resíduos foram também obtidas por Kakwani para a maioria desses mesmos itens quando da passagem do modelo log-log para o modelo log-log inverso — a redução só não ocorrera de modo unânime porque os resíduos quadráticos foram ajustados para os graus de liberdade.

Para concluir a seção, o fato de Hoffmann ter obtido menor soma nos resíduos quadráticos não implica necessariamente serem as suas elasticidades estatisticamente mais significativas que aquelas obtidas na nossa análise. Com efeito, há que se distinguir aqui entre duas situações. Primeiramente, nos casos onde o modelo log-log simples se apresentara, em nosso estudo, como a melhor opção entre as formas de Engel consideradas, as elasticidades obtidas foram todas altamente significativas. O estudo de Hoffmann, porém, não apresenta os desvios-padrão das suas elasticidades, [3] impossibilitando, então, determinar se elas são estatisticamente mais significativas que as nossas. Quanto aos outros casos, as formas de Engel selecionadas em nosso estudo apresentaram geralmente elasticidades decrescentes ao longo das várias faixas de renda; nessas circunstâncias, a imposição de elasticidades constantes dentro de cada segmento, no mé-

[3] Note-se que, como as elasticidades no segundo e terceiro segmentos são dadas, respectivamente, por $b + \delta_1$ e $b + \delta_1 + \delta_2$, então para obter-se as suas respectivas variâncias há que se somar não só as variâncias desses estimadores, mas também as covariâncias entre eles.

todo utilizado por Hoffmann, poderá ser uma restrição muito forte a adotar-se.

4 — Outras considerações

Dois outros pontos merecem ainda ser comentados aqui. Inicialmente, como bem observou Hoffmann, o coeficiente de determinação (R^2) da Tabela 3 do nosso artigo fora calculado a partir da fórmula:

$$R^2 = 1 - \Sigma l_i^2 \; / \; \Sigma (Y_i \sqrt{n_i})^2$$

em vez de:

$$R^2 = 1 - \Sigma (l_i - \bar{l})^2 \; / \; \Sigma (Y_i \sqrt{n_i} - \overline{Y \sqrt{n}})^2$$

ou, ainda:

$$R^2 = 1 - \Sigma (l_i' - \bar{l}')^2 \; / \; \Sigma (Y_i - \bar{Y})^2$$

onde a barra sobre a variável representa o seu valor médio. Note-se que $l_i \neq l_i'$, já que l_i seria o resíduo na regressão pela origem, com as variáveis transformadas, enquanto l_i' seria o resíduo obtido no modelo com as variáveis originais, mas coeficientes estimados pelos mínimos quadrados ponderados,[4] porque aqueles resultados referem-se ao ajustamento sem a interseção linear (ponto que talvez não tenha ficado muito claro na nossa exposição). Em tais circunstâncias, parece que a primeira opção do R^2 seria a mais apropriada, já que na segunda versão haveria a distinta possibilidade de o coeficiente assumir valores negativos, basicamente porque a soma dos resíduos igual a zero não se constitui numa das equações normais da

[4] Estamos usando a variável Y, aqui, num sentido genérico, podendo então representar também a forma logarítmica da variável dependente na regressão. Quanto ao uso da variável $\sqrt{n}$, ela está relacionada à questão da correção da heterocedasticidade na regressão.

regressão (na primeira versão, o R^2 estaria contido no intervalo zero-um).[5] Na terceira versão, o coeficiente não apresenta, naturalmente, nenhum problema de interpretação, podendo ser facilmente calculado a partir dos parâmetros estimados da regressão.[6]

O segundo ponto a merecer comentários prende-se à preferência revelada por Hoffmann pela elasticidade média, em vez da elasticidade no ponto médio por nós apresentada. Tal preferência é compreensível, já que, no método por ele utilizado, as elasticidades constantes dentro de cada segmento dependem fundamentalmente de como são estabelecidos esses segmentos. É claro que, nessas condições, a média ponderada das elasticidades seria um valor mais informativo do que a elasticidade no ponto médio. Na nossa análise, entretanto, são fornecidas as elasticidades ao longo das nove faixas de renda em que se distribuem os dispêndios; assim, a média de tais valores traria muito pouca informação adicional ao problema.

5 — Comentários finais

Das considerações apresentadas nas seções anteriores não se deve concluir que a técnica adotada por Hoffmann seja destituída de qualquer mérito. Sugerimos aqui pelo menos uma situação onde seu emprego poderia ser útil, ou seja, mais precisamente, numa análise exploratória preliminar visando a encontrar uma função de Engel adequada para o cálculo das elasticidades. Por exemplo, se com o modelo log-log, para três segmentos, constatar-se que as elasticidades efetivamente decrescem (mais ou menos aceleradamente) ao longo desses segmentos, poder-se-ia então adotar a forma funcio-

[5] Sobre estes pontos, cf. Aigner (1971, pp. 85-90), onde, aliás, são ainda apresentadas três outras versões possíveis para o R^2 na regressão sem interseção linear, mas todas elas sofrendo da mesma limitação básica: podem assumir valores fora do intervalo zero-um.

[6] Nessas considerações nos beneficiamos dos comentários recebidos de Hoffmann, que, no entanto, não deve ser responsabilizado por qualquer erro porventura cometido aqui.

nal mais apropriada para captar tal comportamento (sem que houvesse uma demanda excessiva quanto ao número de parâmetros a estimar), possibilitando ainda a obtenção das elasticidades nas várias faixas de renda, em vez das elasticidades dos segmentos apenas. Porém, há que se atentar para o fato de que com objetivos semelhantes dispomos da já consagrada técnica Box-Cox (1964).

Bibliografia

AIGNER, D. J. *Basic econometrics.* Prentice-Hall, Inc., 1971.

BOX, G. E., e COX, D. R. An analysis of transformation. *Journal of the Royal Statistical Society,* B, *26*(2) :211-52, abr. 1964.

GUJARATI, D. Basic econometrics. McGraw-Hill, 1978.

HOFFMANN, R., e FURTUOSO, M. C. *Determinação da elasticidade-renda da demanda de alimentos no estado de São Paulo através do ajustamento de uma poligonal.* III Encontro Brasileiro de Econometria, Olinda, Pernambuco, 8 a 10 de dezembro de 1981.

KAKWANI, N. C. A new method of estimating Engel elasticities. *Journal of Econometrics, 8*:103-10, 1978.

PINDYCK, R. S., e RUBINFELD, D. L. Econometric models and economic forecasts. McGraw-Hill, 1981.

ROSSI, J. W. *As variáveis binárias em análise de regressão.* PDD 05/81. Rio de Janeiro, COPPE/UFRJ, 1981.

———. Elasticidades de Engel para dispêndios familiares na cidade do Rio de Janeiro. *Pesquisa e Planejamento Econômico,* Rio de Janeiro, *12*(2):579-606, ago. 1982.

(Originais recebidos em janeiro de 1983. Revistos em março de 1983.)