# Três modelos teóricos para a previdência social *

ROGÉRIO BOUERI MIRANDA**

*Este trabalho examina as implicações econômicas da previdência social no contexto do modelo de gerações superpostas (OLG) e as exemplifica mediante simulações. Para tanto, serão utilizadas três versões desses modelos, as quais se diferenciam pela maneira como cada uma incorpora a demanda por capital dos agentes. Os resultados obtidos evidenciam a grande influência que as diversas especificações da demanda por capital dos agentes exercem sobre a acumulação de capital e sobre a existência da equivalência ricardiana.*

## 1 - Introdução

O propósito deste trabalho é estudar as implicações econômicas da previdência social no contexto do mais amplamente difundido modelo de OLG, construído por Samuelson (1958) e complementado por Diamond (1965) e exemplificá-las mediante simulações. Para tanto, serão utilizadas três versões desses modelos, as quais se diferenciam pela maneira como cada uma incorpora a demanda por capital dos agentes. Serão examinados, em especial, os efeitos da previdência sobre a acumulação de capital.

O primeiro deles, considerado o precursor desse tipo de aplicação, é a formulação de Diamond (1965). Nela, os agentes não se importam, sob nenhum aspecto, com as gerações futuras. Isso, como será visto, terá conseqüências diretas sobre a acumulação de capital e sobre a eficiência dinâmica. A seguir, será discutido o modelo de Barro (1974), no qual a preocupação dos indivíduos com a geração futura estabelece uma cadeia de elos intergeracionais que os leva a agir como se tivessem vida infinita. Nesse ponto, será introduzida a discussão acerca da *equivalência ricardiana*, que deriva desse modelo. Por fim, será utilizada a formulação de Martins (1995), na qual a preocupação dos indivíduos com as gerações futuras é expressa pela valorização das heranças deixadas. Nesse caso, as proposições de neutralidade das políticas de governo não mais se verificam, não obstante a ligação dos agentes com o futuro.

---

* Este trabalho é uma versão modificada da dissertação de mestrado intitulada "A previdência social em três modelos novo-clássicos", defendida com êxito pelo autor na Escola de Pós-Graduação em Economia da Fundação Getulio Vargas (EPGE/FGV) em julho de 1997. O autor gostaria de agradecer o apoio e os comentários dos professores Marco Antônio Campos Martins, Fernando Holanda Barbosa e Antônio Carlos Porto Gonçalves.

** Da Coordenação Geral de Finanças Públicas do IPEA.

Pesq. Plan. Econ., Rio de Janeiro, v. 27, n. 1, p.611-640, dez. 1997

Serão realizadas simulações com o intuito de ilustrar o funcionamento de modelos complexos, em que o exame analítico torna-se bastante complexo e por vezes estéril. Segundo Auerbach e Kotlikoff (1987), são três os passos necessários para descrever o funcionamento de um sistema econômico. Para começar, deve-se encontrar o valor de equilíbrio inicial, após o qual se realizarão as mudanças que se deseja avaliar. A seguir, calcula-se o novo valor de equilíbrio que delas resultará. Por fim, deve-se solucionar a trajetória de desenvolvimento das variáveis, que as levarão de um equilíbrio a outro.

Diversas abordagens são utilizadas para o estudo das características e dos efeitos da previdência. Como exemplos, podem ser citados os estudos estatístico-atuariais que visam especialmente estabelecer as condições de equilíbrio financeiro de longo prazo dos esquemas previdenciários e os estudos a respeito do caráter redistributivo da previdência, muito em voga atualmente, em virtude do debate sobre a reforma do sistema brasileiro. No entanto, quando o foco de atenção se concentra na acumulação de capital e no bem-estar econômico, os modelos de OLG são os mais amplamente utilizados.

Isso pode ser comprovado pela vasta literatura existente que liga os dois assuntos. Realmente, a discussão moderna sobre previdência, inclusive a de caráter empírico, está estabelecida dentro do contexto dos modelos de OLG. Desde Feldstein (1974), Munnell (1976) e Barro e MacDonald (1979) até os trabalhos mais recentes de Arrau e Schmidt-Hebbel (1993), Corsetti & Schmidt-Hebbel (1994), Barbosa e Mondino (1994), Barreto e Oliveira (1995) e Feldstein (1996), a previdência vem sendo tratada segundo essa estrutura.

Essa predileção provavelmente se deve ao reconhecimento de que a previdência não é apenas um problema de alocação intertemporal, mas também uma questão de distribuição da riqueza entre sucessivas gerações e que, portanto, os modelos de OLG são mais adequados ao exame do problema previdenciário.

## 2 - Previdência nos modelos de OLG

Embora os modelos de Diamond, Barro e Martins difiram quanto às funções objetivo a serem maximizadas, tais formulações têm diversas hipóteses em comum. Em todas elas são supostas economias nas quais coexistem duas espécies de indivíduos: os ativos e os inativos. Cada indivíduo participa seqüencialmente das duas categorias. No primeiro período de suas vidas, os indivíduos são classificados como ativos. Durante esse tempo, eles empregam sua força de trabalho, que, associada ao estoque de capital disponível (pertencente à geração antecessora), produzirá no final do período uma determinada quantidade do bem único da economia, o qual tanto se presta ao consumo quanto ao investimento. Esse produto, então, será repartido entre os fatores de produção, ocasião em que os agentes decidirão entre consumo e poupança. O que se poupar terá de ser sob a forma de capital, compondo o estoque desse fator, que participará da produção no próximo período. No segundo período, os indivíduos não trabalham; vivem das poupanças acumuladas na fase anterior e dos seus rendimentos. Depois de desfrutar o segundo período, os indivíduos morrem.

São classificados como indivíduos da geração $t$ quem no período $t$ está vivendo o seu período ativo. Assim, os indivíduos da geração $t$ convivem com os inativos da geração $t-1$, durante o período $t$ (enquanto são ativos) e com os indivíduos ativos da geração $t+1$, no período $t+1$ (quando já são inativos). Existe uma taxa de crescimento populacional constante igual a $\eta \geq 0$.

Para simplificar, pode-se supor que o consumo, o salário e a poupança são iguais para todos os indivíduos da mesma geração, podendo contudo variar de uma geração para outra. Assim, é indiferente tomar tais parâmetros de forma individual ou *per capita*. Dessa forma, cada indivíduo se depara com as seguintes restrições intertemporais:

$$\text{Primeiro período: } c_t(t)+s_t=W_t+b_t(1+\eta)^{-1} \tag{1}$$

$$\text{Segundo período: } c_t(t+1)+b_{t+1}=(1+r_{t+1})s_t \tag{2}$$

onde $c_t(t)$ e $c_t(t+1)$ são os consumos *per capita* dos indivíduos da geração $t$ durante o primeiro e o segundo período de vida, respectivamente; $s_t$ é a poupança *per capita* e $w_t$ o salário *per capita* desse mesmo grupo; $r_{t+1}$ é a taxa de juros que remunera no período $t+1$ a poupança realizada no período $t$ e $b_t$ e $b_{t+1}$ são, respectivamente, as heranças *per capita* recebidas e doadas pelos indivíduos da geração $t$. Note-se que as heranças *per capita* recebidas são divididas por $(1+\eta)$, expressando o fato de que a geração $t$ é $(1+\eta)$ vezes maior do que a geração $t-1$.

A introdução de sistemas de previdência nesses modelos é realizada a partir dessas restrições. Há dois tipos diferentes de mecanismos previdenciários, no que tange ao seu financiamento. No primeiro deles, o esquema *pay-as-you-go*, também chamado de "esquema de repartição", cada indivíduo ativo pagará um montante $d_t$, a título de contribuição previdenciária. As contribuições são rateadas entre os inativos do período, cabendo a cada um uma cota $a_t$. No próximo período, a geração contribuinte será transformada em geração pensionista, recebendo da geração ativa de então transferências por meio da estrutura previdenciária. Dessa forma, em cada período os ativos financiam os inativos. Como a população cresce à taxa $\eta$, tem-se que: $a_{t+1}=d_{t+1}(1+\eta)$. Logo, as restrições nesse caso passam a ser:

$$\text{Primeiro período: } c_t(t)+s_t+d_t=w_t+b_t(1+\eta)^{-1} \tag{3}$$

$$\text{Segundo período: } c_t(t+1)+b_{t+1}=(1+r_{t+1})s_t+(1+\eta)d_t \tag{4}$$

É válido notar que aqui cada indivíduo encara $\eta$ e não $r_{t+1}$ como a taxa de retorno do seu "investimento previdenciário".

No segundo caso, o chamado "método de capitalização" ou, como é consagrado na literatura, *fully funded* tem como princípio básico o fato de que as contribuições previdenciárias são capitalizadas em um fundo de investimentos, do qual, no futuro, serão sacados os recursos necessários ao pagamento das pensões de aposentadoria, ao invés de serem transferidas para as gerações antecessoras.

Esse esquema pode funcionar baseado em contribuições voluntárias ou compulsórias. Em países em que convive com o sistema de repartição, como, por exemplo, o Brasil, os Estados Unidos e a maioria dos países europeus, a adesão é voluntária. Em outros países latino-americanos, nos quais o sistema de capitalização foi implementado para substituir o de repartição, cujo exemplo mais destacado é o Chile, quase sempre assume caráter obrigatório.[1] Em geral é examinado apenas o primeiro caso, pois quando a participação nesse sistema é voluntária, a contribuição para a previdência assume um caráter específico de poupança voluntária e a análise confunde-se com o caso de uma economia sem previdência.

Dessa forma, considerando-se um esquema de capitalização com participação obrigatória, cada indivíduo ativo deve despender um montante $d_t$, a título de contribuição previdenciária no período *t*, recebendo, no período $t+1$, quando for inativo, o benefício $a_{t+1}$. Durante o prazo entre o recolhimento da contribuição e o pagamento do benefício, o sistema previdenciário investe as contribuições a uma taxa $i_{t+1}$, de forma que $a_{t+1} = d_t(1+i_{t+1})$, modificando as restrições no seguinte sentido:

$$\text{Primeiro período: } c_t(t) + \tilde{s}_t + d_t = w_t + b_t(1+\eta)^{-1} \tag{5}$$

$$\text{Segundo período: } c_t(t+1) + b_{t+1} = (1+r_{t+1})\tilde{s}_t + (1+i_{t+1})d_t \tag{6}$$

A poupança agregada *per capita* $S_t$ pode ser decomposta em dois itens: $\tilde{S}_t$, que é a poupança voluntária; e a poupança previdenciária *per capita*, de caráter compulsório nesse caso, representada por $d_t$. É importante perceber a modificação ocorrida na segunda restrição. Em primeiro lugar, não existe mais nenhuma relação entre a contribuição paga pela geração $t+1$ e o benefício recebido pela geração *t*; este depende agora da contribuição realizada pelos indivíduos da própria geração *t*. Ademais, o fator multiplicativo das contribuições não é mais a taxa de crescimento populacional, mas a taxa de retorno obtida pelos aplicadores dos recursos da previdência. Se o mercado de planos de pensão for competitivo, é bastante plausível supor que a taxa de rendimento dos ativos $r_{t+1}$ será igual à taxa de rentabilidade dos investimentos previdenciários $i_{t+1}$, obtendo-se então uma versão modificada da segunda restrição: $c_t(t+1) + b_{t+1} = (1+r_{t+1})(\tilde{S}_t + d_t)$.

Outro ponto compartilhado pelas três formulações é a função de produção. Trata-se de uma função de produção tradicional, que depende de dois fatores de produção: capital

1 Mais detalhes sobre a experiência chilena, bem como sobre a de outros países latino-americanos, podem ser encontrados em Mesa-Lago (1994). Corsetti e Schmidt-Hebbel (1994) analisam o crescimento econômico potencial advindo dessas experiências.

($K$) e trabalho ($N$). Essa função é suposta homogênea de grau 1 em ambos os fatores. Então, se $F(K,N)$ é a referida função de produção, onde $k$ e $f(k)$ são, respectivamente, o estoque de capital *per capita* e a produção *per capita*. Por suposição, tal função é estritamente convexa, ou seja, $f''< 0$ e as condições de Inada são satisfeitas, isto é, $f(0) = 0, f'(0) = \infty \ , f'(\infty) = 0$.

Também são respeitadas as hipóteses competitivas sobre os mercados de fatores. Portanto, a taxa de juros será igual à produtividade marginal do capital e tudo que for produzido será utilizado para remunerar os fatores:

$$f'(k_t) = r_t \tag{7}$$

$$f(k_t) - k_t f'(k_t) = w_t \tag{8}$$

Como nesses modelos existem dois mercados — o de bens e o de capitais —, pela lei de Walras, ao se examinarem as condições de equilíbrio de um dos mercados, examinam-se concomitantemente as condições de equilíbrio do outro. Assim, se o mercado de ativos estiver equilibrado, o de bens também estará.

A condição de equilíbrio no mercado de ativos é que o investimento líquido seja igual à poupança líquida. Se for considerado que a população cresce à taxa $\eta$, isto é, que $N_{t+1} = N_t(1+\eta)$, tem-se que:

$$K_{t+1} - K_t = N_t \, s_t - K_t$$

ou em termos *per capita*:

$$k_{t+1}(1+\eta) = s_t \tag{9}$$

Como já foi mencionado, os modelos diferem fundamentalmente pela função de utilidade a ser utilizada em cada um deles. Nos modelos do tipo Diamond, por exemplo, a função de utilidade dos agentes participantes do sistema econômico não possui nenhuma ligação com as gerações futuras. Nesse sentido, os agentes à Diamond seriam "introvertidos" na medida em que só valorizariam o seu próprio período de existência. Matematicamente isso se reflete em uma função de utilidade na qual somente são valorizados os consumos do próprio indivíduo, ou seja:

$$U_i[c_t(t), c_t(t+1)] = U[c_t(t)] + (1+\theta)^{-1} U[c_t(t+1)] \tag{10}$$

onde $U$ é a função utilidade do indivíduo ($U' > 0$ e $U'' < 0$)[2] e $q$ é a taxa de desconto intertemporal. A utilização de funções de utilidade separáveis e aditivas, que serão adotadas nas simulações mais adiante, deve-se não só à simplificação no tratamento matemático do problema, mas principalmente ao fato de, por essa forma, obterem-se mensurações uniformes dos índices de utilidade de cada período [ver Mas-Collel, Whinston e Green (1995)].

A resolução do modelo de Diamond sem previdência consiste em maximizar a equação (10), sujeita às restrições (1) e (2), e substituírem-se nas equações marginais resultantes as condições de equilíbrio resultantes de (7), (8) e (9). A partir dos resultados oriundos dessa resolução chega-se a três importantes conclusões. A primeira delas é a de que nem a unicidade nem a existência do equilíbrio do modelo são asseguradas, como é reconhecido pelo próprio Peter Diamond, em seu texto original [ver Diamond (1965)].

O modelo também não possui, em geral, eficiência dinâmica. Esta só ocorre se $f'(k) = \eta$, ou seja, se a produtividade marginal do capital se igualar à taxa de crescimento da população. No entanto, não há nenhum mecanismo intrínseco que conduza a tal igualdade. Caso a produtividade marginal do capital seja inferior à taxa de crescimento demográfico, ocorre o fenômeno da *sobreacumulação*, no qual o estoque de capital é tão grande que a sua produtividade marginal não seria suficiente para repor o estoque *per capita* desse fator.

Por fim, verifica-se que nesse modelo não ocorre a formação de heranças, isto é, $b_t = b_{t+1} = \ldots = b_{t+n} = 0$. O modelo de Diamond baseia-se, pois, em um mecanismo de funcionamento no qual todo o estoque de capital deve ser "repoupado" a cada período, porquanto o indivíduo consome tudo que lhe cabe da produção e nada deixa às gerações sucessoras, porque não tem qualquer preocupação com o futuro.

A introdução de previdência no modelo se dá com a substituição das restrições (1) e (2) do problema de maximização pelas restrições (3) e (4), na previdência por repartição, ou (5) e (6), no método de capitalização.

No primeiro caso, o resultado obtido aponta para uma redução no estoque de capital de *steady state* e no segundo para uma neutralidade com respeito a essa variável. A análise conjunta dos resultados desses dois sistemas de previdência no contexto do modelo de Diamond estabelece que não existe dominância intrínseca de um sobre o outro. Se a economia estiver funcionando eficientemente, o sistema de repartição deprime o estoque de capital e o nível de consumo de *steady state*, enquanto o de capitalização não afeta essas variáveis, sendo portanto melhor. Contudo, como os sistemas econômicos tipo Diamond podem apresentar ineficiência dinâmica causada pela *sobreacumulação*, a previdência por repartição, ao reduzir o nível de capital no *steady state*, poderia conduzir a economia para a eficiência, elevando assim o bem-estar agregado, efeito que não poderia ser obtido a partir de um esquema de capitalização. Portanto, neste segundo caso, a repartição seria mais vantajosa. A conclusão imediata é que a avaliação do

---

2 Estritamente falando, não é necessária a suposição da existência de funções de utilidade cardinalmente definidas, pois basta que as escalas ordinais de preferências dos agentes possuam determinadas propriedades, para que possam ser representadas por funções de utilidade. Detalhes em Varian (1984), p. 113.

melhor sistema de previdência para uma economia do tipo Diamond depende de considerações empíricas.

A alternativa a modelos do tipo Diamond mais encontrada na literatura consiste na introdução de algum tipo de altruísmo na função objetivo dos indivíduos. Altruísmo, no âmbito dos modelos OLG, é uma atitude que leva os agentes a se preocupar, de alguma forma, com os outros participantes do sistema econômico. Essa atitude, quando direcionada a membros de outras gerações, pode levar a ligações que alteram de maneira decisiva o comportamento do modelo. Mais marcante é o fato de que as diferenças nas concepções filosóficas que sustentam a incorporação do altruísmo nos modelos refletem-se nos resultados destes. O altruísmo puro caracteriza-se pela preocupação apresentada pelos agentes em relação aos seus sucessores e pela incorporação da *utilidade* destes últimos à sua própria função de utilidade. Poder-se-ia então descrever a utilidade típica de um indivíduo da geração $t$ pela seguinte função:[3]

$$V_t = U[c_t(t)] + (1+\theta)^{-1} U[c_t(t+1)] + (1+R)^{-1} V_{t+1} \tag{11}$$

onde $V_t$ é a função de utilidade do indivíduo da geração $t$; $V_{t+1}$ é a função de utilidade da próxima geração; e $R$ é a taxa pela qual os agentes descontam a utilidade da geração, que passa a ser a taxa de desconto intertemporal relevante — aqui ela é a taxa pela qual os agentes descontarão o *futuro*. Um fato de destaque nessa formulação é o de que quando $R$ tende para o infinito os agentes desse modelo tornam-se idênticos aos indivíduos do tipo Diamond. Resolvendo-se recursivamente (11), tem-se:

$$V_t = \sum_{i=0}^{\infty} (1+R)^{-i} \left\{ U[c_t(t+i)] + (1+\theta)^{-1} U[c_t(t+i+1)] \right\} \tag{11a}$$

As restrições desse problema são basicamente iguais às do anterior, mas se deve ter o cuidado de incluir as restrições de todas as gerações posteriores, uma vez que o consumo desses indivíduos passa a ser variável de escolha.

A resolução do modelo mostra que, se houver formação de heranças positivas, o nível de capital de *steady state* será aproximadamente o nível determinado pela chamada "regra de ouro modificada" que surge dos modelos de vida infinita do tipo Ramsey.[4]

Os modelos de vida finita à Barro compartilham ainda com os de vida infinita do tipo Ramsey o fato de, sob certas circunstâncias, os dois tipos apresentarem eficiência dinâmica. No caso dos modelos à Barro isso depende mais uma vez da existência de heranças positivas no modelo.

3 Esta função de utilidade recursiva foi introduzida primeiramente por Koopmans [ver Mas-Colell, Whinston e Green (1995)]. Contudo, a sua utilização em modelos de crescimento deve-se a Robert Barro.

4 Na verdade, a regra proveniente dos modelos de vida infinita é $f'(k^*) = R + \eta$, enquanto no modelo de Barro chega-se a $1 + f'(k^*) = (1+R)(1+\eta)$. Para valores pequenos de $R$ e, $\eta$, as duas regras são aproximadamente iguais.

Quando se introduz a previdência por repartição em um sistema econômico como este, obtém-se um resultado de *equivalência ricardiana*,[5] uma vez que qualquer elevação marginal na taxa de desconto previdenciário ocasionará um aumento de $(1+h)$ vezes na herança deixada pelos agentes aos seus descendentes. Ora, como as gerações crescem à taxa $h$, entende-se que o incremento nas heranças será justamente o suficiente para compensar a próxima geração do aumento da taxa de previdência. Em suma, *qualquer benefício adicional que for auferido pelos indivíduos da geração mais antiga será devolvido sob a forma de herança para a geração mais nova*. Como a previdência por capitalização, nesse modelo, também é neutra em relação à poupança, não haveria influência alguma do sistema previdenciário sobre a acumulação de capital.

## 3 - O modelo de Martins

Embora o chamado "motivo herança puro" predomine na explicação das transferências intergeracionais, existem outras formas de tratar o problema. Essas alternativas expressam não só a possibilidade de modelar esse fenômeno de outras maneiras, mas também revelam formas diversas de encará-lo conceitualmente.

Nesta seção discute-se o chamado "motivo herança absoluto", conforme utilizado por Martins (1995), que é uma forma de ligação intergeracional na qual os indivíduos incorporam na sua função de utilidade, não a utilidade de seus descendentes, mas a herança total para eles deixada. Essa alteração na forma de encarar a motivação das heranças será operacionalizada e suas implicações sobre a acumulação de capital e sobre a eficiência dinâmica do equilíbrio atingido serão discutidas em um cenário em que prevalece um esquema previdenciário por repartição.

Nas formulações à Barro, a existência de ligações intergeracionais implica tanto a formação de heranças quanto a neutralidade das políticas públicas. Já nos modelos do tipo Diamond, a não-neutralidade é obtida mas ao custo do desprezo às heranças. A introdução do "motivo herança absoluto" à Martins é interessante porque a partir dele resultados intermediários são atingidos. Em suma, obtêm-se proposições de não-neutralidade em um sistema no qual ocorrem transferências intergeracionais.

A introdução de heranças diretamente na função de utilidade dos agentes tem sido justificada de várias maneiras. Contudo, tais aplicações do chamado "altruísmo impuro" foram para o tratamento de problemas diferentes daquele que é o objeto deste trabalho. O conteúdo conceitual nelas imbutido também é diverso. A primeira delas associa as heranças a algum tipo de influência que os agentes querem exercer sobre seus sucessores. Esse tipo de motivação tem sido batizado com diversos nomes: Bernheim, Shleifer e Summers (1985) denominam-no *strategic bequest motive;* Andreoni (1989), *warm glow giving*, enquanto outros preferem "altruísmo impuro", ou ainda, *joy-of-giving* [ver Blanchard e Fischer (1989), capítulo 3]. Todos eles, no entanto, têm um princípio em

5 Mais uma vez supondo existência de heranças positivas na economia sem previdência.

comum: descrevem a herança a ser deixada como um pagamento a indivíduos da geração sucessora por serviços prestados ao doador. Dessa forma, mesmo a atenção, carinho ou respeito de um indivíduo mais novo para com um mais velho poderiam ser motivados por estímulos financeiros adequados. Tais estímulos seriam materializados com a perspectiva de renda futura, obtida por meio das heranças.

Outra forma de descrever o problema é admitir que as heranças são simplesmente acidentais. Supondo-se que os indivíduos são avessos ao risco e que a data de sua morte é incerta, eles tenderiam a acumular poupanças maiores do que o nível ótimo associado aos seus períodos médios de vida, isto é, os indivíduos superestimariam suas poupanças para que não passem necessidade caso vivam mais do que a média. Assim, os indivíduos, agregadamente, deixariam alguma "sobra" quando morressem e quanto maior o grau de aversão ao risco, maior seriam as transferências intergeracionais. O problema dessa abordagem é que a existência de mercados de capitais capazes de prover seguros adequados aos indivíduos poderia tornar nulo o efeito da incerteza sobre o comportamento dos indivíduos, trazendo o problema de volta para o modelo de Diamond.

Segundo a abordagem de Martins (1995), os agentes incorporariam o valor das heranças nas respectivas funções de utilidade, não com objetivos estratégicos, mas porque valorizam o *futuro*. Dessa forma, haveria uma motivação intrínseca de cada agente em participar do crescimento que ocorrerá após a sua *existência* e tal participação dar-se-á por meio do seu legado deixado sob a forma de heranças.[6] Assim, Martins (1995) considera que os agentes têm um impulso natural à acumulação:[7] o simples ato de poupar capital e legá-lo às gerações futuras já está incluído na escala de preferências dos indivíduos. Para o autor, seria a forma pela qual os indivíduos poderiam projetar-se no futuro, dele participando, por meio da contribuição deixada para o desenvolvimento da sociedade.

Sob o aspecto lógico do modelo, a herança doada funciona como um elo entre os indivíduos existentes em um período $t$ qualquer e o futuro. Tal fato, como será visto adiante, tem implicações decisivas sobre o funcionamento do modelo, em especial no que se refere à acumulação de capital de longo prazo e à neutralidade da previdência social por repartição.

Vale notar que os modelos com "motivo herança absoluto", como são nomeados por Martins (1995),[8] embora façam parte do elenco de modelos dinâmicos de crescimento, diferem de forma fundamental tanto do modelo de Diamond, no qual os indivíduos são introvertidos, quanto das formulações do tipo Barro, em que os agentes se preocupam de forma restrita com o futuro, uma vez que valorizam apenas o bem-estar de sua prole. No modelo de Martins, o futuro é valorizado de forma integral pelos agentes, tal como deixassem heranças para a humanidade e não apenas para os seus descendentes.

---

6 Atkinson (1971) e Blinder (1975) já haviam desenvolvido modelos de crescimento nos quais o valor das heranças deixadas é considerado na função de utilidade dos agentes, mas além de se tratar de modelos contínuos, eles diferem do de Martins (1995) pelo fato de tais heranças serem descontadas por uma taxa de desconto e não valorizadas por um parâmetro das preferências.

7 "So, this paper...takes the act of capital accumulation as inherent to human societies" [ver Martins (1995)].

8 Na verdade, Martins (1995) atribui a Hoover (1988) esta nomenclatura.

Por outro lado, este modelo não descarta a abordagem de vida infinita. Nesse caso, embora considerando os agentes imortais, os seus ciclos de planejamento seriam finitos de modo que suas decisões de consumo e poupança pudessem ser reformuladas ao final de cada ciclo. Nas circunstâncias, é como se os agentes estivessem deixando heranças para si próprios, de forma que no próximo *ciclo de planejamento* dispusessem de uma dotação inicial. Não obstante o fato de que tal abordagem produziria um resultado que é dominado por aquele obtido a partir dos modelos de vida infinita, ela lida com o fato de que sob determinadas condições é razoável, ou até mesmo imprescindível, a consideração de que o ciclo de planejamento é menor do que a *existência* do indivíduo. Para exemplificar, poder-se-ia supor que em economias instáveis, com altas taxas de inflação, toda a informação disponível aos indivíduos não seria suficiente para dissipar totalmente a incerteza acerca das condições econômicas futuras.

Como se mencionou, a diferença entre os modelos de Barro e de Martins está no fato de que no primeiro caso a preocupação dos membros de uma geração com o bem-estar de seus descendentes é modelada incluindo a escala de preferências destes na função de utilidade, enquanto no segundo caso o que aparece naquela função é o montante total de herança. Expressando o problema matematicamente, tem-se que:

$$\begin{cases} \underset{s_t, b_{t+1}}{Max}: \; U_t = U[c_t(t)] + (1+\theta)^{-1} U[c_t(t+1)] + \delta U[b_{t+1}] \\ Suj: c_t(t) + s_t = w_t + \dfrac{b_t}{(1+\eta)} \\ \quad c_t(t+1) + b_{t+1} = (1 + r_{t+1}) s_t \end{cases}$$

Resumindo, os agentes escolhem o nível de poupança e de heranças que irão deixar para maximizar a sua função de utilidade, na qual são valorizados o consumo de primeiro período, o consumo de segundo período devidamente descontado pela taxa de desconto intertemporal e o montante deixado de herança para o futuro. Este último é valorizado pela constante $\delta$, que exprime a preferência dos indivíduos pelo futuro. Quanto maior $\delta$, maior será a utilidade do legado doado.

As condições de primeira ordem do problema são expressas por:

$$-U'[c_t(t)] + (1+\theta)^{-1}(1 + r_{t+1})U'[c_t(t+1)] = 0 \tag{12}$$

$$-(1+\theta)^{-1} U'[c_t(t+1)] + \delta U'[b_{t+1}] = 0 \tag{13}$$

então:

$$\frac{U'[c_t(t)]}{\delta U'[b_{t+1}]} = (1 + r_{t+1}) \tag{14}$$

Isso quer dizer que o quociente entre a utilidade marginal do consumo de primeiro período e a da herança deve ser igual ao retorno do capital. A solução do problema leva às seguintes funções:

$$s_t = s(w_t, r_{t+1}, b_t)$$

$$b_{t+1} = b(w_t, r_{t+1}, b_t)$$

Quando são levadas em conta a segunda restrição do problema e as condições de equilíbrio do mercado de produto, isto é, $s_t = (1+n)k_{t+1}$, e do mercado de fatores, ou seja, $r_t = f'(k_t)$ e $w_t = f(k_t) - k_t f'(k_t)$, chega-se a:

$$b_t = \varphi(k_{t+1}) \tag{15}$$

$$k_{t+1} = \frac{s(f(k_t) - k_t f'(k_t), f'(k_{t+1}), b(k_{t+1}))}{1 + \eta} \tag{16}$$

$$b_{t+1} = b(f(k_t) - k_t f'(k_t), f'(k_{t+1}), b(k_{t+1})) \tag{17}$$

A solução, obtida a partir do sistema de equações formado por (15), (16) e (17), fornece uma trajetória de crescimento do estoque de capital *per capita*, na qual $k_{t+1}$ depende somente de $k_t$.

No intuito de exemplificar será utilizado um modelo simples, que capta o centro do problema sem introduzir algebrismos em demasia. Em primeiro lugar, não há consumo no segundo período, portanto os indivíduos poupam tão-somente para deixar heranças aos seus sucessores. Essa hipótese, que à primeira vista parece bastante restritiva, na verdade não influi decisivamente no *core* do problema, uma vez que essa estrutura já é suficiente para estabelecer o dilema de cada agente: consumir no presente ou deixar recursos para o futuro.

Além disso, supõe-se que os agentes poupam diretamente sob a forma de capital e que suas funções de utilidade Cobb-Douglas incorporam o “motivo herança absoluto”. A função de produção *per capita* também é uma Cobb-Douglas, com parâmetro $\alpha$, tal que $0 < \alpha < 1$. Neste caso, o problema pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{cases} \underset{k_t,\, b_{t+1}}{Max}: V_t = \log c_t + \delta \log b_{t+1} \\ Sub: c_t(t) + k_t = \dfrac{b_t}{1+\eta} + w_t \\ \qquad b_{t+1} = (1+r_t)k_t \end{cases}$$

Cuja solução está descrita pela equação (18):

$$k_{t+1} = \frac{\delta(k_t + k_t^{\alpha})}{(1+\delta)(1+\eta)} \tag{18}$$

A obtenção da trajetória do estoque de capital *per capita* é direta, uma vez que a solução da equação (18) é relativamente simples. Para se encontrar a solução de *steady state* dessa variável faz-se $k_{t+1} = k_t = k_{t-1} = k^*$, então:

$$k^* = \left[\frac{\delta}{1+\eta(1+\delta)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{19}$$

O nível de *steady state* do estoque de capital varia inversamente à taxa de crescimento populacional e diretamente ao *capital share* da economia (representado pelo parâmetro $\alpha$) e ao parâmetro de valorização do futuro, $\delta$. Afinal, quanto maior for a taxa de expansão populacional, maior será a parcela da produção destinada a manter o estoque de capital *per capita*, menos restando à expansão deste. Por outro lado, quanto maior o parâmetro $\alpha$, mais produtivo é o capital, dado um determinado montante de trabalho, sendo então mais proveitosa a sua acumulação. Por fim, o parâmetro $\delta$ afeta positivamente o estoque de capital *per capita* de *steady state* porque representa a disposição de os agentes deixarem heranças. Quanto maior for tal disposição, menor será o consumo e maior a poupança acumulada.

A inclusão de um sistema previdenciário por repartição no modelo de Martins provoca resultados diferentes daqueles obtidos pela instauração desse tipo de redistribuição institucional nos modelos anteriormente estudados.

Em primeiro lugar, constata-se que a *equivalência ricardiana* não vigora nesse tipo de formulação e a existência de previdência por repartição causa redução no estoque de capital de *steady state*. Esses dois efeitos a diferenciam do modelo de Barro. Por outro lado, a existência de heranças e o incremento destas na presença de esquemas previdenciários por repartição também tornam esse tipo de modelo diferente daqueles à Diamond. Para explicitar essas diferenças, um novo problema deve ser montado com as restrições adequadas:

$$\begin{cases} \underset{s_t,\, b_{t+1}}{Max:} \; U_t = U[c_t(t)] + (1+\theta)^{-1} U[c_t(t+1)] + \delta U[b_{t+1}] \\ S_t : c_t(t) + s_t + d_t = w_t + \dfrac{b_t}{(1+\eta)} \\ c_t(t+1) + b_{t+1} = (1+r_{t+1})s_t + (1+\eta)d_{t+1} \end{cases}$$

Aqui as condições de primeira ordem podem ser descritas por:[9]

$$-U_1'\left[w_t + \frac{b_t}{(1+\eta)} - s_t - d_t\right] + (1+\theta)^{-1}(1+r_{t+1})U_2'[(1+r_{t+1})s_t + (1+\eta)d_{t+1} - b_{t+1}] = 0 \quad (20)$$

$$-(1+\theta)^{-1}U_2'[(1+r_{t+1})s_t + (1+\eta)d_{t+1} - b_{t+1}] + \delta U_3'[b_{t+1}] = 0 \quad (21)$$

Se houver um aumento da taxa previdenciária no período $t+1$, os indivíduos da geração $t$, que já pagaram sua cota no período $t$, terão os seus recebimentos $(1+\eta)d_{t+1}$ ampliados, sem a contrapartida de uma contribuição maior. Para calcular o efeito dessa modificação de alíquota sobre as heranças deixadas deve-se diferenciar em (20), $b_{t+1}$ em relação a $d_{t+1}$. Assim:

$$(1+\theta)^{-1}\left[(1+\eta) - \frac{\partial b_{t+1}}{\partial d_{t+1}}\right]U_2'' = \delta U_3'' \frac{\partial b_{t+1}}{\partial d_{t+1}} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial b_{t+1}}{\partial d_{t+1}} = (1+\eta)\frac{U_2''}{U_2'' + \delta(1+\theta)U_3''} \quad (22)$$

Como $\delta(1+\theta) > 0$ e a suposição de normalidade para os consumos e para a doação de heranças leva a utilidades marginais decrescentes, então, pode-se afirmar que:

$$0 < \frac{\partial b_{t+1}}{\partial d_{t+1}} < (1+\eta)$$

9 $U'_1$, $U'_2$ e $U'_3$ representam as derivadas da função de utilidade com relação ao consumo de primeiro período, ao consumo de segundo período e ao montante de heranças deixadas, respectivamente.

Isso significa que as heranças são ampliadas, mas em um montante insuficiente para compensar o aumento da taxação previdenciária, pois supor que cada indivíduo da geração $t-1$ terá um aumento de uma unidade no seu benefício previdenciário significa que cada indivíduo da geração $t$ sofrerá um acréscimo de $(1+\eta)$ unidades em sua contribuição.

Dessa forma fica claro que a *equivalência ricardiana* não vigora nesse caso, porque a ação do governo, representada por um aumento nas alíquotas de previdência, será compensada apenas parcialmente pelos agentes privados.

Para averiguar o efeito da previdência por repartição na acumulação de capital deve-se considerar a equação (14). Tomando-se essa equação em *steady state* e se o desconto previdenciário for constante, o efeito de uma variação marginal deste sobre o nível de poupança poderá ser descrito por:

$$U'\left[w_t + \frac{b_t}{(1+\eta)} - s_t - d\right] = \delta(1+r_{t+1})U'[(1+r_{t+1})s_t + (1+\eta)d - c_t(t+1)]$$

$$\Rightarrow \frac{\partial s_t}{\partial d} = -\frac{U_1'' + \delta(1+r_{t+1})(1+\eta)U_3''}{U_1'' + \delta(1+r_{t+1})^2 U_3''}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial k_{t+1}}{\partial d} = -\left(\frac{1}{1+\eta}\right)\left(\frac{U_1'' + \delta(1+r_{t+1})(1+\eta)U_3''}{U_1'' + \delta(1+r_{t+1})^2 U_3''}\right) \tag{23}$$

Logo, segundo a equação (23), o efeito sobre a acumulação de capital é mais uma vez depressivo quando o sistema econômico está funcionando sob um regime de previdência por repartição. Como no caso do modelo Diamond, a proporcionalidade entre as variações na taxa de previdência e no nível de poupança será determinada pela relação entre a produtividade marginal do capital e a taxa de crescimento populacional. Se a primeira for maior do que a segunda, alterações no desconto previdenciário acarretarão diminuições menos que proporcionais na poupança, caso contrário, incrementos na taxa de previdência causarão quedas mais do que proporcionais no nível de poupança.

## 4 - Simulações

Nesta seção serão simulados os três modelos discutidos anteriormente. Em dois deles, será incorporado o funcionamento da previdência por repartição. Para tanto, serão especificadas as funções de utilidade dos agentes em cada um dos casos, bem como a função de produção que descreve a tecnologia disponível na economia. A utilização de funções do tipo Cobb-Douglas, em ambos os casos, deve-se ao tratamento matemático relativamente simples que essa família de funções requer, associado às suas características de concavidade e monotonicidade crescente.

O objetivo deste exercício é melhor descrever o funcionamento de cada um dos modelos apreciados, bem como estabelecer os pontos de ligação e as diferenças entre eles, em especial no que diz respeito ao funcionamento da previdência social por repartição e suas repercussões sobre a acumulação de capital.

O método básico para a realização das simulações dos modelos do tipo Diamond está descrito em Auerbach e Kotlikoff (1987). Ainda a respeito dessa família de modelos, Corsetti e Schmidt-Hebbel (1994) realizaram simulações para o caso chileno e concluíram que se poderia esperar um incremento substancial nas taxas de crescimento econômico de longo prazo, provocado pela reforma do sistema previdenciário daquele país.[10] Já Barreto e Oliveira (1995), em estimativas preliminares para o Brasil, apontam para uma maior eficiência do sistema de capitalização em termos da relação contribuição/benefício.

Simulações do modelo de Martins podem ser encontradas em Martins (1994) e (1995), as quais são utilizadas para estudar o comportamento de variáveis reais e nominais do sistema econômico. No caso dos modelos com "motivo herança puro", Barro e Sala-i-Martin (1995) realizam simulações com um modelo contínuo, sem contudo resolver diretamente o sistema de equações diferenciais dele originada. Em vez disso, os autores optam por uma solução aproximada a partir da sua log-linearização e da análise subseqüente de suas propriedades na vizinhança do equilíbrio estacionário.

O modelo de Barro, mesmo quando especificado da forma mais simples, produz trajetórias para o estoque de capital *per capita* descritas por equações em diferenças de resolução extremamente complexa. Não obstante, a primeira simulação realizada nesta seção terá como objeto essa formulação. Para tal, são duas as principais motivações. A primeira — ao reconhecer que o modelo de OLG com "motivo herança puro" corresponde ao modelo de vida infinita,[11] que, por sua vez, é considerado um paradigma da ciência econômica atual, infere-se que o contraste com outros modelos é uma forma útil de comparar as capacidades de acumulação destes contra um modelo de vida infinita.

Na segunda, merece destaque a técnica que será utilizada na simulação. Utilizando mais uma vez a correspondência entre os problemas de vida finita e infinita, o modelo é

---

10 Como se sabe, no Chile a previdência migrou do sistema de repartição para o sistema de capitalização, que, no modelo de Diamond, é neutro quanto à acumulação de capital (conforme Seção 2).

11 Para mais detalhes sobre a correspondência entre o modelo contínuo de Ramsey e o modelo com função de utilidade recursiva, ver Mas-Colell, Whinston e Green (1995, Cap. 20).

resolvido no segundo caso, ou seja, na versão contínua do problema. Vale ressaltar que, diversamente do realizado por Barro e Sala-i-Martin (1995), que log-linearizam as equações diferenciais que fornecem as trajetórias das variáveis e as examinam na vizinhança do *steady state*, aqui se procederá, com apoio computacional, à resolução completa de tais equações, de forma que será possível estabelecer todo o percurso das variáveis até o equilíbrio estacionário.[12] Com esse intuito, o problema é descrito como se segue (já levando em conta as funções de utilidade e produção específicas):[13]

$$\begin{cases} Max\colon \int_0^{\infty} \log[c(v)]e^{-Rv}dv \\ Suj\colon \dot{k} = k(t)^{\alpha} - c(t) - \eta k(t) \end{cases}$$

onde $f[k(t)] = k(t)^{\alpha}$ e $U[c(t)] = \log[c(t)]e^{-Rt}$ são, respectivamente, as versões contínuas da função de produção e da função de utilidade dos indivíduos.

Deve ser reconhecido que a utilização de $R$ como taxa de desconto intertemporal significa uma pequena diferença em relação ao resultado do modelo com vida finita, já que a taxa de desconto do consumo do segundo período $\theta$ está sendo desprezada. Trata-se de um problema de programação dinâmica que pode ser resolvido com o auxílio do seguinte hamiltoniano:

$$H(t) = e^{-Rt}\log[c(t)] - \mu(t)[k(t)^{\alpha} - c(t) - \eta k(t)] \tag{24}$$

cujas condições de máximo resultam nas seguintes equações:

$$\frac{\partial\lambda(t)}{\partial t} = \lambda(t)(R + \eta - \alpha k^{\alpha-1}) \tag{25}$$

$$\lambda(t) = \frac{1}{c(t)} \tag{26}$$

onde $\lambda(t) = \mu(t)e^{Rt}$. Como, a partir da restrição, sabe-se que $c(t) = k(t)^{\alpha} - \eta k(t)$, resulta a seguinte equação diferencial:

$$\frac{\partial k(t)}{\partial t} = \frac{\alpha k(t)^{2\alpha-1} - [R + \eta(1+\alpha)]k(t)^{\alpha} + \eta(\eta + R)k(t)}{\alpha k(t)^{\alpha-1} - \eta} \tag{27}$$

---

12 Na verdade, neste modelo as variáveis não atingem o *steady state*, mas se aproximam assintoticamente dele.

13 Esta formulação é conhecida na literatura como "problema de Ramsey".

A resolução dessa equação fornece a trajetória do estoque de capital *per capita* em função do tempo. Além disso, mesmo sem resolvê-la, é possível determinar por seu intermédio o nível de capital *per capita* de *steady state*. Para tanto, basta lembrar que, em equilíbrio, $\partial k(t) / \partial t = 0$, então:

$$\Rightarrow k^* = \left[\frac{\alpha}{R+\eta}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{28}$$

onde $k^*$ é o estoque de capital *per capita* de equilíbrio.

Voltando à equação (27), constata-se que ela é uma equação diferencial de variáveis separáveis. Então a sua resolução se dá como se segue:

$$\int \frac{\alpha k(t)^{\alpha-1} - \eta}{\alpha k(t)^{2\alpha-1} - [R+\eta(1+\alpha)]k(t)^{\alpha} + \eta(\eta+R)k(t)} dk = \int dt + A$$

onde $A$ é uma constante.

Para proceder à integração do membro do lado esquerdo da igualdade, utilizou-se o programa Mathcad 5.0 Plus. Obteve-se então a seguinte equação:

$$\frac{\ln[k(t)^{\alpha} - \eta k(t)]}{\alpha\eta - (\eta+R)} - \frac{\alpha \ln[k(t)]}{(\alpha-1)(\eta+R)} -$$

$$- \frac{\alpha R \ln[\alpha k(t)^{\alpha} - (\eta+R)k(t)]}{\eta[R(\alpha^2 - 3\alpha) + \eta(\alpha^2 - 2\alpha)] - \alpha R^2 + (n+R)^2} = Bt \tag{29}$$

onde $B$ é também uma constante.

Para traçar a trajetória de $k$ em função do tempo, deve-se, pois, apelar para o cálculo numérico. São arbitrados valores seqüenciais para $t$ e, utilizando-se recursos computacionais,[14] encontram-se valores de $k$ tal que a equação (29) seja satisfeita para valor de $t$. Esses pares são então tabulados, obtendo-se a trajetória de convergência para o *steady state*.

Foram estabelecidos os seguintes parâmetros como base: capital inicial, $k_0 = 0{,}01$; taxa de desconto das utilidades das gerações futuras, $R = 0{,}05$; taxa de crescimento populacional, $\eta = 0$; e proporção da renda destinada ao fator capital (*capital share*),

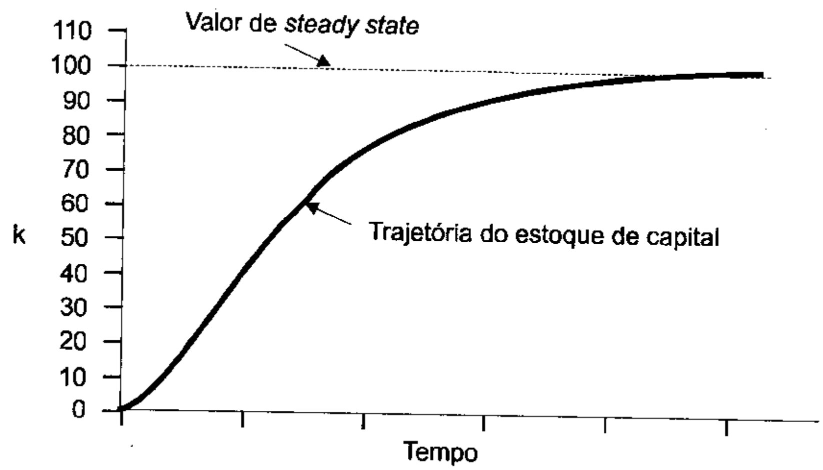
---

14 Nas simulações contidas neste trabalho, utilizou-se especificamente o recurso *atingir meta* do programa Excel 7.0.

$\alpha = 0{,}5$. O valor de *steady state* para o estoque de capital *per capita* pode ser calculado a partir da equação (28). Esse atinge $k^* = 100$.[15] O Gráfico 1 representa a trajetória dessa variável em direção ao equilíbrio estacionário.

Como neste modelo ocorre a *equivalência ricardiana*, então a inclusão de previdência por repartição não altera os seus resultados. Portanto, o Gráfico 1 representa também a trajetória do estoque de capital *per capita* na presença desse esquema previdenciário, ou seja, é como se não houvesse previdência.

Gráfico 1
**Trajetória do estoque de capital *per capita* em direção ao *steady state* — modelo de Barro**
(Parâmetros: $\eta = 0$; $\alpha = 0{,}5$; $R = 0{,}05$; $k_0 = 0{,}01$; $k^* = 100$)




O próximo exercício será a simulação do modelo de Martins. Nela, será utilizada a versão discreta da função de produção que foi adotada no exercício anterior, ou seja, $y_t = f(k_t) = k_t^{\alpha}$ com $\alpha \in (0,1)$. A função de utilidade, por sua vez, deverá ser modificada para que seja possível incorporar o "motivo herança absoluto" e para que se possa retomar uma versão discreta. Assim, $U_t = \log[c_t(t)] + (1+\theta)^{-1}\log[c_t(t+1)] + \delta \log[b_{t+1}]$, com $\theta > 0$. A inclusão da previdência por repartição no modelo é realizada mediante especificação adequada das restrições orçamentárias, que passam a incorporar o funcionamento do sistema previdenciário. No entanto, para essas simulações, o sistema funcionará de forma diferente daquela que foi estabelecida nas outras seções. Aqui, no

15 O resultado não é simples coincidência, uma vez que os parâmetros foram calibrados para que isso ocorresse.

lugar de se supor que a contribuição para a previdência é estabelecida em um montante fixo, ela passa a ser uma proporção do salário auferido pela geração mais nova. O objetivo desse procedimento é tentar evitar que a acumulação de capital e o conseqüente incremento da renda *per capita* tornem insignificante o desconto previdenciário. As restrições podem ser reescritas como se segue:

$$c_t(t) + s_t + d_t = w_t + \frac{b_t}{1+\eta}$$

$$c_t(t+1) + b_{t+1} = (1 + r_{t+1})s_t + (1+\eta)d_{t+1}$$

Como $d_t = dw_t$, onde $d$ agora é a alíquota previdenciária, isto é, a percentagem do salário que será descontada a título de contribuição, tem-se o novo problema individual, ou seja,

$$\begin{cases} Max{:}U_t = \log[c_t(t)] + (1+\theta)^{-1}\log[c_t(t+1)] + \delta\log[b_{t+1}] \\ Suj{:}c_t(t) + s_t = (1-d)w_t + \dfrac{b_t}{1+\eta} \\ c_t(t+1) + b_{t+1} = (1+r_{t+1})s_t + d(1+\eta)w_{t+1} \end{cases}$$

cuja solução está descrita pela equação a diferenças (30).

$$\frac{[1+\delta+(1+\theta)^{-1}](k_{t+1} + \alpha k_{t+1}^{\alpha}) + d(1-\alpha)k_{t+1}^{\alpha}}{1+\alpha k_{t+1}^{\alpha-1}} =$$

$$\frac{\delta(k_t + k_t^{\alpha}) + (1-\alpha)(1-d)(1+\theta)^{-1}k_t^{\alpha}}{1+\eta} \tag{30}$$

A generalidade dessa solução pode ser apreciada a partir da simples manipulação dos parâmetros. Por exemplo, para que se obtenha a solução sem previdência, basta que se iguale $d$ a zero. Fazendo isso, obtém-se a equação (31) abaixo.

$$k_{t+1} = \frac{\delta(k_t + k_t^{\alpha}) + (1-\alpha)(1+\theta)^{-1}k_t^{\alpha}}{(1+\eta)[1+\delta+(1+\theta)^{-1}]} \tag{31}$$

A partir de (31) e de um estoque de capital inicial, é possível simular a trajetória do sistema econômico, bastando para tanto inserir tal estoque inicial em (31), obtendo-se, dessa forma, o estoque de capital do próximo período que realimentará mais uma vez o processo. Ela também permite o cálculo do estoque de capital *per capita* de *steady state*. Para isso, basta fazer $k_t = k_{t+1} = k^*$. Portanto, em *steady state*:

$$k^* = \left[ \frac{\delta + (1-\alpha)(1+\theta)^{-1}}{(1+\eta)[1+(1+\theta)^{-1}] + \eta\delta} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{32}$$

Com o intuito de comparar a trajetória proveniente do modelo da seção anterior com a obtida neste modelo, deve-se suprimir o consumo de segundo período dos agentes, pois, como foi ressaltado anteriormente, naquele modelo os agentes só consumiam em um período. Para tanto, faz-se crescer indefinidamente o desconto ao qual é submetido o consumo de segundo período. Quando o parâmetro $\theta$ tende ao infinito, obtém-se a partir de (31):

$$k_{t+1} = \frac{\delta[k_t + k_t^{\alpha}]}{(1+\eta)(1+\delta)} \tag{33}$$

cujo *steady state* é:

$$k^* = \left[ \frac{\delta}{1+\eta(1+\delta)} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{34}$$

O Gráfico 2 compara as trajetórias obtidas nos dois modelos. Os valores de *steady state* são iguais, pois $\delta$ foi tomado tal que $\delta = \alpha / R = 10$ e utilizou-se crescimento populacional nulo.

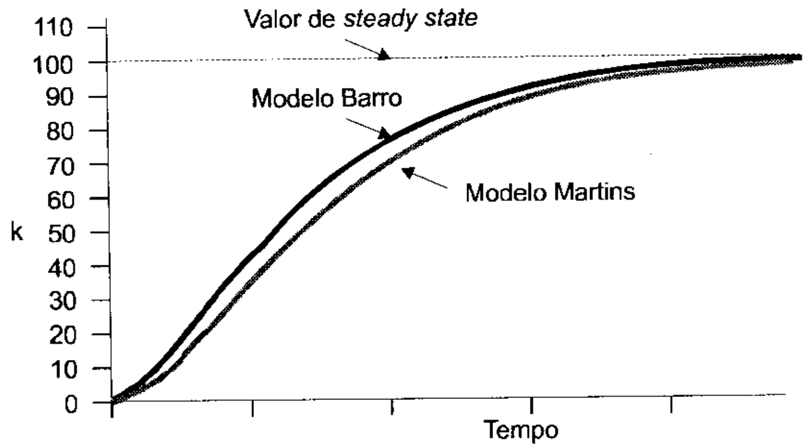
O fato de a trajetória do modelo de Martins estar sempre abaixo daquela descrita pelo modelo de Barro significa que o primeiro converge mais lentamente para o equilíbrio estacionário. Matematicamente, isso se deve à diferença entre os horizontes de planejamento. O resultado da programação com horizonte infinito sempre domina o resultado da programação com horizonte finito.

A interpretação econômica subjacente é a de que, no modelo de Martins, os agentes estão sempre considerando a taxa de juros de longo prazo, enquanto no caso do modelo de Barro é levada em conta toda a trajetória das taxas de juros. Se o modelo está acumulando capital, a trajetória das taxas de juros situar-se-á sempre acima da taxa de juros de longo prazo. Isso mostra que existe estímulo à acumulação mais rápida no segundo caso.

Gráfico 2

**Trajetória do estoque de capital *per capita* em direção ao *steady state* — modelos de Barro e de Martins**

(Parâmetros: $\eta = 0$; $\alpha = 0{,}5$; $R = 0{,}05$; $\delta = 10$; $k_0 = 0{,}01$; $k^* = 100$; $\theta \to \infty$ )



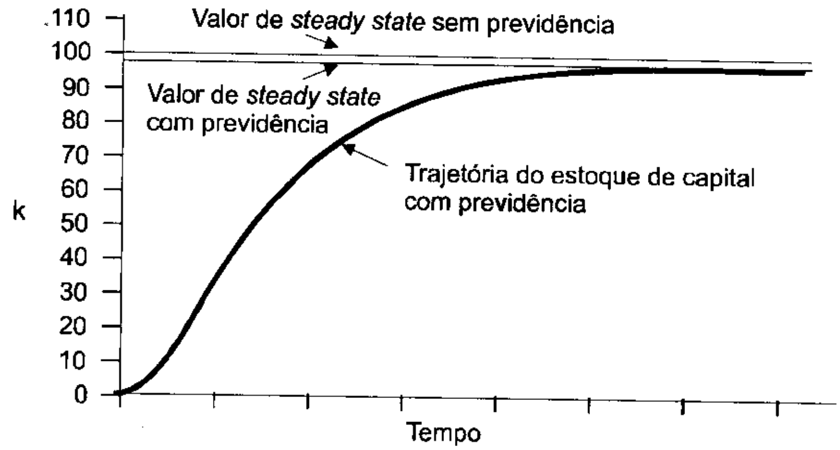

Para contemplar os efeitos da introdução da previdência, é necessário retornar à equação (30). Considerando-se $d \neq 0$ e $\theta \to \infty$, obtém-se:

$$k_{t+1} = \frac{\delta(k_t + k_t^{\alpha})}{(1+\delta)(1+\eta)} - \frac{(1-\alpha)k_{t+1}^{\alpha}}{(1+\delta)(1+\alpha k_{t+1}^{\alpha-1})}d \qquad (35)$$

Mais uma vez são necessários recursos computacionais para a determinação da trajetória de $k$ obtida. O Gráfico 3 descreve a trajetória quando o sistema econômico convive com uma alíquota de previdência de 20% incidente sobre o salário. Os demais parâmetros são mantidos.

Um fato interessante pode ser depreendido da equação (35). Quanto maior for o estoque de capital *per capita* de *steady state*, menor será a redução percentual em tal variável ocasionada pela introdução da previdência social. Isso pode ser constatado pelo crescimento amortecido do membro negativo daquela equação em relação ao crescimento do estoque de capital. No exemplo anterior, a introdução da previdência reduz o capital de equilíbrio em 1,92% (de 100 para 98,08), ao passo que, tomando-se o estoque de capital *per capita* de *steady state* de 25 unidades, a introdução da previdência com alíquota de 20% sobre os salários provocaria uma redução de 3,6% nesse estoque (de 25 para 24,1). Por outro lado, se $k^*$ for fixado em 400 unidades, a implementação de seguridade social irá reduzi-lo em menos de um ponto percentual (de 400 para 396,03).

Gráfico 3
**Trajetória do estoque de capital *per capita* em direção ao *steady state* — modelo de Martins com previdência**
(Parâmetros: $\eta = 0$; $\alpha = 0{,}5$; $\delta = 10$; $d = 0{,}2$, $k_0 = 0{,}01$; $k^* = 100$; $\theta \to \infty$)




Naturalmente, quanto maiores as alíquotas previdenciárias, menores os estoques de capital de *steady state*. Esse fato, comprovado pela equação (23) da seção anterior, é representado no Gráfico 4.

Voltando novamente à equação (30), se o parâmetro $\delta$ for igualado a zero, obtém-se o modelo de Diamond, no qual os agentes não valorizam as gerações futuras. Isso caracteriza o modelo de Diamond como um caso particular do modelo de Martins. As equações (36) e (37) descrevem, respectivamente, os casos sem e com previdência.

$$k_{t+1} = \frac{(1-\alpha)k_t^{\alpha}}{(1+\eta)(2+\theta)} \tag{36}$$

$$k_{t+1} = \frac{(1-\alpha)(1-d)(1+\theta)^{-1}\,k_t^{\alpha}}{(1+\eta)[1+(1+\theta)^{-1}]} - \frac{(1-\alpha)\,k_{t+1}^{\alpha}}{(1+\alpha\, k_{t+1}^{\alpha-1})[1+\theta)^{-1}]}\,d \tag{37}$$

As simulações dos dois casos, em que se utiliza o parâmetro $\theta = 0{,}05$ e a alíquota previdenciária $d = 20\%$, estão descritas no Gráfico 5.

Gráfico 4

**Trajetória do estoque de capital *per capita* em direção ao *steady state* — modelo de Martins com várias alíquotas de previdência**

(Parâmetros: $\eta = 0$; $\alpha = 0,5$; $\delta = 10$; $d = 0,2$; $k_0 = 0,01$; $k^* = 100$; $\theta \rightarrow \infty$)

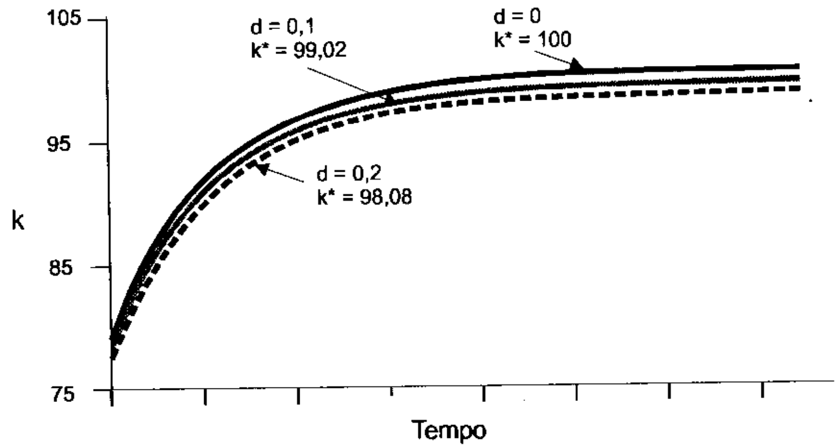
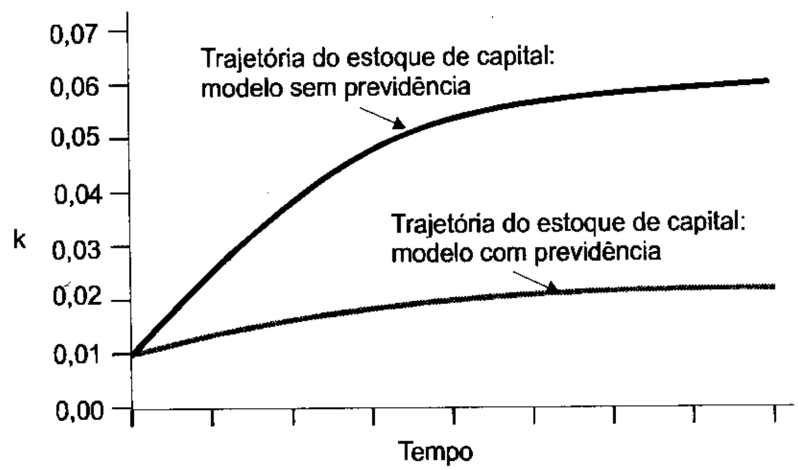



Gráfico 5

**Trajetória do estoque de capital *per capita* — modelo de Diamond com e sem previdência por repartição**

(Parâmetros: $\eta = 0$; $\alpha = 0,5$; $\theta = 0,05$; $d = 0,2$; $k_0 = 0,01$; $k^* = 0,059$; $k_p^* = 0,038$)



Dois fatos são marcantes na simulação. O primeiro deles é a violenta diminuição na acumulação de capital provocada pela previdência social. Enquanto no modelo de Martins observam-se reduções de cerca de 4%, aqui a redução foi superior a 35% no estoque de capital *per capita* de *steady state*. Isso mostra que tais modelos, que cada vez mais vêm sendo utilizados para estimar os ganhos de poupança e de renda oriundos de reformas previdenciárias que substituem o método de repartição pelo de capitalização, podem estar superestimando os efeitos a serem obtidos.

Por outro lado, cabe destacar a pequena capacidade acumulativa do modelo. Nos modelos com "motivo herança puro" e com "motivo herança absoluto", facilmente pode-se atingir marcas centenárias na acumulação de capital; aqui essa variável fica restrita às casas decimais.[16] Parece uma ironia conceitual falar em sobreacumulação neste modelo que, na verdade, acumula muito menos que outros nos quais tal fenômeno não se apresenta.

## 5 - Resultados empíricos

Atualmente, o debate acerca dos efeitos depressores da previdência social por repartição sobre a poupança e sobre a acumulação de capital vem adquirindo um caráter empírico cada vez maior. Na verdade, quando se testa se a seguridade social afeta negativamente o nível de poupança e a formação de capital, verifica-se paralelamente se os indivíduos incorporam a preocupação com seus sucessores em suas preferências ou comportam-se como agentes *introvertidos* do tipo Diamond. Em outras palavras, ao se realizar esse teste a *equivalência ricardiana* é posta à prova.

O primeiro teste realizado com esse intuito foi o de Feldstein (1974). Utilizando um modelo de ciclo de vida estendido, o trabalho estima o efeito da seguridade social sobre a poupança realizada na fase produtiva dos indivíduos, isto é, sobre o que eles acumulam antes da aposentadoria. Para tanto, é utilizada uma equação que associa o consumo dos indivíduos nesta fase à renda permanente, à riqueza, aos lucros retidos pelas empresas e ao que é denominado *social security wealth*, variável que mensura o valor atual dos recebimentos futuros que os agentes farão jus ao se aposentar. A série de dados utilizados refere-se aos Estados Unidos e vai de 1929 a 1971, mas os dados referentes ao período compreendido entre 1941 e 1946 são excluídos em virtude da participação norte-americana na Segunda Guerra Mundial, nessa época.

Os resultados apontam para uma diminuição da poupança pessoal, no período ativo, de cerca de 50 pontos percentuais, o que supõe a redução do nível de estoque de capital em *steady state*.[17] As estimativas também indicam maior propensão ao consumo

---

16 Na verdade poder-se-ia aumentar a capacidade de acumulação deste modelo mediante utilização de uma função de produção tipo $Y = Ak^{\alpha}$, onde $A$ é uma constante. Contudo, descartando-se o efeito multiplicativo advindo, pode-se analisar de forma mais clara a capacidade de acumulação do modelo por si só.

17 "The evidence that the social security program approximately haves the personal savings rate implies that it substantially reduces the stock of capital and the level of national income" [ver Feldstein (1974, p. 922)].

associado à *social security wealth* que às outras formas de riqueza ou à renda permanente. Em suma, o trabalho caracteriza a *social security wealth* como substituta da poupança individual nos anos produtivos.

Outros testes posteriores, como os contidos em Munnell (1976) e Feldstein (1996), produziram resultados no mesmo sentido. No primeiro, a partir de uma amostra de 5 mil pessoas, com idades entre 45 e 59 anos, em 1966, é determinada a substituibilidade imperfeita entre a *social security wealth* e a poupança privada individual, no período antes da aposentadoria. Os resultados implicaram que tal substituibilidade é mais imperfeita quando se trata de fundos privados de pensão, os quais seriam menos críveis que a seguridade social oficial e, portanto, induziriam uma redução de poupança menor. É interessante notar que nesse caso a poupança agregada cresceria se fosse implementado um plano de aposentadoria por capitalização obrigatório.

O contraponto a esses experimentos é dado por Barro e MacDonald (1979). No texto é realizada uma análise tipo *cross-country* com dados relativos a 16 países industrializados. Supondo que os testes anteriores atribuíam ao governo o monopólio das transferências intergeracionais por meio da seguridade social, desprezar-se-ia uma importante fonte de transmissão de riqueza, que são as heranças privadas. Se estas forem consideradas, o ponto central da discussão deixaria de ser a relação entre a seguridade social e a poupança amealhada antes da aposentadoria, pois, nesse caso, o fundamental seria a interação entre a previdência e a poupança agregada. Isso porque, mesmo que a poupança pré-aposentadoria diminuísse, a atenção que os indivíduos dão ao bem-estar de seus sucessores, expressa pelo acolhimento da utilidade destes nas preferências dos primeiros, levaria a um aumento da poupança no período pós-aposentadoria, com vista à transmissão de heranças. Contudo, os testes não são conclusivos para sustentar a hipótese de que a seguridade social não deprime a poupança agregada e nem tampouco para refutar a hipótese contrária.

O modelo de Martins ainda não foi testado empiricamente, mas esses resultados inconclusivos nos testes dos outros modelos sugerem que ele pode ser uma alternativa para a estimação dos efeitos da previdência por repartição sobre a formação de poupança e a acumulação de capital.

## 6 - Conclusões

Neste trabalho foram estudadas as implicações econômicas da previdência social no contexto do modelo de gerações superpostas (OLG) de Samuelson (1958) e Diamond (1965). Para tanto, utilizaram-se três versões desses modelos, as quais se diferenciam pela maneira como cada uma incorpora a demanda por capital dos agentes. Na primeira delas, graças a Diamond (1965), os agentes não se preocupam com as gerações futuras; na segunda, de Barro (1974), os agentes possuem o chamado "motivo herança puro;" e na terceira, de Martins (1995), o "motivo herança absoluto". Os efeitos da previdência sobre a acumulação de capital foram objeto de especial exame.

A realização das simulações requereu a utilização dos programas Excel 7.0 e MathCad 5.0 Plus. Os modelos de Diamond e de Martins foram simulados a partir de versões discretas, enquanto para o de Barro utilizou-se uma versão contínua. Nesta última simulação descreveu-se toda a trajetória da economia e não apenas o comportamento das variáveis na vizinhança do *steady state*, como fazem Barro e Sala-i-Martin (1995).

Concluiu-se que a trajetória descrita pelo modelo de Barro domina a do modelo de Martins. Esse fato foi atribuído às diferentes taxas de juros defrontadas pelos agentes em cada um dos casos. Por outro lado, caracterizou-se o modelo de Diamond como um *caso particular* do modelo de Martins. Tal conclusão foi obtida a partir da comparação das equações de equilíbrio dos dois modelos.

Demonstrou-se nas simulações a baixa capacidade de acumulação do modelo de Diamond quando comparada com as dos modelos de Barro e de Martins. Apontou-se a ambigüidade conceitual da *sobreacumulação*, uma vez que se detectou esse fenômeno apenas no modelo com menor capacidade acumulativa.

Quando a previdência social por repartição foi introduzida, constataram-se reduções no nível de *steady state* do capital *per capita* nos modelos de Diamond e de Martins. Pode-se verificar que o declínio foi mais acentuado no modelo de Diamond, ao passo que no modelo de Martins a diminuição é proporcionalmente menor à medida que são tomados valores mais altos para o equilíbrio estacionário.

No modelo de Barro não há redução do estoque de capital de *steady state*. Esse fato é explicado pela propriedade de *equivalência ricardiana*, a qual emerge do modelo de Barro. Nessa formulação, os beneficiários da previdência social ressarcem integralmente os contribuintes do sistema por meio da ampliação das heranças doadas. No caso do modelo de Martins, tal indenização é parcial e no de Diamond, inexistente.

Para sintetizar as principais características de cada modelo, dir-se-ia que no modelo de Diamond ocorre um decréscimo na acumulação de capital quando há um sistema de previdência social por repartição, porém esse modelo não lida com a formação de heranças. Já o modelo de Barro incorpora a existência de transferências intergeracionais e a previdência por repartição é inócua em relação à poupança. Por fim, o modelo de Martins concilia o efeito redutor sobre a acumulação de capital da previdência por repartição com a existência de heranças.

A adoção de um ou outro modelo tem sérias implicações nas formulações de política econômica e, em especial, nos resultados que se esperam de uma reforma no sistema previdenciário. No modelo de Diamond, uma migração do sistema de repartição para o de capitalização poderia aumentar o estoque de capital da economia, mas não necessariamente ampliaria o bem-estar, pois poderia levar o sistema econômico a um estado de ineficiência dinâmica. Sob a perspectiva do modelo de Barro, essa reforma seria incapaz de ampliar o estoque de capital da economia, porque os agentes privados compensariam por completo a redistribuição intergeracional de riqueza promovida pelo governo. Já no modelo de Martins, uma reforma desse teor aumentaria a acumulação de capital, mas não necessariamente ampliaria o bem-estar, pois nesse caso haveria um decréscimo nas heranças doadas. De qualquer forma, o incremento da poupança gerado no modelo de Diamond estaria amplamente superestimado quando contrastado com o que se obteve a partir do modelo de Martins.

**Abstract**

*This paper investigates the economic implications of social security systems within the framework of the overlapping generations model (OLG) and exemplifies them thourgh simulations. Three versions of the OLG model are used with this purpose and each of them has its own especific way of incorporating the agent's, demand for capital. The results obtained make clear the strong influence that the various specifications of the agent's, demand for capital. Have on both capital accumulation and the existente of the ricardian equivalence.*

## Bibliografia

ANDREONI, J. Giving with impure altruism: applications to charity and Richardian equivalence. *Journal of Political Economy,* v. 97, n. 6, p. 1.447-1.458, 1989.

ARAUJO, J. T., MARTINS, M. A. C. *Growth national debt, and Fiat money in an AK model with finite lifetimes.* [S.l.: s.n.], 1996, mimeo.

ARRAU, P., SCHMIDT-HEBBEL, K. Macroeconomic and intergeracional welfare effectes of transition from pay-as-you-go to fully-funded pensions systems. In: Latin America Meeting of the Econometric Society, 22. *Proceedings...* [S.l.: s.n.], 1993.

ATKINSON, A. B. Capital taxes, the redistribuition of wealth and individual savings. *Review of Economic Studies*, v. 38, n. 2, n. 114, p. 209-227, 1971.

AUERBACH, A. J., KOTLIKOFF, L. J. *Dynamic fiscal policy.* 1.ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1987.

BARBOSA, F. H., MONDINO, G. El Sistema de Seguridad Social en Brasil: Por qué es importante reformalo. *Estudios.* [S.l.: s.n.], 1994.

BARRETO, F. A., OLIVEIRA, L. G. S. Aplicação de um modelo de gerações superpostas para a reforma da Previdência no Brasil: uma análise de sensibilidade no estado estacionário. In: Encontro Brasileiro de Econometria, 17. *Anais...* [S.l.: s.n.], v.1, p.71-91, 1995.

BARRO, R. J. *Are government bonds net wealth? Journal of Political Economy*, v.82, n.6, p.1.095-1.117, 1974.

BARRO, R. J., MACDONALD, G. M. Social security and consumer spending in a international cross section. *Journal of Public Economics*, v.11, p.275-289, 1979.

BARRO, R. J., SALA-I-MARTIN, X. *Economic growth.* New York: McGraw-Hill, 1995.

BERNHEIM, D. B., SHLEIFER, A., SUMMERS, L. H. The strategic bequest motive. *Journal of Political Economy*, v.93, n.6, p.1.045-1.076, 1985.

BLANCHARD, O. J., FISHER, S. *Lectures on macroeconomics*. 3.ed. Massachusets: The MIT Press, Caps. 2 e 3, 1989.

BLINDER, A. S. Distribution efects and aggregate consuption function. *Journal of Political Economy*. v.83, n.3, p. 447-475, 1975.

CORSETTI, G., SCHMIDT-HEBBEL, K. *Pension reform and growth*. [S.l.: s.n.], 1994, mimeo.

DIAMOND, P. A. *National debt in a neoclassical growth model. American Economic Review*, v.55, n.5, p.1.126-1.150, 1965.

FELDSTEIN, M. Social security and saving: new times series evidence. *National Tax Journal*, v.49, n.2, p.151-164, 1996.

——————. Social security, induced retirement and agregate capital accumulation. *Journal of Political Economy*, v.82, n.4, p.905-926, 1974.

KOTLIKOFF, L. J., SUMMERS, L. H. The role of intergerational transfers in aggregate capital accumulation. *Journal of Political Economy*, v.89, n.4, p.706-732, 1981.

MARTINS, M. A. C. A nominal theory of the nominal rate of interest and the price level. *Journal of Political Economy*, v.88, n.1, p.174-185, 1980.

——————. Bonds, interests and capital acumulation. *Revista Brasileira de Economia*, v.49, n.4, p.557-582, 1995.

MAS-COLLEL, A., WHINSTON, M. D., GREEN, J. R. *Microeconomic theory*. Oxford University Press, Cap. 20, 1995.

MESA-LAGO, C. *La reforma de la seguridad social y las pensiones en América Latina: importancia y evaluacion de las alternativas de privatizacion*. Santiago: Cepal, 1994 (Reformas de Política Pública, 28).

MUNNELL, A. H. Private pensions and saving: new evidence. *Journal of Political Economy*, v.84, n.5, p.1.013-1.032, 1976.

PESSOA, S. A. *Impacto sobre a renda* per capita *de longo prazo de um sistema de aposentadoria de repartição simples.* [S.l.: s.n.], 1996, mimeo.

SAMUELSON, P. A. An exact consumption model of interest with or without the social covariance of money. *Journal of Political Economy*, v.66, n.6, p.467-482, 1958.

SIMONSEN, M. H. *Dinâmica macroeconômica.* São Paulo: McGraw-Hill, Caps. 4 e 6, 1983.

VARIAN, H. R. *Microeconomic analisys.* 2.ed. New York: W. W. Norton, 1984.

*(Originais recebidos em outubro de 1997. Revistos em novembro de 1997.)*