

Elasticidades de Engel para dispêndios familiares na cidade do Rio de Janeiro *

José W. Rossi **

Neste artigo estimamos as elasticidades de Engel, para os dados de dispêndio familiar na cidade do Rio de Janeiro, em 1975, aplicando uma nova metodologia proposta por Kakwani (1977a, 1977b e 1980a).

As elasticidades são calculadas levando em conta tanto a curva de Lorenz para os dispêndios totais como a curva de concentração dos dispêndios com o item em estudo, permitindo a obtenção de trajetórias diversas e não-monotônicas para essas elasticidades, o que, aliás, distingue este método daqueles tradicionalmente utilizados.

Da comparação entre essas elasticidades e aquelas obtidas pelos métodos tradicionais e pela técnica da transformação Box-Cox, parece haver razoável concordância de resultados para alguns itens, mas há também diferenças não desprezíveis para certas faixas de dispêndio com outros itens.

Apesar de a análise não ter-se aprofundado o suficiente para permitir demonstrar qualquer superioridade de desempenho do novo método sobre os demais, sugerimos que, pelo menos, uma vantagem inegável do método de Kakwani é a possibilidade da obtenção de um índice geral de elasticidade para os dispêndios com um item sem que se especifique qualquer forma funcional para a sua curva de Engel. Adicionalmente, o índice de elasticidade de um item de dispêndio pode ser decomposto segundo os índices de elasticidades dos subitens que o compõem, o que certamente se constitui também numa propriedade atrativa do novo método.

I — Introdução

As estimativas das elasticidades de Engel neste estudo foram obtidas através de uma nova metodologia desenvolvida por Kakwani (1977a,

* Gostaríamos de agradecer as úteis sugestões de um avaliador anônimo, as quais procuramos incorporar nesta versão do artigo. Obviamente, se erros permanecerem, estes são da inteira responsabilidade do autor.

** Da COPPE/UFRJ.

1977b e 1978) . Daremos nesta seção uma visão geral do seu desenvolvimento e características básicas, reservando para a seção seguinte a sua apresentação detalhada.

Em trabalho publicado já há algum tempo, Mahalanobis (1960) utiliza curvas de concentração para descrever o comportamento do consumo de diversos produtos. Mais recentemente, Kakwani (1977a) usa a mesma técnica para descrever a relação entre as distribuições de um número de outras variáveis econômicas. Dentre estas, vale destacar o uso de tais curvas na obtenção, primeiramente, do índice de concentração para o dispêndio com um produto qualquer, obtendo-se, então, a partir do valor deste índice, o ingrediente básico para o cálculo do índice da elasticidade de Engel para o produto. Em trabalho subsequente, Kakwani (1978) deriva o próprio valor da elasticidade de Engel, obtido após considerar-se uma nova especificação para a curva de Engel, que é derivada de um sistema de novas coordenadas para a curva de Lorenz, como proposto por Kakwani e Podder (1976) . De maneira sucinta, o procedimento é o seguinte: a nova função de Lorenz é ajustada tanto aos dispêndios totais quanto aos dispêndios com o produto sob consideração, e a elasticidade dos dispêndios com o produto é então obtida em termos dos parâmetros da curva ajustada.

De acordo com Kakwani (1978) , esta nova abordagem na estimação das elasticidades, quando aplicada a dados relativos à Indonésia, produziu melhores resultados que aqueles obtidos pelos métodos tradicionais (isto é, pelo ajustamento de formas funcionais específicas para a curva de Engel, tais como: forma linear, log-linear, etc.) . Tal superioridade é medida no contexto dos dois aspectos seguintes: a precisão do ajustamento e o critério da adição (*adding up*) sugerido por Nicholson (1949) . Também com relação à aplicação neste estudo, parece ter sido bom o desempenho da nova metodologia, apesar de um pouco menos satisfatório que aquele obtido por Kakwani.

Os detalhes da metodologia de Kakwani são discutidos na seção seguinte. Na Seção 3, em que temos a aplicação dessa metodologia a dados de dispêndio familiar para a área metropolitana do Rio de Janeiro, discorreremos sobre a natureza dos dados utilizados e apresentamos ainda uma análise detalhada dos resultados obtidos. Final-

mente, a Seção 4 compara esses resultados com aqueles obtidos por outros dois métodos: o da estimação por transformações de variáveis proposta por Box e Cox (1964) e o da estimação pelos métodos tradicionais, concluindo com algumas considerações de ordem geral na Seção 5.

2 — Metodologia ¹

Como ponto de partida, chamemos x a variável renda, $F(x)$ a percentagem acumulada das unidades da renda (*e.g.*, pessoas ou famílias) e $F_I(x)$ a correspondente percentagem acumulada das rendas recebidas. Se supusermos que as unidades da renda x são organizadas em ordem crescente, então é bem sabido que da relação entre $F(x)$ e $F_I(x)$ tem-se a curva de Lorenz para a distribuição das rendas, da qual deriva-se o índice de Gini (que indica o grau da desigualdade existente numa distribuição de renda qualquer) como um menos duas vezes a área sob a curva. Para os nossos propósitos, a variável x representará gastos, em vez de renda. Nestas circunstâncias, a curva de Lorenz indicará a concentração dos gastos. Para a utilização a seguir, denotemos o índice de Gini correspondente a tal curva de concentração como G .

Se definirmos, agora, $v_i(x)$ como a função de Engel para o produto i e $F_I[v_i(x)]$ a percentagem acumulada dos gastos com aquele produto, então a relação entre $F(x)$ e $F_I[v_i(x)]$ produzirá a curva de concentração para o produto i .² O índice de concentração do produto será então um menos duas vezes a área sob a curva de concentração, sendo denotada de C_i .

Para obter o índice da elasticidade de Engel para o produto i , procedemos como se segue: primeiramente, observe-se que, como

¹ Esta seção é essencialmente reproduzida de Rossi (1982).

² Deve ser notado aqui que "... a curva de concentração para $g(x)$ não é a mesma coisa que a curva de Lorenz para $g(x)$. Ambas só serão idênticas se $g(x)$ for estritamente monotônica e possuir derivada contínua $g'(x) > 0$ para todo x ". Cf. Kakwani (1977a, p. 721).

notado por Kakwani (1977a), a curva de concentração para o produto i estará acima (abaixo) da curva de Lorenz para a distribuição de x se a elasticidade do produto i com respeito a x , $n_i(x)$, for menor (maior) que a unidade para todo $x \geq 0$ (cf. apêndice técnico, nota 1).^{*} Portanto, segue-se que "... quanto maior for a diferença absoluta $n_i(x) - 1$ para todo x , maior será a área entre a curva de concentração do produto i e a curva de Lorenz para x "³ (cf. apêndice técnico, nota 1). A área entre as duas curvas poderá ser, pois, usada como medida da elasticidade do produto sob consideração. Mais precisamente, o índice de elasticidade do produto i será considerado como:

$$E_i = C_i - G \quad (1)$$

onde, como já citado, G é o índice de Gini da curva de Lorenz para a distribuição dos gastos como um todo e C_i o índice de concentração obtido da curva de concentração para o produto i . Portanto, quando E_i , que é duas vezes a área entre as duas curvas, for maior (menor) que zero, o produto i será considerado elástico (inelástico).

Deve ser observado aqui que o índice E_i indica, meramente, o quanto a elasticidade do produto se desvia da unidade ao longo de toda a distribuição. Naturalmente, a elasticidade de Engel poderá variar apreciavelmente ao longo dos vários níveis do dispêndio total, o que não seria captado pelo índice. De qualquer maneira, a medida tem a característica atrativa de poder ser calculada sem que seja especificada a forma da função de Engel.⁴ Adicionalmente, ela é

* O apêndice técnico referido não foi incorporado à edição deste artigo, mas encontra-se à disposição dos interessados junto à Editoria da *PPE*. (N. do E.)

³ Cf. Kakwani (1977b, p. 4).

⁴ Note-se que o índice de Gini (e também o índice de concentração), como calculado na prática pela soma das áreas dos trapézios sob a curva de Lorenz, não faz uso de qualquer forma funcional para a curva. A adoção aqui de uma forma funcional para a curva de Lorenz obedece a razões de ordem prática, já que os seus parâmetros entram no cálculo das elasticidades de Engel estimadas na metodologia aqui empregada.

dotada das seguintes propriedades interessantes: se um grupo g de dispêndios for a soma de k itens, então tem-se, de acordo com Kakwani (1977b), que (cf. apêndice técnico, nota 2):

$$C_g = \sum_{i=1}^k \gamma_i C_i \quad (2)$$

onde γ_i é a participação dos gastos com o item nos dispêndios totais do grupo g a que ele pertence e C_i e C_g são os índices de concentração para o item i e o grupo g , respectivamente. A utilização de (1) em (2) resulta em:

$$E_g = \sum_{i=1}^k \gamma_i E_i \quad (3)$$

que mostra o índice de elasticidade do grupo g como uma média ponderada dos índices das elasticidades dos vários itens que compõem o grupo g . Da mesma maneira, pode ser demonstrado [e.g., Kakwani (1977a)] que (cf. apêndice técnico, nota 2):

$$G = \sum_{i=1}^n \delta_i C_i \quad (4)$$

onde δ_i é a participação dos gastos do grupo g no conjunto dos dispêndios totais e n o número de grupos existentes. Note-se que a substituição de (1) em (4) fornece:

$$\sum_{i=1}^n \delta_i E_i = 0 \quad (5)$$

isto é, a média ponderada dos índices de elasticidade dos vários grupos de dispêndio é igual a zero, onde os pesos são proporcionais aos gastos com o grupo do produto. Esta propriedade, como notado por Kakwani (1977b), é equivalente a dizer que o índice de elasticidade satisfará o critério da adição (*adding up*) proposto por Nicholson (1949). Tal critério sugere que a média ponderada das elasticidades dos diversos produtos deve ser igual a 1 para todos os níveis do dispêndio total. Esta é uma propriedade bastante plausível,

pois significa que, se os dispêndios marginais, para qualquer nível do dispêndio total, produzem soma igual a 1, então qualquer dado aumento nos dispêndios totais será sempre alocado em algum produto (ou produtos).

Observe-se que até aqui não se adotou qualquer forma funcional para a curva de Lorenz a ser ajustada aos dados dos dispêndios. Kakwani e Podder (1976) sugerem, entretanto, uma útil forma funcional que, baseada num sistema de novas coordenadas, produz os elementos que podem ser úteis na estimação do índice da elasticidade de Engel e são necessários para obter o valor da própria elasticidade. O procedimento é como se segue: chamemos:

$$n = \frac{1}{\sqrt{2}} [F(x) - F_1(x)] \quad \text{e} \quad \pi = \frac{1}{\sqrt{2}} [F(x) + F_1(x)] \quad (6)$$

que são mostrados no gráfico a seguir,⁵ e seja a função de Lorenz dada por:

$$n = g(\pi) \quad (7)$$

onde π varia entre zero e $\sqrt{2}$.⁶ Se a função de densidade $f(x)$ for contínua, então as derivadas de $F(x)$ e $F_1(x)$ existem, sendo dadas, respectivamente, por $f(x)$ e $xf(x)/\mu$, onde μ é a média da distribuição.⁷ Nestas circunstâncias, tem-se então, de acordo com Kakwani (1978), que:

$$\frac{dn}{d\pi} = g'(\pi) = \frac{\mu - x}{\mu + x} \quad (8)$$

⁵ Veja-se a prova destes resultados no apêndice técnico, nota 3.

⁶ Deve ser notado, aqui, que a curva de Lorenz em (7) seria: a) simétrica se $g(\pi) = g(\sqrt{2} - \pi)$ para todo π ; b) enviesada na direção (1,1) se $g(\pi) > g(\sqrt{2} - \pi)$ para $\pi < 1/\sqrt{2}$; e c) enviesada para (0,0) se $g(\pi) < g(\sqrt{2} - \pi)$, para $\pi < 1/\sqrt{2}$. Cf. Kakwani e Podder (1976).

⁷ Estes resultados são demonstrados no apêndice técnico, nota 1.

e:

$$\frac{d^2n}{d\pi^2} = g''(\pi) = \frac{-2\sqrt{2}\mu^2}{f(x)(\mu+x)^3} \quad (9)$$

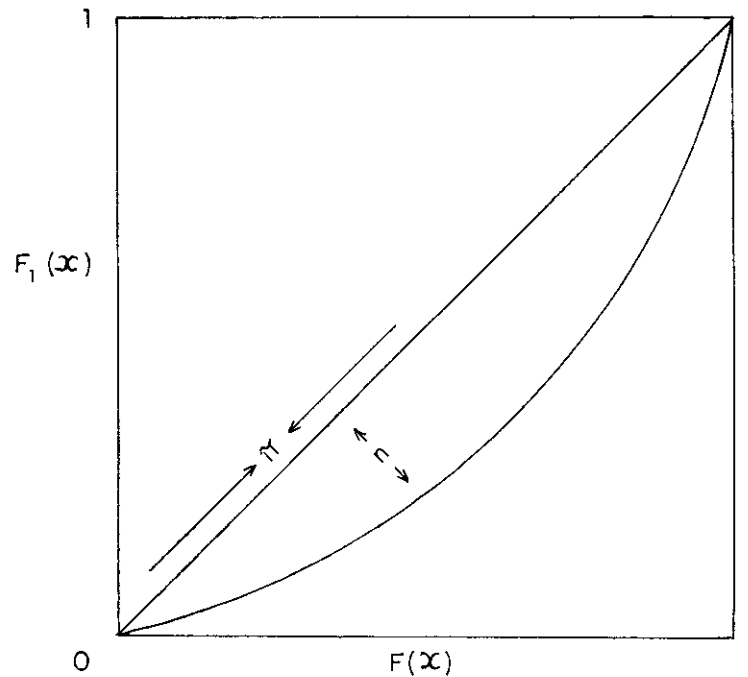
Estas expressões serão úteis na derivação do valor da elasticidade de Engel, como será visto adiante.

Uma função apropriada para representar a curva de Lorenz, dentro da estrutura das novas coordenadas descritas acima, seria, segundo Kakwani e Podder (1976):

$$n = a\pi^\alpha (\sqrt{2} - \pi)^\beta \quad (10)$$

para $a > 0$, $\alpha > 0$ e $\beta > 0$.

De acordo com os autores, a restrição $a > 0$ significa que $n \geq 0$ (isto é, a curva de Lorenz situa-se abaixo da linha de perfeita igual-



dade), com $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ garantindo que n assume valor zero quando $\pi = 0$ ou $\pi = \sqrt{2}$.⁸ Adicionalmente, a curva será: a) simétrica se $\alpha = \beta$; b) enviesada na direção $(1, 1)$ se $\beta > \alpha$; e c) enviesada na direção $(0, 0)$ se $\beta < \alpha$. Esses mesmos autores mostram ainda que a função tem o índice de Gini dado por:⁹

$$G = [2 a (\sqrt{2})^{1+\alpha+\beta}] B (1 + \alpha; 1 + \beta) \quad (11)$$

onde $B(1 + \alpha; 1 + \beta)$ é a função beta.

Naturalmente, o sistema das novas coordenadas definido acima poderá ser também utilizado na estimação da curva de concentração do produto i , já que esta seria similar, em espírito, à curva de Lorenz. Portanto, equivalente às expressões de (6) a (9), temos agora:

$$n_i = (1/\sqrt{2}) \{F(x) - F_i[v_i(x)]\} \quad (12)$$

$$\pi_i = (1/\sqrt{2}) \{F(x) + F_i[v_i(x)]\} \quad (13)$$

$$g'_i(\pi_i) = \frac{\mu_i - v_i(x)}{\mu_i + v_i(x)} \quad (14)$$

$$g''_i(\pi_i) = - \frac{2\mu_i^2 \sqrt{2} v'_i(x)}{f(x) [\mu_i + v_i(x)]^3} \quad (15)$$

onde μ_i é o valor médio da distribuição de $v_i(x)$ e $v'_i(x)$ a sua derivada primeira.¹⁰ Por outro lado, equivalente à expressão em (10), temos agora:

$$n_i = a_i \pi_i^{\alpha_i} (\sqrt{2} - \pi_i)^{\beta_i} \quad (16)$$

⁸ Kakwani e Podder (1976) mostram também que, se $0 < \alpha \leq 1$ e $0 < \beta \leq 1$, então $g''(\pi) < 0$, isto é, a curva não terá pontos de inflexão.

⁹ Para um esboço da prova deste resultado, veja-se o apêndice técnico, nota 4.

¹⁰ Para detalhes sobre a obtenção das expressões (14) e (15), cf. Kakwani (1978).

Se a elasticidade para o produto i for desejada, então Kakwani (1978) mostra que, após combinarmos as equações (8), (9), (14) e (15), temos:

$$\varepsilon_i = \frac{v'_i(x) \cdot x}{v_i(x)} = \frac{g''_i(\pi_i) [1 + g'(\pi)]^2 [1 - g'(\pi)]}{g''(\pi) [1 + g'_i(\pi)]^2 [1 - g'_i(\pi_i)]} \quad (17)$$

onde $g'(\pi)$ e $g''(\pi)$ significam as derivadas primeira e segunda, respectivamente, da função g com relação a π : definição semelhante aplica-se para $g'_i(\pi_i)$ e $g''_i(\pi_i)$.

O processo de avaliação da expressão em (17) é como se segue: primeiramente, é fácil observar de (6) e (12) que:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\pi + g(\pi)] = \frac{1}{\sqrt{2}} [\pi_i + g_i(\pi_i)] \quad (18)$$

ou:

$$\pi + g(\pi) = \pi_i + g_i(\pi_i) \quad (19)$$

Note-se que a equação em (19) permite obter o valor de π_i , uma vez conhecido o valor de π , o qual, por sua vez, é determinado de (8), uma vez fixado o valor de x . Naturalmente, para tornar estas expressões operacionais, basta considerar as formas funcionais dadas em (10) e (16) para a curva de Lorenz, cujos parâmetros podem ser facilmente estimados através do método dos Mínimos Quadrados Ordinários.

3 — Aplicação

3.1 — Natureza dos dados

Os dados utilizados neste trabalho baseiam-se na pesquisa Estudo Nacional da Despesa Familiar (ENDEF) levada a efeito pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) entre agosto de 1974 e agosto de 1975, na área metropolitana do Rio de Janeiro.

Apesar de a amostra básica daquela pesquisa ser constituída de 3.475 famílias, o perfil de dispêndio de todas as 1.784.000 famílias urbanas fora obtido, pelo IBGE, levando em conta a estrutura populacional da área. Os dados são distribuídos segundo nove classes de dispêndio médio familiar, com informações sobre os dispêndios em cada um dos vários itens que constituem o orçamento familiar.

3.2 — Análise dos resultados

3.2.1 — Os índices de elasticidade

A Tabela 1 apresenta os resultados das estimações de Mínimos Quadrados Ordinários para as equações (10) e (16), bem como os índices de concentração e de elasticidade para os diversos itens do dispêndio familiar. Note-se, primeiramente, que os ajustamentos das funções são, em geral, muito bons, com os coeficientes de determinação quase sempre acima de 0,99.¹¹

Quanto aos índices de concentração e de elasticidade, cabem as seguintes considerações: observe-se, inicialmente, que, se a curva de concentração para os dispêndios totais coincidir com a curva de concentração para os dispêndios com um dado item do orçamento familiar, então é claro que estes estariam guardando proporções fixas com aqueles ao longo de toda a extensão da distribuição de tais dispêndios. Vale dizer, a elasticidade dos dispêndios com o item seria unitária ao longo das várias classes dos dispêndios, e o

11 Para simplificar a apresentação dos resultados, omitimos na Tabela 1 os desvios-padrão dos estimadores, o que, entretanto, não deve trazer maiores conseqüências, já que o coeficiente R^2 fornece bem uma medida da precisão de ajustamento obtido. Em algumas circunstâncias, porém, tais informações seriam indispensáveis: por exemplo, para teste de hipótese sobre os parâmetros da função e também na determinação da variância do índice de Gini, como dada pela expressão em (11) — sobre este último ponto cf. Kakwani e Podder (1976) — ou talvez ainda no cálculo das variâncias das elasticidades como dadas pela expressão em (17), mas, se estas últimas são importantes, seriam também grandes as dificuldades em obtê-las, em vista da complexidade da expressão em (17).

TABELA I

Estimativas das funções de Lorenz e dos índices de concentração e de elasticidade para itens de dispêndio familiar na cidade do Rio de Janeiro: dados do IBGE — 1975

Itens	α	β	R^2	Índice de concentração (C_i)	Índice de elasticidade (E_i)
1 — Total de alimentação	0,2288	0,8719	0,9968	0,2559	-0,2089
1.1 — Cereais e derivados	0,0748	1,1028	0,8724	0,0881	-0,3767
1.2 — Tubérculos	0,1732	0,8749	0,9968	0,1973	-0,2675
1.3 — Verduras	0,2175	0,9078	0,9952	0,2421	-0,2227
1.4 — Frutas	0,4106	1,0002	0,9974	0,4084	-0,0564
1.5 — Carne e peixe	0,2656	0,9433	0,9941	0,2867	-0,1781
1.6 — Ovos, leite e queijo	0,3010	0,9358	0,9987	0,3152	-0,1496
1.7 — Bebidas	0,2278	1,0020	0,9851	0,2338	-0,2310
1.8 — Alimentação fora de casa	0,3370	0,8576	0,9993	0,3080	-0,0968
1.9 — Açúcar, óleo de cozinha, etc.	0,1062	1,0125	0,9634	0,1216	-0,8432
Média ponderada				0,2551	-0,2118
2 — Vestuário e calçado	0,5176	0,9442	0,9998	0,5148	0,0500
3 — Habitação (aluguel, eletrodomésticos, etc.)	0,4904	0,8441	0,9990	0,5112	0,0464
4 — Saúde e cuidados pessoais	0,5168	0,9497	0,9998	0,5246	0,0598
5 — Educação (livros, anuidades, uniformes, etc.)	0,7157	1,0695	0,9999	0,6477	0,1829
6 — Recreação	0,6149	1,0288	0,9997	0,5773	0,1125
7 — Fumo	0,1751	0,7142	0,9797	0,2043	-0,2605
8 — Veículo próprio	0,8983	1,2131	0,9990	0,7361	0,2713
9 — Transporte urbano e viagens a longa distância	0,2405	1,0255	0,9949	0,2599	-0,2149
10 — Outras despesas*	0,6826	0,9748	0,9993	0,6501	0,1853
Média ponderada	0,4391	0,8460	0,9998	0,4648	0,0010

*Inclui miscelâneas, impostos, seguros e contribuições trabalhistas.

índice de elasticidade para o item seria, nestas circunstâncias, nulo. Com essas considerações, verifica-se que todos os itens de alimentação são inelásticos, já que apresentam índices de elasticidade negativos. Particularmente inelásticos são “cereais”, “açúcar e óleo de cozinha” e “tubérculos”; ligeiramente inelásticos são os dispêndios em “frutas” e “alimentação fora de casa”. Para os demais itens não relacionados à alimentação, temos que os gastos em “veículo próprio” são altamente elásticos, em “educação” e “recreação” razoavelmente elásticos, em “vestuário”, “habitação” e “saúde” apenas ligeiramente elásticos e, por fim, em “fumo” e “transporte urbano” fortemente inelástico (este último inclui viagens a longa distância).

Como observações finais em relação aos resultados da Tabela 1, note-se que a condição de que o índice de concentração (e de elasticidade) de um grupo qualquer de dispêndio (ou dos próprios dispêndios totais) seja a média ponderada dos índices de concentração (e de elasticidade) dos itens que o compõem é preenchida pelos dados deste estudo.

3.2.2 — As elasticidades estimadas

Já foi observado que o índice de elasticidade para os dispêndios em um dado produto indica, meramente, o quanto a sua elasticidade desvia-se da unidade ao longo de toda a distribuição dos dispêndios. Essas elasticidades podem, entretanto, variar apreciavelmente ao longo das várias classes do dispêndio total. Nessas circunstâncias, parece, pois, ser de interesse o conhecimento desses valores. Com esse objetivo, a Tabela 2 apresenta as elasticidades calculadas com o uso da fórmula dada em (17).¹² Cabem aqui as seguintes observações

¹² Note-se que, para o cálculo desta expressão, há, primeiramente, que se conhecer π e π_i . Estes dois valores foram assim obtidos: inicialmente, da equação (8) resolveu-se para π pelo método de Newton-Rapson, para em seguida, e pelo mesmo método, determinarmos π_i da equação (19). (Para simplificar os cálculos, em ambas as expressões utilizamos como estimadores de μ_i e μ os valores médios observados na distribuição empírica; rigorosamente falando, entretanto, deveríamos usar os valores estimados das funções ajustadas, os quais

quanto aos valores obtidos: com respeito aos itens de alimentação, observe-se que todos eles são inelásticos a partir da segunda classe do dispêndio total, e tais elasticidades decrescem à medida que avançam os níveis do dispêndio; particularmente inelásticos são “cereais” e “açúcar e óleo de cozinha”, chegando mesmo a assumir características de bens inferiores (isto é, com elasticidades negativas) nas últimas classes do dispêndio total. Ainda com relação aos itens de alimentação, chama a atenção o elevado grau de elasticidade (8,4) para os dispêndios em “carne e peixe” da primeira classe do dispêndio total. Naturalmente, tal fato só poderia ocorrer na presença de baixos níveis iniciais de consumo do produto, pois só assim uma variação no dispêndio total permitiria acentuada variação relativa no seu consumo.

Para os demais itens do orçamento familiar temos: a) “vestuário”, “habitação” e “saúde” são ligeiramente elásticos, com as elasticidades permanecendo aproximadamente constantes ao longo das várias faixas do dispêndio total; b) “educação” e “recreação” são razoavelmente elásticos para quase todas as faixas do dispêndio total; c) “fumo” e “transporte urbano” são geralmente inelásticos, cujas elasticidades decrescem com os níveis do dispêndio total; e d) “veículo próprio”, após atingir a elevadíssima elasticidade de 10,8 na terceira faixa do dispêndio, assume, daí em diante, elasticidade geralmente acima do valor de 2. Com relação a este último item, deve ser aqui ressaltado que o valor da elasticidade (-4,7) para a primeira faixa (e em menor grau também o da segunda classe) do dispêndio não faz, definitivamente, o menor sentido ali (esta questão será abordada adiante). É possível mesmo que tal valor tenha contribuído para algum viés positivo na estimativa da elasticidade da terceira classe do dispêndio. De qualquer maneira, é

seriam obtidos como segue: primeiramente, verifica-se de (8) que a função $g(\pi)$ atinge valor máximo quando $x = \mu$, produzindo aí $\pi = \frac{\sqrt{2}\alpha}{\alpha + \beta}$, que, substituído em (10), fornece o valor de n . Conhecidos π e n , então de (5) determinamos F e F_i , e, por conseguinte, o valor estimado de μ ; raciocínio semelhante aplica-se com relação a μ_i . Deve ser observado aqui que as expressões (8), (19) e (17) foram resolvidas num único programa computacional.

TABELA 2

Elasticidades dos itens de dispêndio familiar com respeito ao dispêndio total para a cidade do Rio de Janeiro: dados do IBGE — 1975

Itens*	Classe de despesa corrente da família, em termos de salários mínimos (elasticidades medidas no ponto do dispêndio médio familiar)										Ponto médio total
	Menos de 1	1 a 2	2 a 3,5	3,5 a 5	5 a 7	7 a 10	10 a 15	15 a 30	30	Meis de 30	
1 — Total de alimentação	2,60	1,04	0,70	0,62	0,58	0,53	0,47	0,40	0,43	0,54	
1.1 — Cereais e derivados	4,31	0,83	0,34	0,21	0,15	0,09	0,03	-0,02	-0,04	0,10	
1.2 — Tubérculos	1,07	0,87	0,56	0,48	0,43	0,39	0,33	0,25	0,35	0,40	
1.3 — Verduras	3,43	1,14	0,72	0,61	0,55	0,49	0,41	0,31	0,32	0,51	
1.4 — Frutas	3,27	1,42	1,17	1,10	1,06	1,00	0,86	0,56	0,10	1,02	
1.5 — Carne e peixe	8,43	1,38	0,87	0,75	0,69	0,61	0,50	0,33	0,24	0,63	
1.6 — Ovos, leite e queijo	1,46	1,02	0,85	0,81	0,78	0,72	0,62	0,45	0,35	0,74	
1.7 — Bebidas	0,87	0,78	0,60	0,65	0,60	0,52	0,38	0,18	0,02	0,54	
1.8 — Alimentação fora de casa	2,04	1,13	0,88	0,83	0,82	0,80	0,77	0,74	0,95	0,80	
1.9 — Açúcar, óleo de cozinha, etc.	2,47	0,84	0,43	0,32	0,24	0,18	0,11	0,04	-0,01	0,19	
1.9 — Média ponderada	3,54	1,02	0,67	0,60	0,56	0,53	0,49	0,40	0,44	0,54	
2 — Vestuário	1,44	1,32	1,30	1,25	1,22	1,20	1,18	1,13	1,07	1,20	
3 — Habitação	0,53	0,84	1,03	1,07	1,08	1,08	1,08	1,08	0,86	1,08	
4 — Saúde	0,95	1,13	1,22	1,30	1,17	1,16	1,16	1,15	1,17	1,17	
5 — Educação	-0,49	2,13	2,33	1,88	1,68	1,70	1,60	1,71	-0,60	1,61	
6 — Recreação	1,94	1,89	1,76	1,56	1,47	1,42	1,41	1,33	0,12	1,43	
7 — Fumo	3,86	1,08	0,61	0,49	0,43	0,38	0,33	0,28	0,36	0,39	
8 — Transporte	3,23	1,20	0,83	0,72	0,64	0,52	0,36	0,13	-0,04	0,56	
9 — Veículo próprio	-4,69	0,41	10,87	2,99	2,21	1,96	2,00	2,67	0,64	2,00	
10 — Outras despesas	-0,08	1,20	1,83	1,64	1,52	1,45	1,43	1,46	1,54	1,46	
10 — Média ponderada	1,060	1,021	0,989	0,964	0,963	0,984	1,020	1,065	0,920	1,023	

*Para detalhes adicionais sobre alguns destes itens, cf. Tabela 1.

por demais sabido que o automóvel exerce um grande fascínio sobre os brasileiros de baixa renda, representando um importante símbolo de *status* social para aquela classe.

As dificuldades com alguns dos resultados da Tabela 2 devem ser aqui também explicitadas. Primeiramente, como notado acima, a elasticidade de menos 4,7 para "veículo próprio", na primeira faixa, não faz sentido. Naturalmente, um consumidor situado na faixa correspondente a um salário mínimo de dispêndio total certamente não seria capaz de arcar com as despesas de aquisição ou manutenção de um veículo. Aliás, os dados observados captam bem esta realidade, pois apresentam dispêndio médio quase nulo ali. Portanto, tal fato deve ser, em parte, responsabilizado por aquela estranha elasticidade negativa. Surpreendem também as elasticidades negativas com relação aos dispêndios em educação na primeira e última faixas, pois parece difícil aceitar que o item possa vir a assumir características de um bem inferior; aliás, as próprias elasticidades significativamente positivas nas faixas vizinhas parecem depor contra essas elasticidades negativas.

As razões para tais elasticidades negativas nem sempre são claras. Sabe-se, por exemplo, que elas estão associadas a trechos da curva de concentração com curvatura inversa àquela usualmente observada.¹³ Enquanto tal comportamento é o que se deve esperar para um bem inferior, a explicação seria problemática para outras situações.¹⁴ Ressalte-se ainda que, para os casos onde os itens de dis-

¹³ A constatação de tal fato é simples, pois basta avaliar a derivada segunda da função em (16), isto é, $g''(\pi_i)$. É interessante notar que a inversão na curva de concentração só poderá ocorrer se α e/ou β em (16) forem maiores que a unidade. Para verificar esse ponto, escreva-se a derivada segunda como [cf. Kakwani e Podder (1976)]:

$$g'' = -g \left[\frac{\alpha(1-\alpha)}{\pi^2} + \frac{\beta(1-\beta)}{(\sqrt{2}-\pi)^2} + \frac{2\alpha\beta}{(\sqrt{2}-\pi)\pi} \right]$$

¹⁴ Note-se, por exemplo, que a elasticidade poderia ser negativa mesmo que a função em (16) tivesse a curvatura usual, pois bastaria apenas que $(1-g') < 0$ em (17). Como mostrado por Kakwani (1980b), entretanto, $g' > 1$ (e $g' < -1$) dificilmente ocorrerá se α e β estiverem contidos no intervalo $(0, 1)$, pelo menos no contexto de distribuição de renda.

pêndio apresentam algum trecho com caracterização de bem inferior, as suas curvas de concentração ajustadas refletem de maneira apropriada as mudanças de curvatura exibidas pelos dados observados. Por exemplo, temos as seguintes configurações: a) cereais — os dados observados mostram uma redução efetiva nos dispêndios médios familiares com o item na sexta, sétima e oitava classes do dispêndio total; b) açúcar e óleo de cozinha — há redução no dispêndio médio com o item na sétima e oitava classes; e c) transporte urbano — apresenta redução no dispêndio médio na oitava classe. (Note-se que todos estes itens têm $\beta > 1$.)

A Tabela 2 mostra ainda a média ponderada das elasticidades, tanto para os nove itens de alimentação quanto para os 10 grandes itens do dispêndio total. Note-se, primeiramente, que a média ponderada das elasticidades dos itens de alimentação reproduz aproximadamente a elasticidade do item “alimentação total”. A discrepância maior, neste particular, ocorre na primeira faixa do dispêndio total, sugerindo, portanto, que as estimativas (ou algumas delas) ali listadas possam conter menor precisão que nas demais posições. A média ponderada das elasticidades dos 10 itens que compõem o dispêndio total, por outro lado, não se afasta muito da unidade, sugerindo, pois, ser o critério da adição apenas aproximadamente satisfeito.

4 — Comparação com outros métodos

Os valores das elasticidades, apresentados acima, parecem estar em geral de acordo com a expectativa. Cumpre indagar, então, se tais estimativas são também as mais apropriadas. Apesar da dificuldade para uma resposta definitiva a esse respeito, parece que, da comparação entre as estimativas obtidas com a nova metodologia e aquelas obtidas com os outros métodos de estimação em uso, poderemos ter alguns elementos para formar um juízo sobre a questão. Com esse objetivo, as elasticidades-dispêndio foram aqui também estimadas por dois outros métodos freqüentemente adotados em trabalhos empíricos.

Primeiramente, seguindo a metodologia tradicional, foram ajustadas, para cada item de dispêndio, cinco formas específicas para a curva de Engel; mais precisamente, foram consideradas as especificações: a) $Y = a + b X$; b) $Y = a + \frac{b}{X}$; c) $Y = a + b \log X$; d) $\log Y = a + b \log X$; e e) $\log Y = a + \frac{b}{X}$. Selecionou-se, em seguida, para o cálculo das elasticidades, a forma funcional com melhor ajustamento estatístico, o qual fora aqui tomado como uma combinação do coeficiente de determinação (R^2) e do valor de Durbin-Watson (DW) para autocorrelação.¹⁵

Como as especificações acima seriam, presumivelmente, válidas para dados individuais, tem-se então que, para dados agregados, como é o caso da aplicação neste estudo, o uso da técnica de estimação de Mínimos Quadrados Ordinários não seria apropriado, em vista da natureza heterocedástica das perturbações da regressão (u). É sabido, entretanto, que as variâncias destas perturbações, aqui, são proporcionais ao inverso do número de observações de cada classe de dispêndio (isto é, $V(u) = \sigma^2/n_g$), ficando, portanto, simples a adoção do método apropriado de estimação, ou seja, o dos Mínimos Quadrados Ponderados, o que, no caso, significa multiplicar os dois lados da equação pela raiz quadrada do número de observações (n_g) e aplicar Mínimos Quadrados Ordinários no modelo assim transformado, já que, por este procedimento, fica assegurada a eliminação da heterocedasticidade.¹⁶

A abordagem descrita acima implica que as equações de (1) a (5) devam ser estimadas sem a interseção linear. Como muitos dos pacotes computacionais em uso corrente (*e.g.*, SPSS) não dispõem da opção “regressão pela origem”, então nas suas utilizações

¹⁵ Note-se que o uso simplesmente do coeficiente de determinação (R^2) não seria apropriado por não serem comparáveis as variáveis dependentes dos dois grupos de equações. Após alguns ajustamentos, poderíamos comparar os somatórios dos resíduos quadráticos desses dois grupos, mas esse exercício não fora tentado aqui. De qualquer maneira, para uma discussão desta matéria, cf. Rao e Miller (1971).

¹⁶ Sobre esta questão, cf. Kmenta (1971).

ter-se-á automaticamente tal interseção, conduzindo, portanto, a uma estimação inapropriada. Entretanto, através de um simples método proposto recentemente por Hawkins (1980), pode-se estimar o modelo sem interseção, com os pacotes em uso, sem qualquer dificuldade, bastando para tal utilizar, além das n observações de X e Y , também estes mesmos valores com o sinal trocado e proceder à regressão com $2n$ observações, o que garantirá efetivamente que a linha ajustada passe pela origem, tendo os estimadores assim obtido os valores apropriados (há, entretanto, que se proceder a uma ligeira correção nos valores dos desvios-padrão produzidos na estimação).

Após adotar a técnica que acabamos de descrever, as elasticidades obtidas pela “melhor” regressão são reunidas na Tabela 3. Observe-se, inicialmente, que são muito bons os ajustamentos produzidos, sobretudo em termos do coeficiente de determinação (R^2), fato, aliás, que não deve causar surpresa, pois, como mostrado por Cramer (1964), é comum, com dados agregados, a obtenção de regressões com elevados valores para o coeficiente R^2 . Conforme pode ainda ser notado na tabela, assim como demonstrado por Fendt Jr. (1970), em estudo com dados de orçamentos familiares para a cidade do Rio de Janeiro em 1967, concluímos ser a curva de Engel do tipo mono-logarítmica mais apropriada para as “necessidades” (itens de alimentação, geralmente) e aquela do tipo duplo-logarítmica mais apropriada para outros itens do dispêndio, sobretudo bens de luxo (estas conclusões, aliás, estão inteiramente de acordo com as observações de Ernst Engel, ainda em 1857).¹⁷

Antes de procedermos a qualquer comparação entre os resultados das Tabelas 2 e 3, há que se reconhecer, aqui, pelo menos uma vantagem associada ao uso da nova metodologia de Kakwani: a possibilidade de qualquer trajetória para as elasticidades ao longo das várias faixas de renda. Note-se que os métodos tradicionais são geralmente bem mais rígidos a este respeito, pois permitem, quase sempre, apenas elasticidades constantes ou monotônicas (crescentes ou decrescentes).

¹⁷ Sobre este ponto, cf., por exemplo, Cramer (1971).

TABELA 3
Elasticidades de Engel para dispêndios na cidade do Rio de Janeiro: dados do IBGE — 1975

Ítem	Elasticidades no ponto da média das classes de dispêndio familiar										Ponto médio total			
	a	b	R ²	DIF	1	2	3	4	5	6		7	8	9
1 - Alimentação*	9,54 (0,07)	-10144,52 (918)	0,9996	1,38	3,12	1,43	0,81	0,53	0,38	0,27	0,19	0,11	0,05	0,20
1.1 - Cereais*	7,46 (0,03)	-5313,55 (455)	0,9999	1,24	1,69	0,78	0,44	0,29	0,21	0,15	0,10	0,06	0,03	0,16
1.2 - Tubérculos**	-699,94 (39,6)	90,38 (3,9)	0,9971	1,77	2,26	0,85	0,64	0,49	0,39	0,34	0,31	0,29	0,22	0,43
1.3 - Verduras**	-2211,57 (111)	260,70 (11)	0,9962	2,86	4,50	1,49	0,89	0,61	0,49	0,40	0,36	0,34	0,24	0,53
1.4 - Frutas**	-2931,40 (223)	328,22 (22)	0,9770	1,42	14,18	5,72	2,65	1,44	0,92	0,60	0,53	0,40	0,26	0,91
1.5 - Carne e peixe**	-12483,04 (563)	1471,06 (56)	0,9957	1,80	7,08	2,60	1,16	0,76	0,57	0,45	0,42	0,36	0,25	0,62
1.6 - Ovos, leite e queijo**	-4236,14 (244)	498,10 (24)	0,9914	1,11	4,99	2,53	1,39	0,89	0,69	0,56	0,45	0,33	0,20	0,70
1.7 - Bebidas**	-1959,30 (214)	242,68 (21)	0,9841	1,66	2,01	1,25	0,85	0,60	0,46	0,34	0,33	0,36	0,24	0,50
1.8 - Alimentação fora de casa**	-1,25 (0,3)	0,85 (0,03)	0,9968	1,50	0,85	0,85	0,85	0,85	0,85	0,85	0,85	0,85	0,85	0,85
1.9 - Açúcar, óleos, etc.*	7,31 (0,02)	-6192,76 (341)	0,9999	3,08	1,90	0,87	0,49	0,33	0,23	0,16	0,11	0,07	0,03	0,18
2 - Vestuário***	-4,93 (0,4)	1,21 (0,04)	0,9998	1,15	1,21	1,21	1,21	1,21	1,21	1,21	1,21	1,21	1,21	1,21
3 - Habitação***	-1,62 (0,2)	1,05 (0,02)	0,9999	1,10	1,05	1,05	1,05	1,05	1,05	1,05	1,05	1,05	1,05	1,05
4 - Saúde**	-4,45 (0,09)	1,16 (0,000)	0,9999	1,33	1,16	1,16	1,16	1,16	1,16	1,16	1,16	1,16	1,16	1,16
5 - Educação**	-11,22 (0,7)	1,70 (0,07)	0,9988	2,99	1,70	1,70	1,70	1,70	1,70	1,70	1,70	1,70	1,70	1,70
6 - Recreação**	-8,92 (0,6)	1,46 (0,06)	0,9991	1,51	1,46	1,46	1,46	1,46	1,46	1,46	1,46	1,46	1,46	1,46
7 - Fumo**	-2226,13 (243)	287,73 (24)	0,9890	2,90	2,95	1,20	0,64	0,48	0,43	0,36	0,29	0,20	0,12	0,45
8 - Transporte urbano*	7,32 (0,06)	-1106,04 (818)	0,9995	2,95	3,41	1,56	0,88	0,58	0,42	0,29	0,20	0,12	0,05	0,32
9 - Veículo próprio*	7,73 (0,4)	-41310,22 (3659)	0,9682	1,30	12,69	5,82	3,29	2,18	1,55	1,10	0,76	0,44	0,19	1,20
10 - Outras despesas***	-7,04 (0,26)	1,46 (0,03)	0,9999	2,99	1,46	1,46	1,46	1,45	1,46	1,46	1,46	1,46	1,46	1,46

NOTA: Os dados entre parênteses são os desvios-padrão dos estimadores e as classes de dispêndio, aqui, são as mesmas da Tabela 2.

* Função $\log Y = a + \frac{b}{X}$.

** Função $Y = a + b \log X$.

*** Função $\log Y = a + b \log X$.

Um outro método de estimação, mais elaborado que os métodos tradicionais, e que permite também trajetórias flexíveis para as elasticidades, é o da transformação de variáveis, proposto por Box e Cox (1964). A técnica consiste, por assim dizer, uma vez selecionadas as variáveis do modelo, no fato de que os dados observados se encarregarão de determinar qual a melhor forma funcional a ser ajustada. Em linhas gerais, é o seguinte o método de estimação: seja o modelo representado por:

$$\frac{Y^\lambda - 1}{\lambda} = a + b \frac{(X^\lambda - 1)}{\lambda} + u \quad (20)$$

onde λ é o parâmetro de transformação das variáveis e u a distúrbância da regressão. Se u tem distribuição normal, então pode ser demonstrado [*e.g.*, Kmenta (1971)] que a função de máxima verossimilhança será, à parte uma constante, dada por:

$$L(\lambda) = -\frac{n}{2} \text{Log } \sigma^2(\lambda) + (\lambda - 1) \sum_{i=1}^n \text{Log } Y_i \quad (21)$$

onde n é o número de observações usadas na estimação e $\sigma^2(\lambda)$ representa a variância da distúrbância da regressão em (20). A estimação dos parâmetros λ , a e b consiste, então, na escolha da sua combinação que maximize a função $L(\lambda)$, o que é normalmente obtido considerando valores sucessivos de λ em (20) e estimando então os parâmetros a e b pelo método dos Mínimos Quadrados, permitindo a obtenção de $\sigma^2(\lambda)$. A substituição deste último valor em (21) (combinado com o último termo daquela expressão), que produz o valor máximo da função, indicará quais os estimadores de máxima verossimilhança para λ , a e b . É fácil demonstrar, ainda, que a elasticidade de Y com relação a X será dada por:

$$\xi = b \left(\frac{Y}{X} \right)^{-\lambda} \quad (22)$$

Como observações finais sobre a técnica Box-Cox, ressalte-se que, se $\lambda = 1$, temos, obviamente, a função linear, podendo ainda ser demonstrado [cf. Kmenta (1971)] que, para $\lambda = 0$, tem-se a função duplo-logarítmica. Naturalmente, se adotarmos λ_s distintos para os

dois lados da equação em (20), teremos então uma flexibilidade maior na determinação da forma funcional.¹⁸ Nessas circunstâncias, aliás, verifica-se que todas as cinco formas tradicionais para a curva de Engel apresentadas acima representam simplesmente casos especiais da transformação Box-Cox. Há, entretanto, um preço a ser pago por essa flexibilidade adicional: um esforço computacional bem maior; por exemplo, se as combinações dos λ_s forem consideradas no intervalo -2 a $+2$ com espaçamentos decimais, haverá que se estimar 1.600 regressões.

Os resultados das transformações Box-Cox do tipo dado em (20) que foram aplicadas aos dados deste estudo são resumidos na Tabela 4.¹⁹ Note-se que também aqui são bons os ajustamentos obtidos, como dados pelos R^2 , valores de t e Durbin-Watson.²⁰

Comparando agora os resultados das Tabelas 2, 3 e 4, cabem as seguintes observações: primeiramente, com respeito aos produtos de alimentação, temos que há razoável semelhança de resultados pelos três métodos para os itens alimentação total (excluindo a primeira classe de dispêndio), tubérculos (excluída a última classe), alimentação fora de casa (excluída a primeira classe) e açúcar. Há ainda, em geral, grande proximidade de valores nas estimativas obtidas pelos métodos tradicionais e o de Kakwani em quase todos os itens de alimentação; as diferenças maiores, neste particular, ocorrem ge-

¹⁸ Tal procedimento foi, aliás, aqui adotado para um dos itens do dispêndio. Apesar de a estimação ter revelado um ligeiro aumento no valor da função da máxima verossimilhança, houve pouca mudança nos valores das elasticidades obtidas, quando os λ_s variaram livremente nos dois lados da regressão.

¹⁹ Seria natural indagar se aqui também, assim como efetuado no caso das estimações tradicionais das curvas de Engel, não deveríamos ponderar as observações (a fim de corrigir a heterocedasticidade) antes de procedermos à estimação das elasticidades pelo método Box-Cox. Tal procedimento, entretanto, não deverá, de acordo com a experiência de Medeiros (1978) com dados de natureza semelhante mas relativos à cidade de São Paulo, alterar significativamente o valor de λ estimado. Note-se, porém, que mesmo assim as elasticidades poderiam ser afetadas, já que estas dependem também da inclinação b .

²⁰ A estimação foi realizada utilizando um programa computacional desenvolvido por Huang e Moon (1978), que permite λ_s distintos para os dois lados da regressão, admitindo o uso de até 10 variáveis explicativas.

TABELA 4

Elasticidades de Engel para dispêndios familiares na cidade do Rio de Janeiro através da transformação

$$\text{Box-Cox do tipo } \frac{Y^\lambda - I}{\lambda} = a + b \left(\frac{X^\lambda - I}{\lambda} \right) : \text{ dados do IBGE - 1975}$$

Itens	λ	a	b	R ²	DW	Elasticidades no ponto da média das várias classes de dispêndio familiar*									Ponto médio total
						1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1 - Alimentação	-1,3	-1,63 (-35,5)	3,112 (52,3)	0,9971	1,30	0,97	1,05	1,01	0,92	0,83	0,65	0,47	0,29	0,16	0,53
1.1 - Cereais	-2,0	-40,20 (-74,6)	81,393 (75,5)	0,9986	1,37	0,85	0,87	0,60	0,42	0,29	0,14	0,06	0,02	0,00	0,12
1.2 - Tubérculos	-0,8	-34,39 (-15,3)	28,509 (15,3)	0,9691	1,91	0,84	0,99	0,79	0,70	0,64	0,54	0,43	0,30	0,19	0,53
1.3 - Verduras	-0,4	-7,81 (-8,5)	4,106 (10,9)	0,9365	0,99	0,83	0,95	0,93	0,91	0,87	0,82	0,73	0,64	0,51	0,76
1.4 - Frutas	-0,4	-15,92 (-14,6)	7,384 (16,6)	0,9716	0,47	1,02	1,07	1,16	1,25	1,31	1,35	1,23	1,11	0,95	1,19
1.5 - Carne e peixe	-0,1	-1,82 (-2,1)	1,111 (8,1)	0,8903	0,59	0,83	0,86	0,88	0,88	0,88	0,87	0,85	0,81	0,78	0,85
1.6 - Ovos, leite e queijo	-0,9	-24,16 (-53,8)	22,741 (56,3)	0,9975	1,71	0,97	0,89	0,91	0,94	0,87	0,77	0,67	0,55	0,33	0,68
1.7 - Bebidas	-0,6	-8,13 (-16,5)	5,865 (19,8)	0,9800	1,40	0,81	0,68	0,60	0,58	0,56	0,54	0,45	0,31	0,24	0,46
1.8 - Alimentação fora de casa	-0,4	-4,95 (-17,6)	2,978 (26,0)	0,9883	0,88	0,94	0,98	1,02	1,00	1,00	0,93	0,94	0,85	0,78	0,92
1.9 - Açúcar, óleos, etc.	-2,0	-71,67 (-30,3)	144,344 (60,7)	0,9978	2,09	0,96	1,02	0,69	0,45	0,33	0,19	0,08	0,03	0,01	0,15
2 - Vestuário	0,8	-33,95 (-1,8)	0,123 (60,5)	0,9978	1,17	1,68	1,47	1,41	1,18	0,99	0,99	0,97	1,04	1,02	1,05
3 - Habitação	-0,1	-1,26 (-5,4)	1,131 (40,0)	0,9917	0,69	1,03	1,01	1,00	1,01	1,00	1,01	1,01	1,03	1,04	1,02
4 - Saúde	0,2	-4,72 (-23,1)	0,644 (112,7)	0,9904	1,46	1,20	1,19	1,17	1,15	1,14	1,12	1,11	1,10	1,09	1,12
5 - Educação	0,4	-16,90 (-8,5)	0,318 (28,9)	0,9905	1,80	2,30	2,72	2,10	1,70	1,52	1,37	1,24	1,20	1,19	1,34
6 - Recreação	0,3	-8,50 (-3,9)	0,376 (20,3)	0,9809	1,04	2,20	1,60	1,48	1,41	1,31	1,17	1,16	1,16	1,21	1,23
7 - Fumo	-1,2	-50,43 (-24,5)	61,518 (25,0)	0,9873	1,13	0,85	1,10	1,17	1,01	0,78	0,64	0,52	0,22	0,15	0,54
8 - Transporte urbano	-0,7	-10,89 (-12,6)	8,620 (14,2)	0,9618	0,88	0,91	1,01	1,11	1,05	1,02	0,93	0,77	0,53	0,35	0,79
9 - Veículo próprio	0,1	-22,07 (-16,8)	1,707 (23,7)	0,9859	2,03	3,83	3,61	3,16	2,73	2,59	2,40	2,27	2,28	2,31	2,38
10 - Outras despesas	-0,2	-5,87 (-25,3)	2,254 (43,9)	0,9959	1,72	1,23	1,24	1,30	1,32	1,38	1,44	1,52	1,58	1,66	1,50

NOTA: Os dados entre parênteses são os valores de t.
* Estas classes são as mesmas da Tabela 2.

ralmente na primeira classe (*e.g.*, cereais) e às vezes também na última classe (*e.g.*, tubérculos). Existe, entretanto, ligeira diferença entre as estimativas da transformação Box-Cox e os outros dois métodos no caso dos itens verduras e frutas.

Para os demais itens do dispêndio, temos: a) semelhança de resultados pelos três métodos em saúde, habitação (excluída a primeira classe no caso do método de Kakwani) e recreação (excluída a última classe no método de Kakwani); e b) semelhança entre os métodos de Kakwani e tradicionais, mas que diferem um pouco daquele de Box-Cox em transporte urbano, vestuário e educação (se excluídas, neste último, a primeira e última classes, que apresentaram, conforme já revelado, problemas no método de Kakwani).

Observe-se que as diferenças mais acentuadas entre os três métodos ocorrem exatamente nos pontos para os quais já havíamos apontado as dificuldades quando da estimação pelo método de Kakwani. De qualquer maneira, como parece, em geral, ter havido maior semelhança de resultados entre as estimativas das elasticidades pelos métodos de Kakwani e tradicionais, resolvemos comparar o desempenho destes dois métodos sob, ainda, um outro ângulo: a capacidade de suas respectivas curvas de Engel reproduzirem os dados originais de dispêndio.²¹ Seguindo sugestão de Kakwani (1978), consideraremos como critério para melhor desempenho a menor soma ponderada dos resíduos quadráticos²² (a Tabela 5 resume os resultados encontrados). Diferentemente dos resultados obtidos por Kakwani (1978) com dados de orçamentos familiares para a Indonésia, temos aqui que o

²¹ No caso do método de Kakwani, estes valores previstos foram obtidos a partir da expressão em (14). Note-se que os valores de $v_i(x_j)$ — dispêndio médio previsto para a curva de Engel do item i na classe j — ficam determinados uma vez conhecidos π_{ij} — calculado da expressão (19) uma vez conhecido π_j de (8) —, μ_i , que é a média observada da distribuição empírica dos dispêndios com o item i , e a_i , α_i e β_i , que são os parâmetros estimados para a regressão da função em (16).

²² Definido como a soma ponderada (os pesos são as frequências populacionais) das diferenças quadráticas entre os valores observados e os valores estimados nas várias faixas de renda.

TABELA 5

Média ponderada dos resíduos quadráticos dos ajustamentos das curvas de Engel

Itens	Método tradicional	Método de Kakwani
1 — Alimentação	$3,5 \times 10^5$	$4,4 \times 10^5$
1.1 — Cereais	14001	12729
1.2 — Tubérculos	135	155
1.3 — Verduras	1137	1411
1.4 — Frutas	4674	3099
1.5 — Carne e peixe	29831	41363
1.6 — Ovos, leite e queijo	13910	1339
1.7 — Bebidas	4216	3729
1.8 — Alimentação fora de casa	116012	36936
1.9 — Açúcar, óleos, etc.	5081	5736
2 — Vestuário	$8,4 \times 10^5$	$3,6 \times 10^5$
3 — Habitação	$6,2 \times 10^6$	$6,4 \times 10^6$
4 — Saúde	$5,0 \times 10^4$	$6,2 \times 10^4$
5 — Educação	180×10^4	$9,5 \times 10^4$
6 — Recreação	$41,0 \times 10^4$	$3,2 \times 10^4$
7 — Fumo	$5,5 \times 10^3$	$5,4 \times 10^3$
8 — Veículo próprio	$35,0 \times 10^5$	$4,4 \times 10^5$
9 — Transporte urbano	$19,0 \times 10^3$	$6,3 \times 10^3$
10 — Outras despesas	$4,2 \times 10^5$	$10,9 \times 10^5$

método de estimação por ele proposto não é, por esse critério, unanimemente melhor que o método tradicional (a sua superioridade ocorre em 11 dos 19 casos).²³ De qualquer modo, devemos encarar tal critério com certa reserva, pois fora observado, neste estudo, que em

²³ Observe-se, porém, que as elasticidades de Kakwani têm aqui apenas um caráter aproximativo, em vista da discussão na nota de rodapé n.º 12.

alguns casos a inferioridade de um método fica simplesmente determinada pela presença de um ou dois valores residuais mais elevados, mesmo que seu desempenho seja melhor nas demais posições. Por esta razão, nem tentamos comparar tais resíduos ponderados com aqueles que seriam obtidos do ajustamento Box-Cox

5 — Considerações finais

Do exposto, parece que o método de Kakwani representa, pelo menos, uma útil adição às técnicas de estimação para as elasticidades de Engel. Computacionalmente, o seu custo de estimação não deve ser maior que no caso dos dois outros métodos aqui considerados. Note-se que, no método tradicional, há freqüentemente que se selecionar entre as várias formas funcionais estimadas e, no método Box-Cox, que busca exatamente essa melhor forma funcional, exige-se geralmente a realização de um elevado número de estimações antes de chegar-se aos estimadores de máxima verossimilhança. De qualquer maneira, há um aspecto da nova metodologia que se constitui numa vantagem inegável: a possibilidade de determinar-se um índice geral da elasticidade-dispêndio de um bem sem que seja especificada qualquer forma funcional para a sua curva de Engel. Constitui-se, ainda, numa vantagem da nova metodologia sobre os métodos tradicionais o fato de permitir trajetórias diversas e não-monotônicas para as elasticidades (note-se, porém, que trajetórias flexíveis também podem ocorrer no método Box-Cox).

Apesar dessas considerações, a análise aqui não foi aprofundada o suficiente para permitir qualquer conclusão definitiva sobre a superioridade do método de Kakwani no cálculo das elasticidades. Esta questão fica a merecer maior investigação. Sugerimos que os esforços concentrem-se na comparação entre o método de Kakwani e o da transformação Box-Cox na sua versão mais flexível. De qualquer modo, parece haver ainda a possibilidade de se aumentar a precisão da estimação das elasticidades pelo próprio método de Kakwani. Nesse sentido, Blaylock e Smallwood (1982) mostram, em

estudo com dados de orçamentos familiares americanos, que, se a própria forma funcional da curva de Lorenz (e da curva de concentração), no contexto das novas coordenadas π e n (discutidas acima), for determinada pela transformação Box-Cox,²⁴ então teremos as elasticidades de Kakwani mais precisamente estimadas. Note-se, entretanto, que essa maior precisão só será obtida às custas de um esforço computacional bem maior. Cumpre, portanto, saber se valerá a pena este ganho de precisão quando comparado com o esforço computacional adicional exigido, mas esta questão só poderá ser, naturalmente, respondida com uma investigação bem mais profunda que a pretendida para esta pesquisa.

Bibliografia

BLAYLOCK, J. R., e SMALLWOOD, D. M. Engel analysis with Lorenz and concentration curves. *American Journal of Agricultural Economics*, 64 (1):134-9, fev. 1982.

BOX, G. E., e COX, D. R. An analysis of transformation. *Journal of the Royal Statistical Society*, B, 26 (2):211-52, abr. 1964.

²⁴ Isto é, teríamos a forma:

$$\frac{n^\lambda - 1}{\lambda} = a + b \frac{(\pi^v - 1)}{v} + c \frac{[(\sqrt{z} - \pi)^\delta - 1]}{\delta}$$

que, para $\lambda = v = \delta = \theta$, reduz-se na forma logarítmica da função proposta por Kakwani e Podder (1976). Nestas circunstâncias, o teste apropriado para a comparação entre os ajustamentos estatísticos dessas duas formas Box-Cox (isto é, restrita versus irrestrita) seria dado por menos duas vezes o logaritmo da razão da verossimilhança (onde esta razão é definida como a função da verossimilhança restrita dividida pela função da verossimilhança irrestrita), que é assintoticamente distribuída como uma variável aleatória qui-quadrada. Para detalhes sobre este teste, cf. Blaylock e Smallwood (1982) ou Maddala (1977). É interessante ainda notar que a possibilidade do uso de outras formas funcionais para a curva de Lorenz, no contexto do sistema das coordenadas π e n , já havia sido levantada por Kakwani e Podder (1976), que sugerem o uso da função tipo CES (elasticidade de substituição constante).

- CRAMER, J. S. Efficient grouping, regression and correlation in Engel curve analysis. *American Statistical Association Journal*, 59 (305):233-50, mar. 1964.
- . *Empirical econometrics*. Amsterdam, North-Holland Publishing Co., 1971.
- FENDT JR., R. *Uma análise econométrica de sistemas alternativos de curvas de Engel*. Mimeo. IPEA, 1970.
- HAWKINS, D. M. A note on fitting a regression without an intercept term. *The American Statistician*, 34 (4):233, nov. 1980.
- HUANG, C., e MOON, L. C. *A Box-Cox procedure estimation routine user guide*. University of Georgia, Department of Agricultural Economics, 1978.
- KAKWANI, N. C. Application of Lorenz curves in economic analysis. *Econometrica*, 45 (3):719-27, abr. 1977a.
- . On the estimation of Engel elasticities from grouped observation with application to Indonesian data. *Journal of Econometrics*, 6:1-19, 1977b.
- . A new method of estimating Engel elasticities. *Journal of Econometrics*, 8:103-10, 1978.
- . *Income inequality and poverty*. A World Bank Publication, 1980a.
- . Functional forms for estimating the Lorenz curve: a reply. *Econometrica*, 48 (4):1.063-4, maio 1980b.
- KAKWANI, N. C., e PODDER, N. Efficient estimation of the Lorenz curve and associated inequality measures from grouped observations. *Econometrica*, 44 (1):137-48, jan. 1976.
- KMENTA, J. *Elements of econometrics*. MacMillan Co., 1971.
- MADDALA, G. S. *Econometrics*. McGraw-Hill, 1977.

MAHALANOBIS, P. C. A method of fractile graphical analysis. *Econometrica*, 28:325-51, 1960.

MEDEIROS, J. A. S. Curvas de Engel e transformação de Box-Cox: uma aplicação aos dispêndios em alimentação e educação na cidade de São Paulo. *Pesquisa e Planejamento Econômico*, Rio de Janeiro, 8 (3) :795-828, dez. 1978.

NICHOLSON, J. L. Variations in working-class family expenditure. *Journal of the Royal Statistical Society, A*, 112:359, 1949.

RAO, P., e MILLER, R. L. *Applied econometrics*. Wadsworth Publishing Co., 1971.

ROSSI, J. W. *Índices de desigualdade de renda e medidas de concentração industrial: aplicações a casos brasileiros*. Rio de Janeiro, Zahar, 1982 (no prelo).

(Originais recebidos em janeiro de 1982. Revistos em junho de 1982.)