

A aplicabilidade do critério da taxa interna de retorno

CLÓVIS DE FARO *

LUIZ SOARES **

1 — Introdução

Seja o projeto de investimento caracterizado pela seguinte seqüência finita de números reais (chamados de fluxos de caixa líquidos):

$$\{-S, Q_1, \dots, Q_n\} \quad (1)$$

com $S > 0$, $Q_n \neq 0$, e ao menos um $Q_j > 0$, $j = 1, \dots, n$.

Sendo $i \geq 0$ uma certa taxa de juros periódica, a função valor atual associada ao projeto em pauta é definida pela relação:

$$V(i) = -S + \sum_{j=1}^n Q_j (1+i)^{-j} \quad (2)$$

Por outro lado, tomando-se i como incógnita em (2), a taxa interna de retorno do projeto em apreço é definida como a solução da equação:

$$-S + \sum_{j=1}^n Q_j (1+i)^{-j} = 0 \quad (3)$$

* Do Instituto de Pesquisas do IPEA.

** Da EMBRAMEC e do Banco Nacional do Desenvolvimento Econômico.

Ou seja, a taxa interna de retorno, que designaremos por i^* , é a taxa de juros que anula a função valor atual, isto é, devemos ter $V(i^*) = 0$.

Uma vez fornecido, exogenamente, o valor de certa taxa tomada para comparação, seja ela r , o chamado critério da taxa interna de retorno prescreve que o projeto seja considerado como economicamente interessante se $i^* > r$. Ora, decorre então que, para que a aplicação dessa regra faça sentido, não só é necessário que exista uma solução de (3) no intervalo considerado, como que tal solução seja única. Ainda mais, para que o resultado da avaliação econômica assim obtido seja consistente com o derivado via aplicação do denominado método do valor atual, é necessário que se tenha, no caso de aceitação, $V(r) > 0$.

Para os casos em que a seqüência de fluxos de caixa apresente uma ou duas variações de sinal, pode-se garantir *a priori* que,¹ desde que $V(0) > 0$ (isto é, desde que a soma algébrica dos fluxos de caixa seja positiva), existirá exatamente uma taxa interna $i^* > 0$. Além do mais, para tais casos, a implementação do critério da taxa interna de retorno produzirá uma avaliação consistente com a derivada do método do valor atual.

No caso em que a seqüência de fluxos de caixa apresentar mais de duas variações de sinal, mesmo que $V(0) > 0$ (o que é condição necessária para a aplicabilidade do critério da taxa interna de retorno, mas não para a economicidade do projeto),² não se pode garantir *a priori* a simultânea existência e unicidade de uma taxa interna $i^* > 0$. Para esses casos, torna-se necessário que sejam verificadas certas condições de suficiência, como as respectivamente

¹ Para o caso de uma variação, veja-se, por exemplo, Clóvis de Faro, *Crítérios Quantitativos para Avaliação e Seleção de Projetos de Investimentos*, Série Monográfica (Rio de Janeiro: IPEA/INPES, 1971), n.º 2, pp. 61-74, c, para o caso de duas, o trabalho de William Jean, "On Multiple Rates of Return, in *The Journal of Finance*, vol. 23, n.º 1 (março de 1968), pp. 187-191.

² Clóvis de Faro e Alberto de Mello e Souza, "O Uso do Critério da Taxa Interna de Retorno e sua Aplicação em Investimentos Educacionais", in *Estudos Econômicos*, vol. 5, n.º 3 (setembro/dezembro de 1975), pp. 37-64.

devidas a Soper³ e a Norstrom,⁴ ou a que se fundamenta em propriedades das chamadas funções de Sturm.⁵

Fixando atenção nesse último caso, o propósito do presente trabalho pode ser dividido em quatro partes. Inicialmente, serão derivadas duas novas condições de suficiência, as quais são baseadas em propriedades associadas com os valores máximo e mínimo da seqüência de fluxos de caixa. A seguir, será efetuada uma integração dos resultados obtidos com uma extensão do trabalho recentemente desenvolvido por Hammond.⁶ Na terceira parte, será realizado um estudo comparativo entre as diversas condições de suficiência, procurando identificar quais as dominantes. Finalmente, será apresentado um algoritmo conceitual para a implementação do critério da taxa interna de retorno, algoritmo esse que deve ser tomado como uma extensão e atualização do sugerido em recente artigo de Clóvis de Faro.⁷

³ C. S. Soper, "The Marginal Efficiency of Capital: A Further Note", in *The Economic Journal*, vol. 69, n.º 273 (março de 1959), pp. 174-177, e Clóvis de Faro, "A Eficiência Marginal do Capital e as Condições de Soper: Uma Análise Crítica", in *Revista Brasileira de Economia*, vol. 29, n.º 3 (julho/setembro de 1975), pp. 89-107.

⁴ Carl J. Norstrom, "A Sufficient Condition for a Unique Non-negative Internal Rate of Return", in *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 7, n.º 3 (junho de 1972), pp. 1.835-1.839, e Clóvis de Faro, "A Sufficient Condition for a Unique Non-negative Internal Rate of Return: A Comment", in *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 8, n.º 4 (setembro de 1973), pp. 683-684.

⁵ Seymour Kaplan, "A Note on a Method for Precisely Determining the Uniqueness or Nonuniqueness of the Internal Rate of Return for a Proposed Investment", in *The Journal of Industrial Engineering*, vol. 16, n.º 1 (janeiro/fevereiro de 1965), pp. 70-71, Richard H. Bernhard, "On the Inconsistency of the Soper and Sturm-Kaplan Conditions for Uniqueness of the Internal Rate of Return", in *The Journal of Industrial Engineering*, vol. 18, n.º 8 (agosto de 1967), pp. 498-500, e Clóvis de Faro, "On the Internal Rate of Return Criterion", in *The Engineering Economist*, vol. 19, n.º 3 (1974), pp. 165-194.

⁶ John S. Hammond III, *Bounding the Numbers of Rates of Return of a Project*, Working Paper HBS-74-11 (Harvard University, Graduate School of Business Administration, abril de 1974), trabalho apresentado no Joint National Meeting of TIMS and ORSA (Boston, Mass., 22-24 de abril de 1974).

⁷ Clóvis de Faro, "On the Internal...", *op. cit.*

2 — Propriedades baseadas nos valores máximo e mínimo ⁸

Dado o projeto de investimento caracterizado pela seqüência (1), defina-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{M} = \max_{1 \leq j \leq n} \{Q_j\} \\ M = \max_{1 \leq j \leq n-1} \{Q_j\} \\ m = - \min_{2 \leq j \leq n} \{Q_j\} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (4. a) \\ (4. b) \\ (4. c) \end{array}$$

Teorema A

Se $n\bar{M} \leq S$, então $V(i) < 0, i > 0$.

Demonstração.

Substituindo-se, em (2), cada um dos Q_j por \bar{M} , obtém-se:

$$\bar{V}(i) = -S + \bar{M} \sum_{j=1}^n (1+i)^{-j} \quad (5)$$

Por construção, dado que $\bar{M} \geq Q_j$ para todo j , segue-se que teremos $\bar{V}(i) \geq V(i), i > 0$. Logo, se $\bar{V}(0) = -S + n\bar{M} \leq 0$, ter-se-á que $V(0) \leq 0$.

Por outro lado, $0 < (1+i)^{-j} \leq 1, i \geq 0$ e $j = 1, 2, \dots, n$, do que decorre que $\bar{V}(i) < \bar{V}(0), i > 0$. Conseqüentemente, se $n\bar{M} \leq S$, teremos $V(i) < 0, i > 0$.

⁸ Algumas das propriedades aqui apresentadas aparecem, sob formas mais fracas e sem comprovação de suas respectivas validades, em um trabalho não publicado de A. Pistoia, *About Internal Rate of Return* (1974).

Corolário A

Projetos de investimento tais que $n\bar{M} \leq S$ serão considerados, *a priori*, como economicamente inaceitáveis para qualquer taxa $r > 0$.⁹

Teorema B

Se $n\bar{M} > S$, então $V(i) < 0$ ao menos para $i \geq \bar{M}/S$.

Demonstração.

Usando-se (5), temos que:

$$\bar{V}(i) = -S + \bar{M} \sum_{j=1}^n (1+i)^{-j} = \bar{M} a_{\bar{n}|i} - S \geq V(i), \quad i \geq 0$$

onde

$$a_{\bar{n}|i} = [(1+i)^n - 1] / [i(1+i)^n]$$

Logo,

$$\bar{V}(i) = -S + \bar{M} a_{\bar{n}|i} < 0 \implies V(i) < 0$$

ou

$$\frac{1}{a_{\bar{n}|i}} > \frac{\bar{M}}{S} \implies V(i) < 0$$

Por outro lado, sabemos que $a_{\bar{n}|i}$ é estritamente crescente com n , para $i \geq 0$, sendo que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{\bar{n}|i} = 1/i$. Logo, $a_{\bar{n}|i} < 1/i$, ou $1/a_{\bar{n}|i} > i$, para n finito e $i \geq 0$.

Suponha-se agora que $i \geq \bar{M}/S$. Então,

$$\frac{1}{a_{\bar{n}|i}} > i \geq \frac{\bar{M}}{S} \implies V(i) < 0.$$

⁹ Observe-se que $\bar{V}(0) \leq 0 \implies V(0) \leq 0$. Mas a recíproca não é verdadeira.

Corolário B

Se $r \geq \bar{M}/S$, o projeto será, *a priori*, economicamente injustificável.

2.1 — Primeira condição de suficiência¹⁰

Define-se a função valor futuro através da relação:

$$P(i) = (1+i)^n V(i), \quad i \geq 0 \quad (6)$$

É então óbvio que, alternativamente, a taxa interna de retorno associada a um projeto de investimento pode ser interpretada como a taxa que anula a função valor futuro.

Teorema C

Se a soma algébrica dos fluxos de caixa for positiva, e se $M(n-1) \leq 2S$, então o projeto considerado apresentará uma e somente uma taxa interna $i^* > 0$.

Demonstração.

Inicialmente, observe-se que:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} P(i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \left\{ -S(1+i)^n + \sum_{j=1}^n Q_j (1+i)^{n-j} \right\} = -\infty$$

¹⁰ A demonstração que se segue é exatamente igual à anteriormente apresentada em Clóvis de Faro, "Sobre a Unicidade de Taxas Internas de Retorno Positivas", in *Revista Brasileira de Economia*, vol. 19, n.º 4 (outubro/dezembro de 1975), pp. 57-66. Observe-se, porém, que a condição que aqui aparece é mais potente. Deve-se ainda observar que, como apontado em correspondência particular com o Prof. James J. Buckley, da Universidade do Alabama, em Birmingham, é suficiente que se tenha $nS \geq \sum_{i \in N_0} (n-j) Q_i$, onde $N_0 = \{1 \leq j \leq n-1 | Q_j > 0\}$, para que o teorema C, e seu corolário, sejam verificados.

Logo, se $V(0) = P(0) > 0$, segue-se que, da continuidade da função $P(i)$, que é um polinômio em i , existirá ao menos uma taxa positiva que anula a função valor futuro.

A unicidade da taxa interna decorre do fato de que, se $M(n-1) \leq 2S$, a função valor futuro é estritamente decrescente com a taxa i , pois que:

$$\frac{dP(i)}{di} = (1+i)^{n-1} \left[-nS + \sum_{j=1}^n (n-j) Q_j (1+i)^{-j} \right]$$

Ou seja, a função valor futuro será decrescente se a parte entre colchetes da expressão acima for negativa. Porém, observe-se que, tendo em vista (4.b) e que a última parcela do somatório considerado é nula:¹¹

$$\begin{aligned} & -nS + \sum_{j=1}^n (n-j) Q_j (1+i)^{-j} < \\ & < -nS + M \sum_{j=1}^{n-1} (n-j) (1+i)^{-j} = K(i) \end{aligned}$$

Por sua vez, o segundo membro da desigualdade acima é decrescente com a taxa i , do que decorre que seu máximo valor (no intervalo considerado) é:

$$K(0) = n[-S + M(n-1)/2] \leq 0 \quad \text{se} \quad M(n-1) \leq 2S$$

Corolário C

Se $P(0) > 0$ e $M(n-1) \leq 2S$, a função valor futuro é estritamente côncava para $i \geq 0$.

A importância desse corolário, cuja demonstração aparece no Apêndice, decorre de que fica garantida a aplicação do chamado método de Newton-Raphson para a determinação de i^* .

¹¹ A desigualdade é estrita porque, havendo mais de duas variações de sinal na seqüência de fluxos de caixa, ao menos um dos $(n-1)$ primeiros Q_j tem que ser negativo.

2.2 — Segunda condição de suficiência

Fazendo-se $x = (1 + i)^{-t}$, e tendo em vista (2), a função valor atual é equivalente a:

$$F(x) = -S + \sum_{j=1}^n Q_j x^j, \quad x \in [0, 1] \quad (7)$$

Conseqüentemente, a taxa interna de retorno associada a um projeto de investimento pode ser ainda definida como a taxa $i^* = (1 - x^*)/x^*$, onde x^* é tal que $F(x^*) = 0$.

Teorema D

Se a soma algébrica dos fluxos de caixa for positiva, e se $mn(n-1) \leq 2S$, então o projeto considerado apresentará uma e somente uma taxa interna $i^* > 0$.

Demonstração.

Dado que $F(0) = -S < 0$ e que $F(1) = -S + \sum_{j=1}^n Q_j > 0$, segue-se, da continuidade de (7), que existirá ao menos um valor de x no intervalo considerado tal que $F(x) = 0$.

Buscando uma contradição,¹² suponha-se agora a existência de mais de uma raiz. Seja, então, $x_k \in (0, 1)$ e tal que $F(x_k) = 0$, $k = 1, 2, \dots$. Se $F'(x_k) > 0$ para todo k , então, em particular, $F'(x_1) > 0 \Rightarrow F(x) > 0$ para $x \in (x_1, x_2) \Rightarrow F'(x_2) \leq 0$, o que nos dará a desejada contradição.

Visto que $F(x_k) = 0$ e $x_k > 0$, segue-se de (7) que:

$$S = \sum_{j=1}^n Q_j x_k^j$$

¹² Observe-se que a demonstração é análoga à desenvolvida no trabalho de Norstrom, *op. cit.*

ou

$$S/x_k - \sum_{j=1}^n Q_j x_k^{j-1} = 0 \quad (8)$$

Por outro lado, derivando-se (7) no ponto x_k , tem-se:

$$F'(x_k) > 0 \text{ se } \sum_{j=1}^n jQ_j x_k^{j-1} > 0$$

ou, face a (8)

$$F'(x_k) > 0 \text{ se } S/x_k + \sum_{j=1}^n (j-1) Q_j x_k^{j-1} > 0$$

ou, observando-se que a primeira parcela do somatório é nula

$$F'(x_k) > 0 \text{ se } S + \sum_{j=2}^n (j-1) Q_j x_k^j = H(x_k) > 0$$

Face a (4.c), e lembrando que $x_k \in (0, 1)$, podemos escrever:

$$\begin{aligned} S - \sum_{j=2}^n (j-1) m &\geq 0 \implies S - \sum_{j=2}^n (j-1) mx_k^j > 0 \\ \implies S + \sum_{j=2}^n (j-1) Q_j x_k^j &= H(x_k) > 0 \end{aligned}$$

Ora, se

$$S - \sum_{j=2}^n (j-1) m \geq 0 \implies mn(n-1) \leq 2S$$

o que completa a demonstração.

Corolário D

Nas condições do teorema D, a função valor atual é estritamente decrescente para $i \in [0, i^*]$.

Demonstração.

Dado que $F(x) > 0$ para $x \in (x^*, 1)$, podemos escrever:

$$-S + \sum_{j=1}^n Q_j x^j > 0 \Rightarrow G(x) = S/x - \sum_{j=1}^n Q_j x^{j-1} \leq 0, x \in [x^*, 1]$$

Logo, se no intervalo considerado tivermos $F'(x) + G(x) > 0$, podemos afirmar que a função $F(x)$ será estritamente crescente. Ora:

$$F'(x) + G(x) > 0 \text{ se } \sum_{j=1}^n jQ_j x^{j-1} + S/x - \sum_{j=1}^n Q_j x^{j-1} > 0$$

ou

$$F'(x) + G(x) > 0 \text{ se } S + \sum_{j=2}^n (j-1) Q_j x^j > 0$$

condição que é garantida se $mn(n-1) \leq 2S$.

Por outro lado, lembrando-nos que $x = (1+i)^{-1}$, temos que:

$$F'(x) = \sum_{j=1}^n jQ_j x^{j-1} > 0, x \in [x^*, 1]$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^n jQ_j (1+i)^{-j+1} > 0, i \in [0, i^*]$$

$$\Rightarrow (1+i)^2 \sum_{j=1}^n jQ_j (1+i)^{-j-1} > 0, i \in [0, i^*]$$

$$\Rightarrow - \sum_{j=1}^n jQ_j (1+i)^{-j-1} = V'(i) < 0, i \in [0, i^*]$$

3 — Integração com o trabalho de Hammond

Dada a seqüência de fluxos de caixa líquidos associados a um projeto de investimento, $\{-S, Q_1, \dots, Q_n\}$, chama-se de l -ésima cumulação, para $l = 1, 2, \dots$, à seqüência infinita $\{A_k^{(l)}\}$ definida de tal modo que:¹³

$$A_k^{(l)} = \begin{cases} -S, & k = 0 \\ -S + \sum_{j=1}^k Q_j, & k = 1, \dots, n \\ -S + \sum_{j=1}^n Q_j, & k = n+1, n+2, \dots \end{cases} \quad (9)$$

e, para $l \geq 2$

$$A_k^{(l)} = \begin{cases} -S, & k = 0 \\ A_{k-1}^{(l)} + A_k^{(l-1)}, & k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (10)$$

Fazendo uso de propriedades de funções ditas do “tipo Polya”, Hammond¹⁴ demonstrou que o número de taxas internas de retorno positivas associadas ao projeto considerado não excede o número de variações de sinal em $\{A_k^{(l)}\}$.

Infelizmente, embora este seja um resultado extremamente valioso, a sua implementação prática nem sempre é livre de percalços. Isto porque, além do fato de que raízes múltiplas da equação (3) sejam contadas tantas vezes quanto os seus respectivos graus de multipli-

¹³ Observe-se que, para $0 \leq k \leq n$, a primeira cumulação é idêntica à chamada seqüência de fluxos de caixa cumulativos de Norstrom, *op. cit.*, e que, para $k > n$, é constante e igual à soma algébrica dos fluxos de caixa líquidos.

¹⁴ John S. Hammond III, *op. cit.*

cidade,¹⁵ não só teremos que lidar com seqüências infinitas como ainda poderá ser necessário que se proceda a um número excessivamente grande de cumulações para que se chegue a uma conclusão definitiva. Um exemplo, propositadamente modesto,¹⁶ desta última possibilidade é encontrado na análise do projeto de investimento que chamaremos de B : $\{-1, 4, -5, 3, -7, 5, 21\}$. Procedendo-se às cumulações que serão truncadas a partir do ponto em que se garanta que, para a última delas, os termos subseqüentes sejam todos positivos, teremos que:

$$A_k^{(1)}: \{-1, 3, -2, 1, -6, -1, 20, 20, 20, \dots\}$$

$$A_k^{(2)}: \{-1, 2, 0, 1, -5, -6, 14, 34, 54, \dots\}$$

$$A_k^{(3)}: \{-1, 1, 1, 2, -3, -9, 5, 39, 93, \dots\}$$

$$A_k^{(4)}: \{-1, 0, 1, 3, 0, -9, -4, 35, 128, \dots\}$$

$$A_k^{(5)}: \{-1, -1, 0, 3, 3, -6, -10, 25, 153, \dots\}$$

$$A_k^{(6)}: \{-1, -2, -2, 1, 4, -2, -12, 13, 166, \dots\}$$

$$A_k^{(7)}: \{-1, -3, -5, -4, 0, -2, -14, -1, 165, \dots\}$$

Observando-se que $A_k^{(7)} > 0$ para $k \geq 8$, vemos que a sétima cumulação apresenta uma única variação de sinal. Conseqüentemente, visto que a soma de seus fluxos de caixa líquidos é positiva, conclui-se que ao projeto B se associa exatamente uma taxa interna de retorno positiva (que é $i_B^* \simeq 132,84\%$).

¹⁵ Tal fato é observável no caso do projeto que designaremos por A , cuja seqüência de fluxos de caixa líquidos é $A: \{-1, 6, -12, 8\}$. O leitor poderá verificar que, embora o projeto apresente somente uma taxa interna positiva ($i_A^* = 100\%$), o número de variações de sinal em qualquer cumulação é sempre igual a 3.

¹⁶ Um exemplo mais dramático é o caso do projeto $C: \{-1, 5, -7, 3, -10, 6, 24\}$, com $i_C^* = 126,25\%$ e para o qual serão necessárias 17 cumulações.

3.1 — Propriedades da segunda cumulação

Fixando-se a atenção no exame de certas características da segunda cumulação, é possível a determinação de interessantes conclusões a partir do exame de uma seqüência finita. Para tanto, notemos inicialmente que, tendo em vista a definição, é fácil verificar que:

$$A_k^{(2)} = \begin{cases} -S, & k = 0 \\ -(k+1)S + \sum_{j=1}^k (k+1-j)Q_j, & k=1, 2, \dots, n-1 \\ A_{n-1}^{(2)} + (k-n+1)A_n^{(1)}, & k=n, n+1, \dots \end{cases} \quad (11)$$

É então de conclusão imediata que, se o projeto de investimento considerado for tal que a soma de seus fluxos de caixa líquidos seja positiva, isto é, $A_n^{(1)} > 0$, a subsequência infinita $\{A_{n-1}^{(2)}, A_n^{(2)}, A_{n+1}^{(2)}, \dots\}$ será estritamente crescente. Por conseguinte, se na subsequência finita $\xi: \{-S, A_1^{(2)}, A_2^{(2)}, \dots, A_{n-1}^{(2)}\}$ tivermos ou exatamente uma variação de sinal, ou nenhuma variação de sinal, a segunda cumulação apresentará exatamente uma variação de sinal. Conseqüentemente, como sumariado no teorema *E* abaixo enunciado, a análise de uma seqüência finita (a subsequência ξ) poderá permitir concluir-se que ao projeto considerado se associa uma única taxa interna de retorno positiva.

Teorema E

Se a soma algébrica dos fluxos de caixa líquidos for positiva, e se a seqüência ξ apresentar não mais do que uma variação de sinal, então ao projeto considerado associar-se-á uma e somente uma taxa interna $i^* > 0$.

A relevância do teorema *E* é evidenciada através da análise dos dois seguintes projetos: *D*: $\{-10, 25, -20, 30\}$ e *E*: $\{-30, 35, -10,$

35, -10}. Para esses dois projetos temos, respectivamente, uma e nenhuma variação de sinal na subsequência ξ , pois que:

a) *Projeto D*

$$A_t^{(k)} : \{-10, 15, -5, 25, 25, 25, \dots\}$$

$$\xi : \{-10, 5, 0\}$$

b) *Projeto E*

$$A_t^{(k)} : \{-30, 5, -5, 30, 20, 20, 20, \dots\}$$

$$\xi : \{-30, -25, -30, 0\}$$

Logo, podemos garantir que os projetos *D* e *E* apresentam, cada um, uma única taxa interna de retorno positiva ($i_D^* \simeq 120,94\%$ e $i_E^* \simeq 40,16\%$).

Corolário E.1 – (derivação alternativa do teorema C).

Se $2S \geq M$ ($n - 1$), então a subsequência ξ não apresentará variação de sinal.

Demonstração.

Tendo em vista a relação de definição (4.b) e substituindo-se cada um dos Q_j por M na segunda cumulação, tem-se que:

$$A_k^{(2)}]_M = -(k+1)S + \sum_{j=1}^k (k+1-j)M > A_k^{(2)}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1$$

Ora,

$$A_k^{(2)}]_M = \frac{k+1}{2} (-2S + Mk), \quad k = 1, 2, \dots, n-1$$

donde

$$A_{n-1}^{(2)}]_M > A_k^{(2)}]_M, \quad k = 1, 2, \dots, n-2$$

Por conseguinte, se $-2S + M(n-1) \leq 0$, teremos $A_{n-1}^{(2)} \Big|_M \leq 0$, do que decorre que a subsequência ξ não apresentará variação de sinal.

Corolário E.2 – (derivação alternativa do teorema D).

Se $2S \geq mn(n-1)$, a subsequência ξ não apresentará mais do que uma variação de sinal.

Demonstração.

Inicialmente observe-se que, sendo $\Delta A_k^{(2)} = A_{k+1}^{(2)} - A_k^{(2)}$, se para qualquer índice k , para $1 \leq k \leq n-1$, $A_k^{(2)} \geq 0$ implicar $\Delta A_k^{(2)} \geq 0$, então a subsequência ξ não poderá ter mais do que uma variação de sinal.

Queremos então mostrar que, se para qualquer índice k no intervalo considerado tivermos:

$$A_k^{(2)} = -(k+1)S + \sum_{j=1}^k (k+1-j)Q_j \geq 0 \quad (12)$$

então

$$\Delta A_k^{(2)} = -S + \sum_{j=1}^{k+1} Q_j \geq 0$$

Em primeiro lugar, devemos notar que se $A_k^{(2)} > 0$ podemos decrescer um dos Q_j positivos, mantendo os demais constantes, até que $A_k^{(2)} = 0$. Ora, isso fará com que o valor de $\Delta A_k^{(2)}$ diminua. Conseqüentemente, a situação mais desfavorável para $\Delta A_k^{(2)} \geq 0$ corresponderá ao caso em que $A_k^{(2)} = 0$.

Por outro lado, dada a igualdade em (12), se um dos Q_j , $1 < j \leq k$, for decrescido de $\varepsilon > 0$, essa igualdade será mantida se, por exemplo, Q_{j-1} for aumentado de

$$\frac{k+1-j}{k+2-j} \varepsilon$$

pois

$$-(k+1-j)\varepsilon + [k+1-(j-1)] \frac{k+1-j}{k+2-j} \varepsilon = 0$$

Tal procedimento alterará o valor de $\Delta A_k^{(2)}$ em

$$-\varepsilon + \frac{k+1-j}{k+2-j} \varepsilon = -\frac{\varepsilon}{k+2-j}$$

levando-nos a concluir que, novamente, a situação mais desfavorável ocorrerá quando todos os Q_j , $1 < j \leq k$, forem o mais negativo possível com apenas Q_1 sendo positivo. Neste caso, tendo em vista (4.c), teremos:

$$-(k+1)S + kQ_1 - m \sum_{j=2}^k (k+1-j) = 0$$

donde

$$Q_1 = \frac{(k+1)S}{k} + \frac{(k-1)m}{2}$$

Logo, para que $\Delta A_k^{(2)} \geq 0$, deveremos ter:

$$-S + \frac{(k+1)S}{k} + \frac{(k-1)m}{2} - \sum_{j=2}^{k+1} m \geq 0$$

ou

$$m \leq \frac{2S}{k(k+1)}$$

Como queremos que o limite para m seja válido para qualquer k no intervalo de interesse, k deverá assumir o maior valor possível, isto é, $k = n - 1$, o que implica que:

$$m \leq \frac{2S}{n(n-1)}$$

4 — Comparação entre as diversas condições de suficiência

Concentrando-nos ainda no exame de projetos de investimento com mais de duas variações de sinal na seqüência de fluxos de caixa líquidos, passemos agora a um estudo comparativo entre as diversas condições de suficiência para a aplicabilidade do critério da taxa interna de retorno, no campo das taxas de juro não-negativas. O propósito do estudo é o de identificar quais as dominantes, e as condições de suficiência que iremos examinar aqui são as de Soper, de Norstrom e as correspondentes aos teoremas *C*, *D* e *E*, respectivamente.¹⁷

Em sua forma mais forte,¹⁸ sendo $i^* > 0$ e tal que $V(i^*) = 0$, as condições de Soper para que i^* seja a única taxa interna de retorno no intervalo considerado são:¹⁹

$$\begin{cases} Q_n > 0 \\ S \geq \sum_{j=1}^k Q_j (1 + i^*)^{-j}, \quad k = 1, 2, \dots, n - 1 \end{cases} \quad (13)$$

Por outro lado, e sendo obviamente dominada pelo teorema *E*, a condição de suficiência de Norstrom²⁰ será satisfeita se $V(0) > 0$ e, tendo em vista (9), se houver exatamente uma variação de sinal na seqüência formada pelos $n + 1$ primeiros elementos de $\{A_k^{(1)}\}$.

É também óbvio que, tendo em vista os corolários *E.1* e *E.2*, a condição relativa do teorema *E* domina as respectivamente associadas aos teoremas *C* e *D*. Entretanto, nada mais pode ser dito

¹⁷ A baseada nas funções de Sturm, sendo um processo algébrico exato de determinação do número das raízes reais e distintas de um polinômio em um certo intervalo, é, obviamente, dominante. Isto é, se não for satisfeita, nenhuma das outras o será, com a recíproca não sendo verdadeira. No Apêndice será dada uma idéia de sua implementação.

¹⁸ Clóvis de Faro, "A Eficiência Marginal...", *op. cit.*

¹⁹ Observe-se que, nas condições apresentadas, deveremos ter $V(0) > 0$.

²⁰ Norstrom, *op. cit.*

a priori, valendo, pois, que se apresentem exemplos numéricos ilustrativos das diversas possibilidades. Para tanto, e procurando evitar repetição do que foi anteriormente apresentado,²¹ considerem-se, sucessivamente, os seguintes projetos de investimento:

$$F: \{-6, 7, -2, 24\}$$

É fácil verificar que $i_F^* = 100\%$ anula o valor atual do projeto, e que, para esta taxa, as condições de Soper são satisfeitas, pois que $Q_n = Q_3 = 24 > 0$, e

$$k = 1 \rightarrow S = 6 > \sum_{j=1}^1 Q_j (1 + i^*)^{-j} = 7 \times 2^{-1} = 3,5$$

$$k = 2 \rightarrow S = 6 > \sum_{j=1}^2 Q_j (1 + i^*)^{-j} = 3,5 - 2 \times 2^{-2} = 3$$

Por outro lado, dado que $M = 7 \Rightarrow M(n-1) = 2 \times 7 = 14 > 2S = 12$, temos que a condição de suficiência associada ao teorema C não é satisfeita, ao passo que a relativa ao teorema D o é, já que $m = 2 \Rightarrow mn(n-1) = 2 \times 3 \times 2 = 12 = 2S$.

Quanto à condição de Norstrom e à referente ao teorema E, temos que, formando as respectivas seqüências:

$$\{A_k^{(1)}, k = 1, \dots, n\} \equiv \{-6, 1, -1, 23\}$$

e

$$\xi: \{-6, -5, -6\}$$

Ou seja, enquanto que a condição de Norstrom não é verificada (mais de uma variação de sinal), o mesmo não acontece com a relativa ao teorema E.

²¹ Clóvis de Faro, "Sobre a Unicidade...", *op. cit.*

Sendo os projetos *A* e *E*, respectivamente, ilustrativos do caso onde nenhuma das condições consideradas é satisfeita e daquele em que somente a associada ao teorema *E* o é, as demais possibilidades serão caracterizadas pelos seguintes projetos:

- $G : \{-8, 4, -1, 4, 4, -1\};$ $H : \{-50, 25, 102, -100, 392\};$
 $I : \{-11, 4, 4, 4, -2, 4, -1\};$ $J : \{-30, 15, 16, -2, 10, -1\};$
 $K : \{-1, 3, -1, 5\};$ $L : \{-10, 5, 5, 5, -1, 6\};$
 $M : \{-10, 5, 5, 5, -2, 6\};$ $N : \{-10, 7, 6, -1, 6\};$
 $O : \{-3, 1, 1, 1, 1, -2, 3\};$ $P : \{-1, 2, 1, -3, 10\};$
 $Q : \{-10, 4, 4, 4, -1, 5, -1\};$ $R : \{-20, 10, 10, -1, 10, -1\};$
 $S : \{-20, 11, 8, -1, 10, -1\};$
 $T : \{-72, 14, 14, 14, 14, 14, 3, -2, 14, -2\};$ e
 $U : \{-72, 14, 14, 14, 14, 14, 3, -2, 14, 14\}.$

Na Tabela 1 é indicado, para cada uma das dezoito possibilidades, o projeto que a identifica, sua respectiva taxa interna i^* , e se

TABELA 1
Confronto entre as condições de suficiência

Projeto	Soper	Norstrom	Teorema C	Teorema D	Teorema E	i^* (%)
A	N	N	N	N	N	100
E	N	N	N	N	S	40,16
F	S	N	N	S	S	100
G	S	N	S	N	S	9,57
H	S	N	S	N	N	100
I	N	N	S	N	S	7,69
J	N	N	N	N	S	13,02
K	S	S	N	N	S	218,00
L	S	S	S	S	S	32,00
M	S	S	S	N	S	29,98
N	S	S	S	S	S	34,08
O	S	N	S	N	S	33,33
P	S	N	N	N	S	153,93
Q	S	N	S	N	S	17,98
R	N	S	S	S	S	17,32
S	N	S	N	S	S	15,51
T	N	N	S	S	S	4,09
U	S	N	S	S	S	7,70

cada um dos cinco critérios sob exame é (S), ou não (N), satisfeito. Dois pontos merecem ser destacados: (a) quando consideradas isoladamente, as condições relativas aos teoremas C e D, bem como a de Norstrom, são competitivas entre si; (b) não existe dominância entre a condição de Soper e a associada ao teorema E.

5 — Algoritmo conceitual para implementação do critério

Restringindo-se a atenção ao campo das taxas positivas, e sendo $r > 0$ a taxa tomada como de comparação, vejamos agora como proceder para a aplicação formal do critério da taxa interna de retorno. Para tanto, face aos resultados aqui apresentados e levando-se em conta ainda certos detalhes adicionais que são discutidos no Apêndice, o seguinte algoritmo, de caráter conceitual e que pode ser considerado como uma extensão e atualização do apresentado em outro trabalho,²² deve ser implementado.

1.º passo: Se o projeto apresentar mais de uma variação de sinal na seqüência de fluxos de caixa líquidos, vá para o 3.º passo. Caso contrário, prossiga até o passo número 2.

2.º passo: Se $-S + \sum_{j=1}^n Q_j \leq 0$, o projeto não é economicamente interessante e o algoritmo termina. De outro modo, determine o valor de i^* e vá para o passo de número 10.

3.º passo: Se $-S + \sum_{j=1}^n Q_j \leq 0$, ou o projeto será economicamente injustificável, ou o critério da taxa interna é, formalmente, inaplicável; use o método do valor atual à taxa r e termine. Caso contrário, prossiga para o 4.º passo.

²² Clóvis de Faro, "On the Internal...", *op. cit.* Em José Alberto A. M. Ferreira, *Estudo de um Algoritmo Formal para a Aplicação do Critério da Taxa Interna de Retorno*, tese de mestrado (Rio de Janeiro: PUC, 1975), é apresentada uma versão numérica, sob a forma de programa para computador, que se tem revelado bastante eficiente.

4.^o passo: Se tiver sido identificada a presença de mais de duas variações de sinal na seqüência de fluxos de caixa líquidos, vá para o passo de número 5. De outro modo, calcule o único valor positivo de i^* e prossiga para o passo de número 10.

5.^o passo: Determine M e m e teste as condições associadas aos teoremas C e D . Se ao menos uma delas for satisfeita, compute i^* e vá para o passo de número 10. Caso contrário, prossiga para o próximo passo.

6.^o passo: Construa a seqüência dos fluxos de caixa cumulativos de Norstrom, e conte o número de variações de sinal. Em sendo identificada a presença de mais de uma variação, prossiga para o 7.^o passo. Caso contrário, determine i^* e vá para o passo de número 10.

7.^o passo: Forme a subsequência ξ e conte o número de variações de sinal. Se mais de uma variação, siga para o 8.^o passo. De outro modo, calcule i^* e vá para o passo de número 10.

8.^o passo: Determine uma solução i^* e teste as condições de Soper.²³ Se forem satisfeitas, vá para o 10.^o passo. Caso contrário, prossiga para o passo seguinte.

9.^o passo: Considerando a equação (7), aplique o teorema de Sturm, para $x \in [0, 1]$. Se for constatada a existência de mais de uma raiz no intervalo considerado, a aplicação formal do critério da taxa interna de retorno não é possível; use o método do valor atual à taxa r e termine. De outro modo, calcule o valor da raiz única, x^* , e faça $i^* = (1 - x^*)/x^*$. Siga para o próximo passo.

10.^o passo: Se $i^* > r$, aceite o projeto como economicamente atrativo; caso contrário, rejeite-o. Em qualquer dos dois casos, o algoritmo termina com a aplicação formal do critério da taxa interna de retorno tendo sido possível.

²³ Obviamente, antes que se perca tempo na determinação de uma solução i^* , devemos verificar se $Q_a > 0$. Se não for, devemos seguir diretamente para o 9.^o passo

6 — Conclusão

O principal óbice à implementação do critério de avaliação econômica segundo a taxa interna de retorno é, precisamente, a necessidade de que se garanta a existência e unicidade de uma taxa interna associada ao projeto que se quer avaliar. Com este respeito, as novas condições de suficiência que foram apresentadas podem vir a ser extremamente úteis. Isto é tanto mais verdade quando estas, principalmente em vista da facilidade com que são verificadas, revelam-se competitivas com as condições de suficiência descritas na literatura. Além do mais, embora as condições baseadas nos valores máximo e mínimo da seqüência de fluxos de caixa sejam dominadas pelo que se denominou de teste de subsequência ξ , as primeiras asseguram que, como mostrado no Apêndice e ao menos em certos casos, é isenta de problemas a aplicação do método de Newton-Raphson. Esta última propriedade é, por si só, de considerável relevância, pois que fica sobremaneira facilitada a determinação do valor numérico da taxa interna de retorno.

Apêndice — Resultados adicionais

A.1 — Aplicabilidade do método de Newton-Raphson

Uma vez estabelecida a existência e unicidade de uma taxa interna positiva i^* , resta ainda o problema da determinação de seu valor numérico. Regra geral, o processo que tem sido apresentado na literatura é o de tentativas.²⁴ Este procedimento, embora seja de

²⁴ E. Paul DeGarmo e John R. Canada, *Engineering Economy* (5.^a edição; New York: Macmillan, 1973), pp. 509-511; Anthony Herbst, "A Fortran IV Procedure for Determining Return on Invested Capital", in *Management Science*, vol. 20, n.º 6 (fevereiro de 1974), p. 1.022; e James C. T. Mao e David Knoll, "Analysis of Investment Returns by Computer", in *The Engineering Economist*, vol. 12, n.º 4 (1967), pp. 229-239.

aplicação garantida, no sentido de que, eventualmente, a solução será alcançada, é bastante ineficiente, podendo demandar um número relativamente excessivo de iterações. Um processo extremamente eficiente, o qual foi sugerido por Fisher,²⁵ é o que se baseia no chamado método de Newton-Raphson.²⁶ Infelizmente, como apontado por Kaplan,²⁷ a aplicação estrita de tal método nem sempre é possível, pois que esta exige que a função sendo tratada, ao menos no intervalo considerado, seja monótona crescente (ou decrescente) e que não mude de concavidade.

Tendo em vista os resultados até agora conhecidos, podemos garantir, *a priori*, a aplicação estrita do método de Newton-Raphson somente para dois casos particulares de projetos de investimento:²⁸

a) a do caso dos projetos ditos de investimento simples, que são caracterizados pelo fato de que $Q_j \geq 0$, $j = 1, 2, \dots, n$. Para esses, a função valor atual é estritamente decrescente e convexa para $i \geq 0$.

b) a do caso dos projetos denominados de investimento puro, que são aqueles tais que $A_k^{(t)} \leq 0$, $k = 0, 1, \dots, n - 1$. Para esses, a função valor futuro é estritamente decrescente e côncava para $i \geq 0$.

Nosso propósito, agora, é o de mostrar que a classe dos projetos de investimento passíveis de, *a priori*, sofrer a implementação estrita do método de Newton-Raphson, pode ser aumentada.

²⁵ Lawrence Fisher, "An Algorithm for Finding Exact Rates of Return", in *The Journal of Business of the University of Chicago*, vol. 39, n.º 1, 2.ª parte (janeiro de 1966), pp. 111-118.

²⁶ Veja-se Peter Henrici, *Elements of Numerical Analysis* (New York: Wiley, 1964), pp. 77-86, para uma descrição detalhada do método.

²⁷ Seymour Kaplan, "Computer Algorithms for Finding Exact Rates of Return", in *The Journal of Business of the University of Chicago*, vol. 40, n.º 4 (outubro de 1967), pp. 389-392.

²⁸ Conforme propriedades apresentadas em Daniel Teichrow, *et al.*, "Mathematical Analysis of Rates of Return under Certainty", in *Management Science*, vol. 11, n.º 3 (janeiro de 1965), pp. 395-403, e Clóvis de Faro, "On the Internal...", *op. cit.*

Demonstração do Corolário C

Temos que:

$$\frac{d^2 P(i)}{di^2} = (1+i)^{n-2} \left[-n(n-1)S + \sum_{j=1}^n (n-j)(n-j-1)Q_j(1+i)^{-j} \right] = (1+i)^{n-2} L(i)$$

Ora, em vista da relação de definição (4.b), segue-se que:

$$L(i) \Big|_M = -n(n-1)S + M \sum_{j=1}^n (n-j)(n-j-1)(1+i)^{-j}, \quad i \geq 0$$

e

$$dL(i) \Big|_M / di = -M \sum_{j=1}^n j(n-j)(n-j-1)(1+i)^{-j-1} < 0, \quad i \geq 0$$

Por outro lado, considerando-se a taxa nula, temos:

$$\begin{aligned} L(0) \Big|_M &= -n(n-1)S + M \sum_{j=1}^n (n^2 - 2nj - n + j + j^2) \\ &= -n(n-1)S + \frac{nM(n-1)(n-2)}{3} \\ &= \frac{n(n-1)}{3} \left[-3S + M(n-2) \right] \end{aligned}$$

Conseqüentemente, teremos $L(i) \Big|_M \leq 0$ e, portanto, a função valor futuro será estritamente côncava no intervalo considerado,²⁹ se tivermos $M \leq 3S/(n-2)$. Uma condição que é obviamente satisfeita se $M \leq 2S/(n-1)$, já que $2S/(n-1) < 3S/(n-2)$.

²⁹ Observe que, como evidenciado no caso do projeto $V : \{-50, 100, -40\}$, para o qual $V(0,2) = 5,56 > 0$ com $V''(0,2) = 0$ e $i_v^* \simeq 44,72\%$, nada pode ser dito quanto à concavidade da função valor atual, mesmo para $i \in [0, i^*]$.

Exemplo 1

Considere-se o caso do projeto $X: \{-8, 3, 3, 3, -2, 3, -1\}$. Temos que a soma dos fluxos de caixa é positiva, com $M = 3$, $S = 8$ e $n = 6$, o que implica que as condições sejam satisfeitas.

Como indicado esquematicamente no Gráfico 1, tomaremos como ponto de partida para a aplicação do método de Newton-Raphson a taxa:

$$i_1 = - \frac{P(0)}{P'(0)} = \frac{P(0)}{\sum_{j=1}^n j Q_j - n P(0)} = \frac{1}{13} \text{ ou } 7,69\%$$

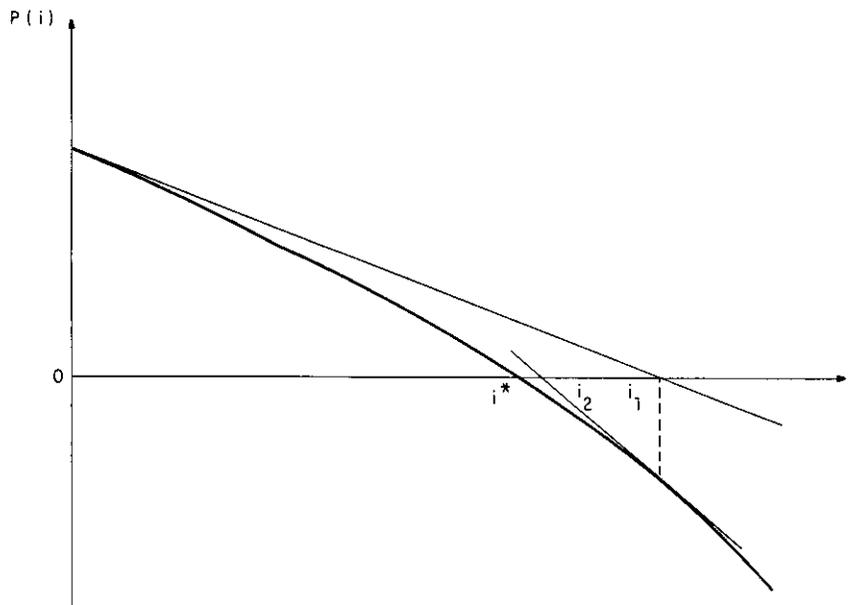
A partir desse valor, teremos, sucessivamente:

$$i_k = i_{k-1} - \frac{P(i_{k-1})}{P'(i_{k-1})}, \quad k = 1, 2, \dots$$

com

$$i_1 > i_2 > \dots > i^*$$

Gráfico 1



No caso, temos:

$$i_2 = 0,0769 - \frac{P(0,0769)}{P'(0,0769)} \simeq 0,0657$$

$$i_3 = 0,0657 - \frac{P(0,0657)}{P'(0,0657)} \simeq 0,0584$$

$$i_4 = 0,0584 - \frac{P(0,0584)}{P'(0,0584)} \simeq 0,0582, \text{ com } P(0,0582) \simeq 4,24 \times 10^{-6}$$

Corolário D.1

Se a soma algébrica dos fluxos de caixa for positiva, e se $m \leq 6S/[n(n+4)(n-1)]$, então a função valor atual é estritamente convexa para $i \in [0, i^*]$.

Demonstração.

Como $2S/[n(n-1)] > 6S/[n(n+4)(n-1)]$, são válidas as condições do teorema D, de modo que:

$$A(i) = -2(1+i)^{-2} \quad V(i) = 2S(1+i)^{-2} - 2 \sum_{j=1}^n$$

$$Q_j (1+i)^{-j-2} \leq 0, \quad i \in [0, i^*]$$

Logo, se

$$V''(i) + A(i) > 0, \quad i \in [0, i^*] \implies V''(i) > 0, \quad i \in [0, i^*]$$

Ora:

$$V''(i) + A(i) = 2S(1+i)^{-2} + \sum_{j=1}^n (j^2 + j - 2) Q_j (1+i)^{-j-2}$$

e, portanto,

$$V''(i) + A(i) > 0 \text{ se } 2S + \sum_{j=1}^n (j^2 + j - 2)$$

$$Q_j (1+i)^{-j} = B(i) > 0$$

Porém, tendo em vista (4.c), temos que:

$$B(i) > 2S - m \sum_{j=1}^n (j^2 - j - 2) (1+i)^{-j} \geq$$

$$\geq 2S - m \sum_{j=1}^n (j^2 - j - 2), \quad i \in [0, i^*]$$

e

$$2S - m \sum_{j=1}^n (j^2 - j - 2) \geq 0 \text{ se } 2S - mn(n+4)(n-1)/3 \geq 0$$

c.q.d.

Infelizmente, a condição do corolário D.1 é bem mais fraca do que a de validade do teorema D. Entretanto, mesmo assim, ainda pode vir a ser útil, como veremos a seguir.

Exemplo 2

Seja o caso do projeto Z: $\{-100, 80, 21, -2, 83, -2\}$. Como $6S = 600$ e $mn(n+4)(n-1) = 2 \times 5 \times 9 \times 4 = 360$, segue-se que a função valor atual é estritamente decrescente e convexa para $i \in [0, i^*]$, o que garante a aplicabilidade do método de Newton-

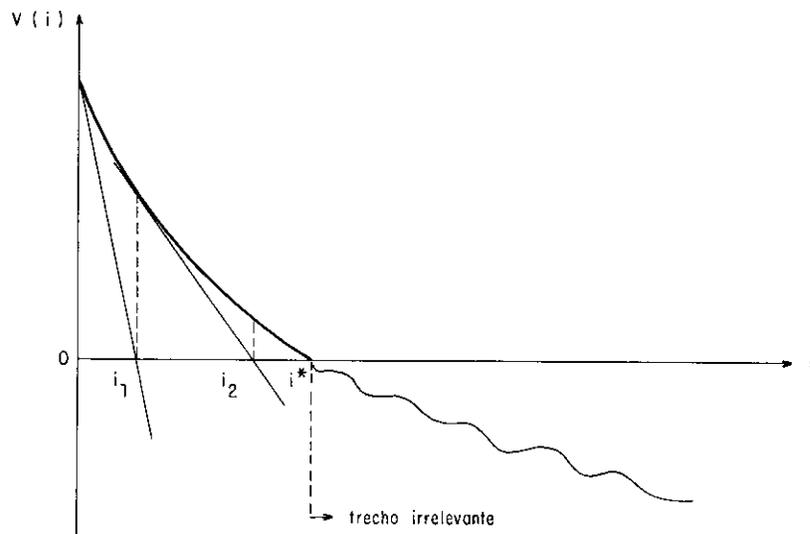
Raphson nesse intervalo. Para tanto, como esquematicamente indicado no Gráfico 2, partindo de:

$$i_1 = - \frac{V(0)}{V'(0)} = \frac{S - \sum_{j=1}^n Q_j}{\sum_{j=1}^n jQ_j}$$

faremos, sucessivamente:³⁰

$$i_k = i_{k-1} - \frac{V(i_{k-1})}{V'(i_{k-1})}, \quad k = 2, 3, \dots$$

Gráfico 2



³⁰ Observe-se que $i_1 < i_2 < \dots < i^*$.

No caso, temos:

$$i_1 = \frac{80}{438} = 0,1826$$

$$i_2 = 0,1826 - V(0,1826) / V'(0,1826) \simeq 0,2876$$

$$i_3 = 0,2876 - V(0,2876) / V'(0,2876) \simeq 0,3098$$

$$i_4 = 0,3098 - V(0,3098) / V'(0,3098) \simeq 0,3105$$

$$i_5 = 0,3105 - V(0,3105) / V'(0,3105) \simeq 0,3106, \text{ com } V(0,3106) \simeq 10^{-9}$$

A.2 — Aplicação do teorema de Sturm

Como mencionado no texto, o teorema de Sturm³¹ provê um método exato de determinação do número de raízes reais de um polinômio em um certo intervalo. Conseqüentemente, considerando-se a equação definida pela (7), para $x \in [0,1]$, sua aplicação nos dá uma condição de necessidade para a aplicação do critério da taxa de retorno no campo das taxas de juro não-negativas.

De uma maneira sucinta, a aplicação do teorema procede como descrito a seguir. Inicialmente, forme a seqüência das chamadas funções de Sturm, $F_0(x), F_1(x), \dots, F_m(x)$, onde:

$$F_0(x) = F(x)$$

$$F_1(x) = dF(x) / dx$$

e, representando-se por D_{k-1} o quociente da divisão $F_{k-2}(x) / F_{k-1}(x)$

$$F_k(x) = D_{k-1}(x) F_{k-1}(x) - F_{k-2}(x), \quad k = 2, 3, \dots, m$$

Isto é, $F_2(x)$ será o simétrico do resto da divisão $F_0(x) / F_1(x)$; $F_3(x)$ será o simétrico do resto da divisão $F_1(x) / F_2(x)$; etc., até que se obtenha $F_m(x)$ igual a uma constante.

³¹ Veja-se H. W. Turnbull, *Theory of Equations* (5.ª edição; Edinburgh: Oliver and Boyd, 1957), pp. 103-107, para uma descrição detalhada.

Assim, para o caso do projeto $A: \{-1, 6, -12, 8\}$, teremos a seguinte seqüência de funções de Sturm:

$$F_0(x) = -1 + 6x - 12x^2 + 8x^3$$

$$F_1(x) = 6 - 24x + 24x^2$$

e, procedendo-se à divisão $F_0(x)/F_1(x)$

$$\begin{array}{r|l}
 & x/3 - 1/6 \\
 \hline
 & 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 \\
 24x^2 - 24x + 6 & 8x^3 - 8x^2 + 2x \\
 \hline
 & / - 4x^2 + 4x - 1 \\
 & - 4x^2 + 4x - 1 \\
 \hline
 & / \quad / \quad /
 \end{array}$$

Logo, como o resto é nulo,³² temos $F_2(x) = 0$, e a seqüência está completa.

Uma vez formada a seqüência de Sturm, o número de raízes distintas de $F(x) = 0$, no intervalo $[a, b]$, é igual ao número de variações de sinal quando $x = a$, subtraído do número de variações quando $x = b$.

No caso do exemplo, lembrando que o intervalo de interesse é definido por $x \in [0, 1]$, podemos organizar o seguinte quadro:

Função	$x = 0$		$x = 1$	
	Valor	Sinal	Valor	Sinal
$F_0(x)$	-1	-	1	+
$F_1(x)$	6	+	6	+
$F_2(x)$	0	indet.	0	indet.

³² A presença de resto nulo é indicativa de ao menos uma raiz múltipla.

Então, tendo em vista que um sinal indeterminado, correspondente ao valor zero, é contado como uma continuação de sinal, segue-se que a diferença entre o número de variações é $1 - 0 = 1$. Isto é, só existe uma raiz distinta de $F(x) = 0$ no intervalo considerado.

