

# Modelos de Volatilidade Estocástica com deformação temporal: um estudo empírico para o índice Ibovespa\*

FLÁVIO A. ZIEGELMANN\*\*  
PEDRO L. VALLS PEREIRA\*\*\*

*Estimar e prever a volatilidade de um ativo é de grande importância para os mercados financeiros. O objetivo deste artigo é incorporar o conceito de deformação temporal na estimação da volatilidade. Este conceito está associado à idéia de que o mercado financeiro se modifica com a chegada de novas informações e não com o decorrer do tempo calendário. Modelos de Volatilidade Estocástica sem e com deformação temporal são usados para estimar a volatilidade dos retornos do Ibovespa.*

## 1 - Volatilidade e características de dados financeiros

Prever a volatilidade de ativo de modo preciso é a chave para um bom sistema de gerenciamento de risco. Muitos sistemas de gerenciamento de risco possuem em seu âmago a necessidade destas previsões [ver Alexander (1996)].

A volatilidade nos indica se o preço de um ativo está variando pouco ou muito, ou seja, ela é uma medida da incerteza quanto às variações de preço. Os períodos em que a variabilidade dos preços está muito alta são aqueles que possibilitam os maiores lucros ou, também, as maiores perdas, isto é, são aqueles em que o risco é maior. Já quando a volatilidade é baixa, o risco é menor. A relação é óbvia e, naturalmente, um investidor somente assumiria uma posição de alto risco caso houvesse a possibilidade de um grande retorno. Assim, entre aqueles que assumem riscos, numa fase de alta volatilidade, os “bons” tornam-se melhores, enquanto os “ruins” tornam-se piores.

Dados financeiros apresentam certas características peculiares [ver, por exemplo, Taylor (1986) e Pagan (1993)]. Este é o caso dos retornos de ativos financeiros que podem ser definidos por  $y_t = \log x_t - \log x_{t-1}$  onde  $x_t$  é o preço do ativo no instante  $t$ . Os principais fatos estilizados (características) encontrados na literatura são os seguintes:

---

\* Os autores agradecem ao CNPq pelo suporte parcial a este projeto e a dois pareceristas desta revista pelos comentários.

\*\* Do Departamento de Estatística da UFRGS.

\*\*\*Do Departamento de Estatística da USP e do Instituto de Economia da Unicamp.

- a) os retornos não são autocorrelacionados;
- b) os quadrados dos retornos são autocorrelacionados, com uma pequena autocorrelação de primeira ordem e uma subsequente queda bastante lenta;
- c) existem agrupamentos com diferentes níveis de volatilidade;
- d) a distribuição não-condicional dos retornos possui caudas pesadas em relação à distribuição normal; e
- e) para alguns tipos de retornos, a volatilidade reage de maneira diferenciada se os preços estão aumentando ou declinando. Sabe-se que as subidas são lentas e as quedas são abruptas, mostrando que neste último caso deveríamos ter uma volatilidade maior.

Note que estas características guardam algumas relações entre si, dando origem a conclusões semelhantes. Por exemplo, se os retornos tivessem distribuição normal, a característica *a* inviabilizaria *b*, pois a não-correlação para variáveis gaussianas implica independência de quaisquer funções disjuntas dessas variáveis. Do mesmo modo, a característica *d* inviabiliza a distribuição normal. De fato, a autocorrelação dos quadrados dos retornos tem forte relação com as distribuições com caudas pesadas, pois quando surgem valores extremos, quer positivos ou negativos, devido à autocorrelação haverá tendência a que os próximos quadrados também sejam extremos, originando um agrupamento de valores extremos e, portanto, caudas pesadas.

De forma análoga, as características *b* e *c* estão intimamente relacionadas. Quando os quadrados dos retornos são autocorrelacionados, é de se esperar que valores grandes, em módulo, serão seguidos por valores também grandes, enquanto valores pequenos estarão próximos de valores pequenos, causando assim os agrupamentos de volatilidade.

Modelos lineares gaussianos de séries temporais são incapazes de incorporar alguns dos fatos estilizados apresentados anteriormente. Assim, a partir da década passada, foram desenvolvidos modelos estatísticos que eram capazes de incorporar estes fatos estilizados, como, por exemplo, o Autoregressive Condicional Heteroskedasticity (ARCH), o Generalized ARCH (GARCH) e o de Volatilidade Estocástica (VE).<sup>1</sup>

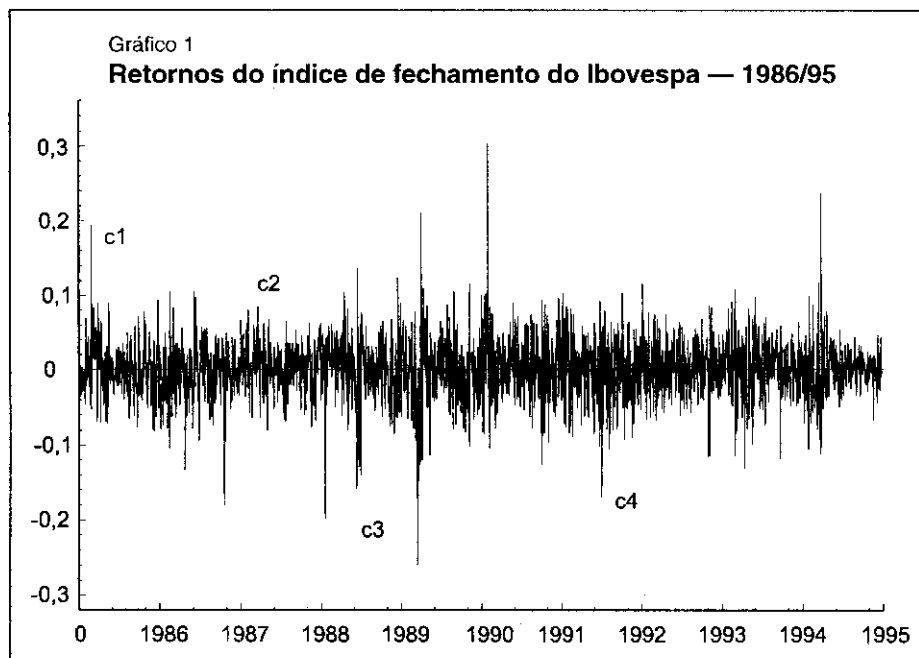
## 2 - Características dos retornos do Ibovespa

Nesta seção verificaremos se os retornos do índice de fechamento do Ibovespa entre 2 de janeiro de 1986 e 4 de dezembro de 1995 satisfazem as características apresentadas na seção anterior.

O Gráfico 1 apresenta os retornos ao longo do tempo. Vemos que quatro agrupamentos de volatilidade podem ser localizados e foram denotados por *c1*, *c2*, *c3* e *c4*. Note que

---

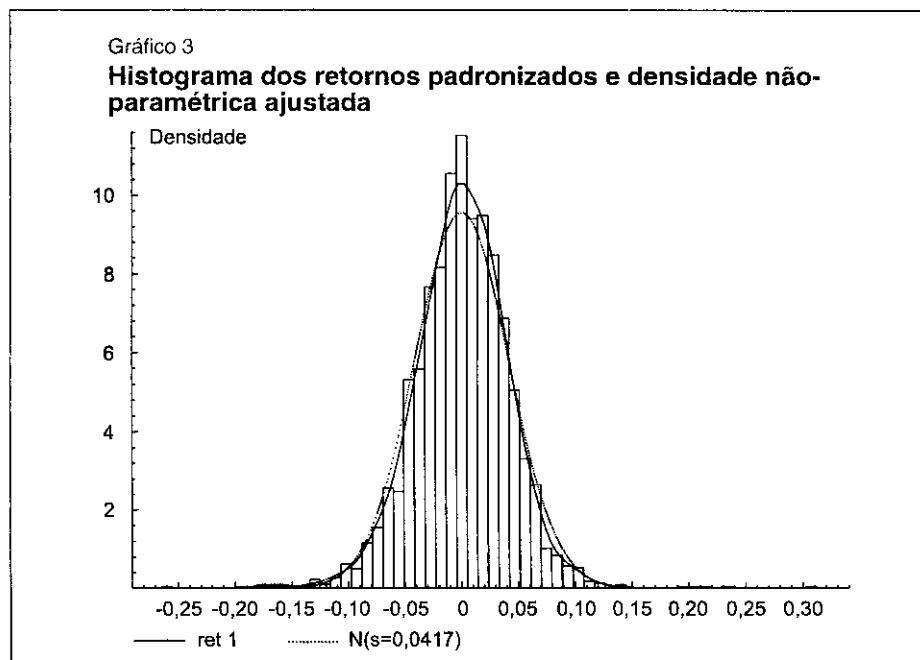
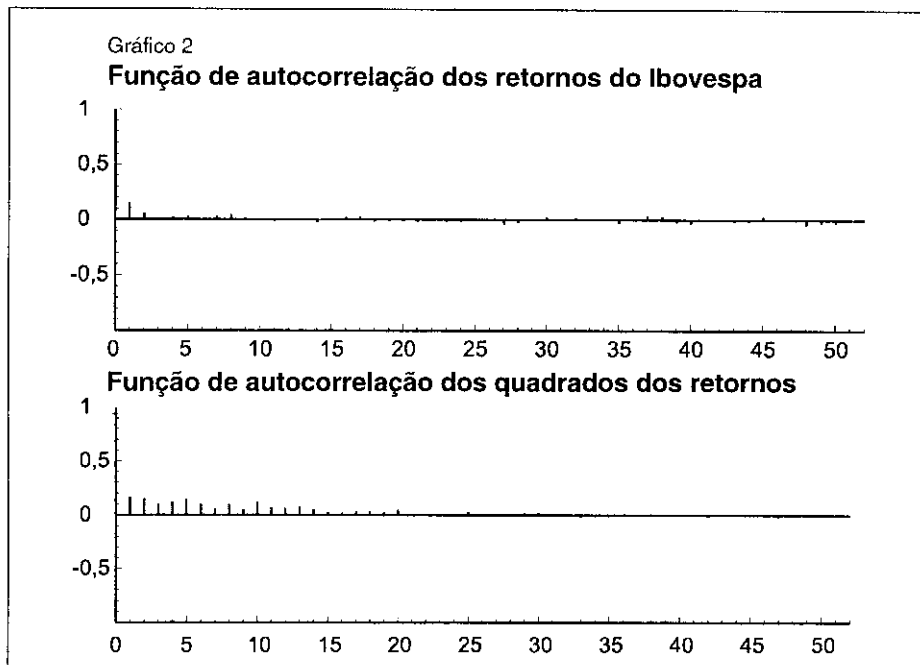
<sup>1</sup> Para uma descrição das semelhanças e dassemelhanças entre os modelos ARCH e VE, ver Herencia *et alii* (1995).



os agrupamentos *c2* e *c4* expressam de modo razoável a condição de erraticidade para os retornos e autocorrelação para seus quadrados, esta última devido à amplitude de variação dos retornos manter-se dentro do agrupamento, considerando-se tanto os retornos positivos quanto os negativos. No entanto, para os agrupamentos *c1* e *c3*, a amplitude de variação fica restrita preponderantemente a retornos com o mesmo sinal, indicando uma possível presença de autocorrelação nos retornos, violando, portanto, o primeiro fato estilizado.

Obviamente, esta distinção entre os agrupamentos não é muito perceptível e, em nosso caso, ela foi sugerida após observarmos os gráficos das funções de autocorrelação dos retornos e de seus quadrados (Gráfico 2). Neste gráfico, vemos claramente que a autocorrelação de ordem um dos retornos é significativa, rejeitando-se a hipótese de ruído branco e, portanto, violando o primeiro dos fatos estilizados. Podemos notar que a primeira autocorrelação dos quadrados dos retornos é significativa e após esta ordem a função de autocorrelação decai lentamente, confirmando o segundo fato estilizado.

O Gráfico 3 apresenta o histograma dos retornos padronizados e a estimação não-paramétrica da densidade. Percebe-se que as caudas da densidade são pesadas e que não há assimetria aparente. Ao se testarem hipóteses a respeito da assimetria e de curtose, não se rejeita simetria a um nível descritivo de 18% e rejeita-se a hipótese de não haver excesso de curtose a um nível descritivo inferior a 0,01%.



### 3 - Modelos de volatilidade estocástica com deformação temporal

Introduziremos a noção de deformação temporal dentro do contexto de Séries Temporais Financeiras, tentando justificar seu uso e importância. A seguir abordaremos uma metodologia adequada para seu tratamento dentro de Modelos de Volatilidade Estocástica, primeiramente com uma rápida apresentação do modelo a tempo discreto e, posteriormente, seguindo o trabalho de Ghysels e Jasiak (1994), com uma descrição detalhada do modelo a tempo contínuo.

#### 3.1 - Por que deformação temporal

Variáveis financeiras, tais como preço de um ativo, são afetadas pela chegada de novas informações ao mercado financeiro. Dias em que não surgem novidades, sejam “boas” ou “ruins”, são caracterizados por pouca movimentação ou alteração dos preços, uma vez que a qualidade da informação não está em pauta. Entretanto, dias carregados de novas informações têm efeito justamente oposto, ou seja, apresentam alta variação nos preços. Tal constatação conduziu Mandelbrot e Taylor (1967) e Clark (1973) a modelarem preços de ações como processos estocásticos subordinados, isto é, ao invés de modelarem os preços como função do tempo calendário, quer diário, semanal, mensal etc., eles modelaram como função da chegada de nova informação ao mercado, a qual é um processo que flui aleatoriamente ao longo do tempo. Assim, segundo esta abordagem, não olhamos mais para nosso processo de interesse evoluindo através do tempo calendário que é igualmente espaçado, mas sim evoluindo de acordo com a chegada de nova informação, originando uma nova dimensão temporal, a qual chamaremos de tempo operacional e denotaremos por  $s$ . Desta maneira, fica caracterizado o que denominamos deformação temporal.

#### 3.2 - Modelagem a tempo discreto

Considere o modelo a tempo discreto dado por:

$$y_t = \sigma \varepsilon_t \exp \left\{ \frac{h_t^+}{2} \right\} \quad (1)$$

$$h_t^+ = h_t + x_t' \beta \quad (2)$$

$$h_t = \gamma h_{t-1} + \eta_t \quad (3)$$

A volatilidade não é descrita por um processo AR(1), como é usualmente adotado nos Modelos de Volatilidade Estocástica nos quais a volatilidade condicional evolui latente através do tempo calendário, sem depender de outros processos que determinem a sua evolução. Na abordagem adotada aqui, a volatilidade condicional depende diretamente das variáveis explanatórias,  $x_t$ , que são observadas no tempo calendário. Deste modo, o processo que representa a volatilidade pode ser pensado como dependente de um tempo deformado ou operacional, que é função das variáveis explanatórias  $x_t$ .

A estimação desse modelo é semelhante à de Modelos de Volatilidade Estocástica sem a presença de variáveis explanatórias, dado que uma simples transformação faz com que (1-3) esteja em representação em espaço de estado linear. Fazendo esta transformação, (1-3) é agora escrito da seguinte forma:

$$\log y_t^2 = \omega + h_t^+ + \xi_t \quad (4)$$

$$h_t^+ = h_t + x_t' \beta \quad (5)$$

$$h_t = \gamma h_{t-1} + \eta_t \quad (6)$$

e a estimação do parâmetro  $\beta$  pode ser feita através de mínimos quadrados generalizados em duas etapas ou, simultaneamente, através de quase-máxima verossimilhança [ver Harvey e Shephard (1993a)]. A volatilidade é recuperada pela equação (5) utilizando-se o componente suavizado — um subproduto do método de estimação usado que é o filtro de Kalman.

Uma outra possibilidade seria a de incorporar  $\beta$  ao vetor de estado, resultando em:

$$\log y_t^2 = [1 \ x_t'] \alpha_t + \xi_t \quad (7)$$

$$\alpha_t = \begin{bmatrix} h_t \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{t-1} \\ \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_t \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$h_t^+ = [1 \ x_t'] \alpha_t = h_t + x_t' \alpha_t \quad (9)$$

que tem a vantagem de estimar  $\beta$  recursivamente.

### 3.3 - Modelagem a tempo contínuo

Utilizando operações de limite estocástico [ver Gihman (1972) e Wu (1985)] para os processos de preço e volatilidade, uniremos os trabalhos de Mandelbrot e Taylor (1967) e Clark (1973) sobre processos estocásticos subordinados aplicados a finanças e os trabalhos de Hull e White (1987), entre outros, que modelaram as variações na volatilidade por uma equação diferencial estocástica (a qual não tinha, ao menos explicitamente, relação com a chegada de novas informações), para construirmos o Modelo de Volatilidade Estocástica a tempo contínuo com deformação temporal.

#### 3.3.1 - Formulação do modelo

Considere o Modelo de Volatilidade Estocástica a tempo contínuo sem deformação temporal dado pelas equações diferenciais estocásticas a seguir:

$$dx(t) = \mu x(t)dt + \sigma(t)x(t)dW_1(t) \quad (10)$$

$$d \log \sigma^2(t) = a(\log \sigma^2(t) - b)dt + cdW_2(t) \quad (11)$$

onde  $W_1(t)$  e  $W_2(t)$  são dois processos de Wiener ou movimentos brownianos padrão.

Observe que a volatilidade não é mais uma função determinística do tempo como no modelo de Black e Scholes mas é modelada por um processo de difusão que faz com que a volatilidade evolua contínua e suavemente ao longo do tempo. No entanto, a chegada de informação, que é o processo ao qual vinculamos a volatilidade não evolui desta maneira contínua e suave. Além disso, o fluxo de informação é um processo latente (não-observável). Para contornarmos esta característica de não-observabilidade, iremos tratar a chegada de nova informação, que constitui o tempo operacional,  $s$ , como uma função de variáveis observadas no tempo calendário  $t$ , ou seja,  $s = g(t)$ , onde  $g(\cdot)$  será denominada "função de conexão" (ou de deformação) entre o tempo calendário e o operacional. Assim podemos reescrever (10-11) da seguinte forma:

$$dx(t) = \mu x(t)dt + \sigma(g(t)) \cdot (t)dW_1(1) \quad (12)$$

$$d \log \sigma^2(s) = a(\log \sigma^2(s) - b)ds + cdW_2(t) \quad (13)$$

onde a equação de difusão para a volatilidade está expressa em tempo operacional  $s$  causando a deformação temporal.

Observe que a equação (13) é uma equação diferencial estocástica linear de primeira ordem, cuja solução é obtida facilmente, conforme apresentado adiante:

$$d \log \sigma^2(s) = a(\log \sigma^2(s) - b)ds + c dW_2(s)$$

então:

$$\frac{d \log \sigma^2(s)}{ds} - a \log \sigma^2(s) = -ab + c \frac{dW_2(s)}{ds}$$

e multiplicando-se ambos os lados pelo fator integrante  $\exp\{-as\}$ , obtém-se:

$$\frac{d}{ds} (\log \sigma^2(s) e^{-as}) = e^{-as} \left( -ab + c \frac{dW_2(s)}{ds} \right)$$

e integrando entre  $s'$  e  $s$  para  $s' < s$  tem-se:

$$\log \sigma^2(s) e^{-as} - \log \sigma^2(s') e^{-as'} = b(e^{-as} - e^{-as'}) + c \int_{s'}^s e^{-ar} dW_2(r)$$

que resulta em:

$$\log \sigma^2(s) = \log \sigma^2(s') e^{-a(s-s')} + (1 + e^{-a(s-s')})b + c \int_{s'}^s e^{-a(s-r)} dW_2(r) \quad (14)$$

### 3.3.2 - Definição da função de deformação $g(t)$

Conforme comentado anteriormente, o fluxo de informações que chegam ao mercado é um processo latente. Como este processo não é observado, vamos definir uma função de conexão entre o tempo calendário  $t$  e o tempo operacional  $s$ , a qual é determinada através de variáveis observadas em tempo calendário. A escolha destas variáveis é fundamental, pois elas determinarão o ritmo de evolução da volatilidade. As variáveis utilizadas, seguindo a abordagem de Ghysels e Jasiak (1994), serão o volume de negociação, retornos, módulo dos retornos, sendo que todas as variáveis estarão defasadas de um



período para que seja possível prever um passo à frente,<sup>2</sup> e também uma variável que mede o efeito que dias sem negociação provocam no mercado. A inclusão dos retornos e do módulo dos retornos permite que o tempo operacional evolua em ritmos diferenciados quando o movimento dos preços é crescente ou decrescente, fazendo com que a volatilidade apresente flutuações diferenciadas e, portanto, permitindo assimetrias na volatilidade.<sup>3</sup> Em Ghysels e Jasiak (1994) foram utilizados dados diários do S&P500 e NYSE de 1950 a 1987, e foi constatado que um aumento no volume de negociação acelera o tempo operacional, resultando em menos persistência no processo de volatilidade com maior variância no ruído. Declínios nos preços, ou seja, retornos negativos, ocasionaram efeitos similares, enquanto preços crescentes, ou retornos positivos, aceleravam menos o ritmo do tempo operacional.

Formalmente, considere o espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  e a família  $\mathfrak{S} = \{\mathfrak{F}_t\}_{t=0}^{\infty}$  de subsigma álgebras definidas no tempo calendário. Além disso, seja  $Z_t$  um vetor  $m$ -dimensional  $\mathfrak{F}_t$ -mensurável. Considere a função de deformação  $g(\cdot)$  linear em  $t$  e que seus incrementos, os quais estabelecem a velocidade de variação do tempo operacional, são  $\mathfrak{F}_{t-1}$ -mensuráveis através da transformação logística:

$$\frac{dg(\tau; Z_{t-1})}{d\tau} \equiv \dot{g}(\tau; Z_{t-1}) \equiv \frac{\exp c'Z_{t-1}}{\tau} \quad (15)$$

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \exp c'Z_{t-1}$$

para  $t-1 \leq \tau < t$ , onde  $c$  é um vetor  $m \times 1$ .<sup>4</sup>

Note que se  $c = 0$ , então  $\dot{g}(\tau; Z_{t-1})$ , implicando a não-existência de deformação temporal. Também:

<sup>2</sup> No trabalho de Ghysels e Jasiak (1994), a variável volume entra contemporaneamente. Como um dos objetivos deste nosso trabalho é avaliar a previsão da volatilidade um passo à frente, usamos o volume defasado para não incorporar informações futuras.

<sup>3</sup> Um dos pareceristas desta revista sugeriu utilizar um modelo EGARCH que permite respostas assimétricas. Como a função de conexão permite incorporar estas assimetrias, o Modelo de Volatilidade Estocástica com deformação temporal engloba o EGARCH. Embora não apresentado no texto, foi estimado um EGARCH para os dados do Ibovespa e usando-se o Modelo de Volatilidade Estocástica com deformação temporal dominou-se, pelo critério de informação de Schwartz, o EGARCH.

<sup>4</sup> Observe que o denominador de (15) possui uma soma que inclui variáveis que não são  $\mathfrak{F}_{t-1}$ -mensuráveis, pois a soma estende-se até  $T$ . Entretanto, conforme Ghysels e Jasiak (1994), o denominador, que é um fator de escala, só está ali por questões de estabilidade numérica e sua presença não tem importância conceitual.

$$\Delta g(t) = g(t) - g(t-1) = \int_{t-1}^t \dot{g}(\tau; Z_{t-1}) d\tau \quad (16)$$

onde para a segunda igualdade é necessária a ausência de salto de  $g$  em  $t$ , e a terceira igualdade decorre do fato de que  $\dot{g}(\tau; Z_{t-1})$  não depende de  $\tau$ .

Por construção, temos que:

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \Delta g(t) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \dot{g}(\tau; Z_{t-1}) = 1$$

São necessárias duas suposições adicionais para a função  $g$ , a saber:

- a)  $g(0) = 0$
- b)  $0 < \dot{g}(\tau; Z_{t-1}) < \infty$

Assim, a especificação da função de conexão e as duas hipóteses adicionais garantem que o tempo operacional evolua na mesma direção que o tempo calendário, sem paradas ou saltos.

Admitiremos que a forma funcional de  $c'Z_{t-1}$  será dada por:

$$c'Z_{t-1} = c_d d_t + c_v Vol_{t-1} + c_\tau y_{t-1} + c_a |y_{t-1}| \quad (17)$$

onde  $Vol_t$  representa o volume de negociação no instante  $t$ ,  $y_t = \Delta \log x_t$  é o retorno no instante  $t$ ,  $|y_t|$  é o módulo do retorno no instante  $t$  e  $d_t$  é uma variável que inclui os efeitos de dias sem negociação ou de outro efeito periódico.

Observe que os coeficientes de (17) nos permitem inferir o modo com que cada uma das variáveis influencia a velocidade do tempo operacional e, conseqüentemente, a volatilidade dos retornos.

### 3.3.3 - Aproximação a tempo discreto e estimação

Considere as equações (12) e (14). É necessária uma aproximação a tempo discreto destas equações para que os parâmetros sejam estimados pelo método de QML usando o filtro de Kalman. Substituindo  $s = g(t)$  e  $s' = g(t-1)$  em (14) temos:

$$h_t = e^{a\Delta g(t)} h_{t-1} + (1 - e^{a\Delta g(t)})b + v_t \quad (18)$$

onde  $h_t = \log \sigma^2(g(t))$ .

Observe que a equação (18) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\tilde{h}_t = e^{a\Delta g(t)} \tilde{h}_{t-1} + v_t \quad (19)$$

onde  $\tilde{h}_t = h_t - b$ ,  $v_t = c \int_{s'}^s e^{a(s-r)} dW_2(r)$  e  $\Delta g(t)$  é dado por (16).

Quanto à distribuição de  $v_t$ , observe que  $W_2(t)$  é um movimento browniano padrão, isto é,  $dW_2(t) \sim \text{NID}(0, dt)$ . Assim, pela definição de  $v_t$  temos que a sua distribuição é normal com média zero e variância dada por:

$$\begin{aligned} \text{Var}(v_t) &= c^2 \int_{g(t-1)}^{g(t)} e^{2a(g(t)-r)} \text{Var}[dW_2] \\ &= c^2 e^{2ag(t)} \int_{g(t-1)}^{g(t)} e^{-2ar} dr \\ &= -\frac{c^2 e^{2ag(t)}}{2a} \left[ e^{-2ag(t)} - e^{-2ag(t-1)} \right] \\ &= -c^2 \frac{(1 - e^{-2a\Delta g(t)})}{2a} \end{aligned}$$

Comparando (14) com (19), observa-se que o processo do logaritmo da volatilidade,  $h_t$ , enquanto linear em relação ao tempo operacional, transforma-se em um modelo com coeficiente aleatório em relação ao tempo calendário.<sup>5</sup> Este tipo de modelo é chamado de duplamente estocástico, pois, além de seguir um  $AR(1)$ , seu coeficiente depende da função de conexão  $\Delta g(t)$ .

<sup>5</sup> Observe que este modelo é semelhante ao modelo EAR (Exponential AR) de Ozaki, com a vantagem de não ser necessário fixar nenhum dos parâmetros a serem estimados.

Agora utilizando uma aproximação padrão, (12) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\log x_t = \mu + \log x_{t-1} + \sigma(g(t)) \varepsilon_t$$

ou:

$$y_t - \mu = \sigma(g(t)) + \varepsilon_t \quad (20)$$

onde  $y_t$  é o retorno no instante  $t$  e  $\varepsilon_t \sim NI(0, 1)$ .

Finalmente, elevando ao quadrado e tomando logaritmos em ambos os lados de (20), e com (19), tem-se o seguinte conjunto de equações:

$$\log(y_t - \mu)^2 = -1,27 + b + \tilde{h}_t + \xi_t \quad (21)$$

$$\tilde{h}_t = e^{a\Delta g(t)} \tilde{h}_{t-1} + v_t \quad (22)$$

onde  $\xi_t$  tem média zero e variância  $\frac{\pi^2}{2}$ .

Observe que as equações(21) e (22) já estão na representação de espaço de estado linear mas com matriz de transição, que é o coeficiente do processo auto-regressivo e varia ao longo do tempo. A estimação de (21-22) é feita via filtro de Kalman por quase-máxima verossimilhança.<sup>6</sup> Para iniciar o filtro de Kalman, utiliza-se, seguindo Stock (1988), as seguintes condições:

$$\Delta g(1) = 1$$

$$\tilde{h}_{1/0} = 0$$

$$\text{Var}(\tilde{h}_{1/0}) = \frac{\sigma_v^2}{1 - \exp(2a)} = -\frac{c^2}{2a}$$

---

<sup>6</sup> O parâmetro  $\mu$  poderá ser estimado pela média amostral dos retornos. Veremos, na aplicação, que será necessário filtrar os retornos por um processo auto-regressivo.

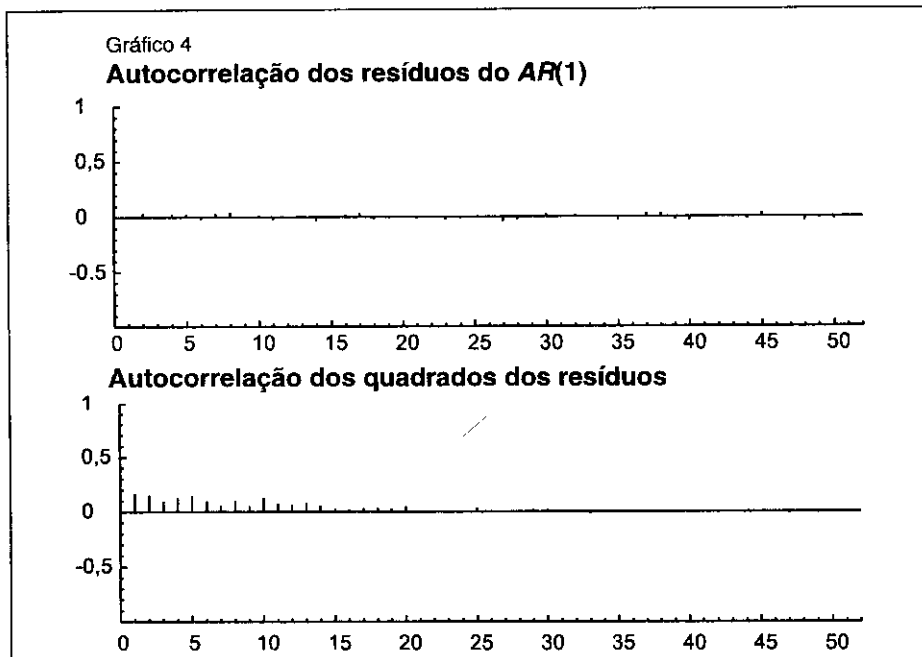
#### 4 - Estimação da volatilidade dos retornos do Ibovespa

Como foi visto anteriormente, os retornos do Ibovespa são autocorrelacionados. É necessário, portanto, filtrar a série e, utilizando procedimentos usuais de identificação em séries temporais, o modelo escolhido foi  $AR(1)$ . Ao se estimar este modelo, obteve-se:<sup>7</sup>

$$y_t = 0,1478 y_{t-1} + a_t \quad (23)$$

(0,0201)

O Gráfico 4 apresenta as funções de autocorrelação dos resíduos estimados,  $\tilde{a}_t$ , do modelo acima, assim como dos seus quadrados. Percebe-se claramente que a estrutura de autocorrelação dos retornos observada no Gráfico 2 foi eliminada, enquanto os quadrados dos retornos permanecem altamente correlacionados. Os valores para a estatística de Box-Ljung para as autocorrelações dos resíduos com os respectivos níveis descritivos são apresentados na Tabela 1.



7 O desvio padrão da estimativa está entre parênteses.

TABELA 1

*Estatística de Box-Ljung para as autocorrelações dos resíduos do AR(1)*

Defasagem	Grau de liberdade	Autocorrelação	BoxLjung	Nível descritivo
1	0	- 0,0053		
2	1	0,0354	3,1097	0,0778
3	2	- 0,0025	3,1250	0,2096
4	3	0,0224	4,3472	0,2263
5	4	0,0317	6,7949	0,1471
6	5	- 0,0226	8,0406	0,1540
12	11	- 0,0023	16,1982	0,1339
18	17	- 0,0230	24,3978	0,1090
24	23	- 0,0196	27,8603	0,2211
30	29	0,0272	35,6009	0,1855
36	35	0,0126	39,6314	0,2710

Utilizaremos os resíduos do modelo  $AR(1)$  para obtermos as estimativas da volatilidade e dos parâmetros associados.<sup>8</sup> As outras variáveis que entrarão nos modelos com deformação temporal são os retornos, seus valores absolutos, volume de negociação em dólares, todos os defasados de um período e o número de noites entre dois dias consecutivos em que o mercado esteve aberto (para incorporar o efeito de dias sem negociação porque, sabe-se, o mercado reage de maneira diferenciada, após um fim de semana). O Gráfico 5 apresenta os resíduos estimados pelo  $AR(1)$ , assim como os volumes de negociação diários do Ibovespa.<sup>9</sup>

Foram estimados sete modelos diferentes: um sem deformação temporal, três com deformação temporal a tempo discreto e outros três com deformação a tempo contínuo. As Tabelas 2 e 3 apresentam um resumo das estimativas para os parâmetros dos modelos. Os parâmetros  $c_d$ ,  $c_v$ ,  $c_r$  e  $c_a$  são, respectivamente, os coeficientes das variáveis número de noites entre dois dias com negociações, volume de negociação, retornos e valores

<sup>8</sup> É sabido na literatura ARCH que os estimadores que afetam a média condicional são assintoticamente independentes dos estimadores que afetam a variância condicional, exceto nos modelos ARCH-M e EGARCH. Como o Modelo de Volatilidade Estocástica sem deformação é equivalente a um GARCH, o procedimento de estimação em duas etapas, que é utilizado, é assintoticamente equivalente à estimação simultânea. Para o Modelo de Volatilidade Estocástica com deformação, como a função de conexão depende dos retornos defasados, o procedimento em duas etapas pode acarretar em perda de eficiência.

<sup>9</sup> Le Baron (1992) mostra um modelo semelhante ao apresentado aqui, mas na função de conexão utiliza volume de negociação sem tendência. Aqui não é necessário retirar a tendência do volume de negociação porque a função de conexão foi padronizada, ver (15).

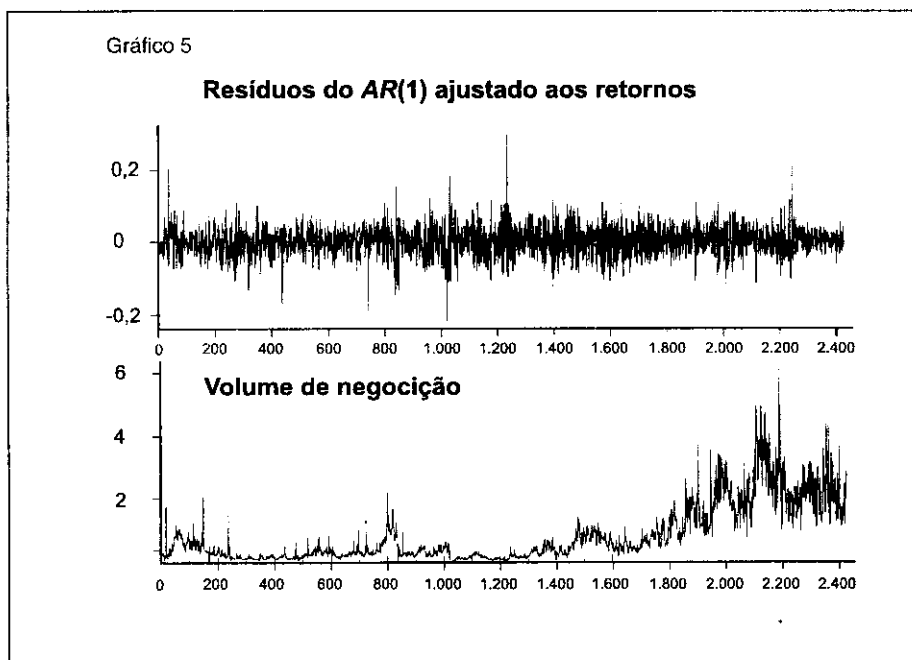


TABELA 2

*Modelagem a tempo discreto*

	Modelo 1		Modelo 2		Modelo 3		Modelo 4	
	Estima- tiva	Nível descritivo	Estima- tiva	Nível descritivo	Estima- tiva	Nível descritivo	Estima- tiva	Nível descritivo
$c_d$	-	-	0,01043	0,00600	0,0900	0,0124	0,0902	0,0122
$c_v$	-	-	-0,77700	0,02267	-0,3606	0,6550	-	-
$c_r$	-	-	-2,87390	0,00050	-2,7738	0,0012	-2,8124	0,0010
$c_a$	-	-	18,67300	0,00000	-	-	-	-
$\sigma_\xi$	1,7054	-	0,49390	-	1,7020	-	1,7019	-
$\sigma_\eta$	0,137	-	1,68880	-	0,1332	-	0,1324	-
$\gamma_1$	0,9716	-	-0,18940	-	0,9721	-	0,9725	-

TABELA 3

*Modelagem a tempo contínuo*

	Modelo 1		Modelo 2		Modelo 3	
	Estimativa	Nível descritivo	Estimativa	Nível descritivo	Estimativa	Nível descritivo
$c_v$	7,5695	0,0303	-	-	-	-
$c_r$	- 2,9051	0,3816	- 9,5452	0,02682	-	-
$c_a$	67,0863	0,0000	39,5020	0,0537	2,9767	0,3448
$c$	3,8200	0,4277	0,3442	0,4477	0,0735	0,0012
$a$	- 29,3738	0,4312	0,2670	0,4474	- 0,0136	0,0010
$b$	- 6,0370	0,0000	- 6,0930	0,0000	- 6,3573	0,0000

absolutos dos retornos. Os demais parâmetros são equivalentes aos especificados na parte teórica do trabalho. Apesar dos elevados valores dos níveis descritivos para as várias estimativas da abordagem a tempo contínuo, uma análise dos coeficientes obtidos pode nos informar como mudanças nas variáveis afetam o ritmo de evolução do tempo operacional e da própria volatilidade. Se observarmos o modelo 1 a tempo contínuo, veremos que o coeficiente  $a$  é negativo. Pela equação (22), isto significa que quanto maior for  $\Delta g(t)$ , a velocidade de variação do tempo operacional, menor será a persistência da volatilidade; ao mesmo tempo, maior será a variância do ruído  $v_r$ . Sendo assim, pela forma funcional de  $\Delta g(t)$ , dada pelas equações (15) e (17), vemos que como  $c_v$  é positivo, então, quanto maior o volume de negociação do dia anterior, maior  $\Delta g(t)$  e, conseqüentemente, menor persistência e mais ruído para a volatilidade. Do mesmo modo, quanto maior o valor absoluto do retorno do dia anterior, mais volatilidade; entretanto, quedas nos preços (retornos negativos) induzem uma volatilidade ainda maior pois  $c_r$  é negativo.

Os Gráficos 6 e 7 apresentam as estimativas suavizadas da volatilidade para o modelo a tempo discreto, baseadas nas observações corrigidas por heterocedasticidade [ver Harvey e Shepard (1993) e os diagramas de dispersão para os quatro modelos estimados]. A volatilidade estimada sem deformação (modelo 1) apresenta uma forma mais suave do que as demais, enquanto para o modelo 2 a forma é mais errática. Já os modelos 3 e 4 fornecem resultados bastante semelhantes. No Gráfico 7, vemos que o modelo 2, além de estimar uma volatilidade mais errática, origina uma amplitude de variação bem maior do que os demais modelos, sendo tal conseqüência atribuída à presença do módulo dos retornos no modelo.

Quanto à adequação destes modelos a tempo discreto, podemos observar as funções de autocorrelação para quadrados das observações corrigidas por heterocedasticidade, dadas no Gráfico 8. Comparando com o Gráfico 4, que apresenta as autocorrelações dos



Gráfico 6  
**Estimativas suavizadas das volatilidades para modelos a tempo discreto**

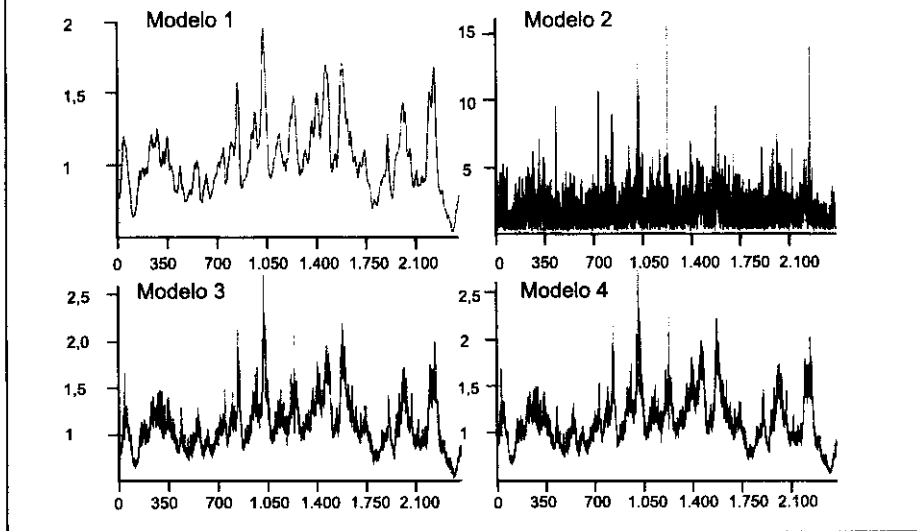
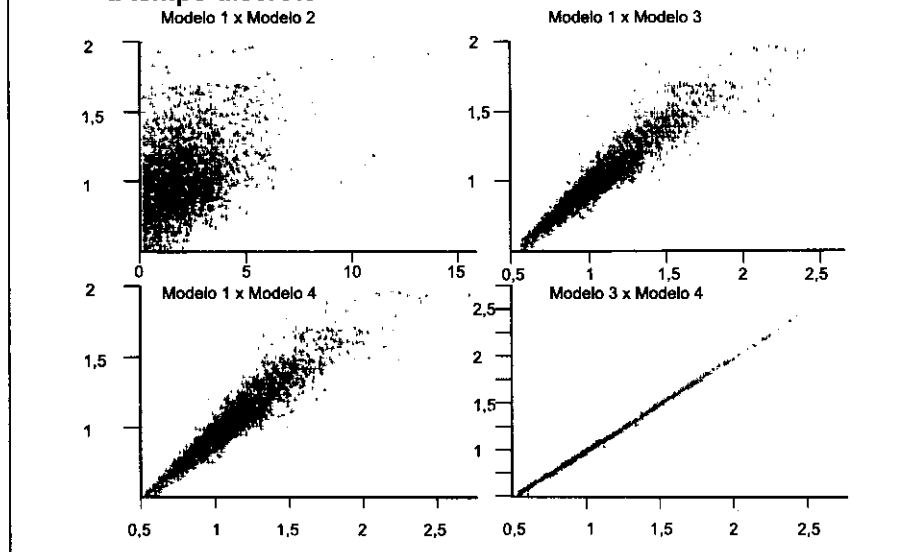
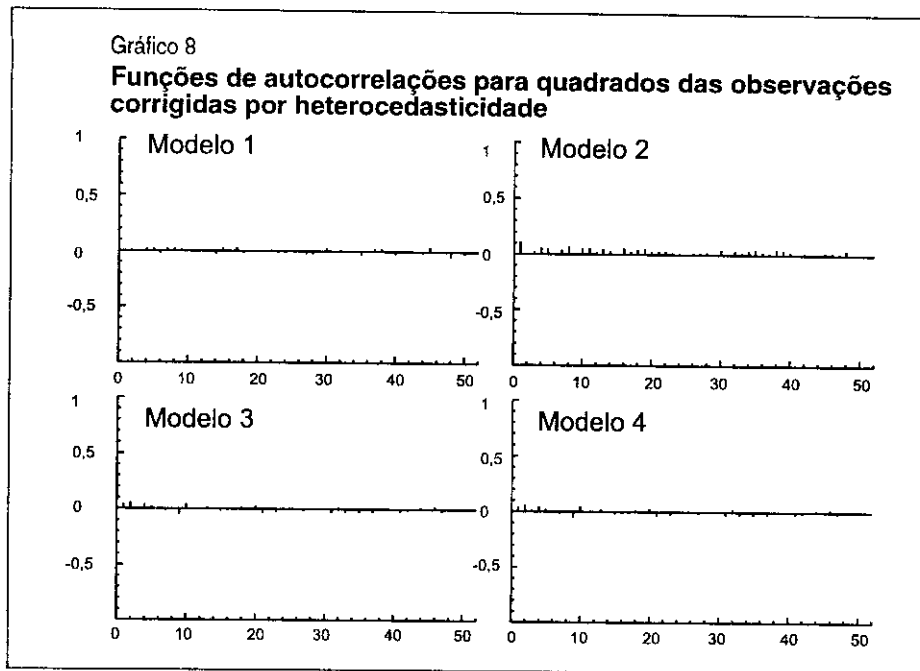


Gráfico 7  
**Diagramas de dispersão das volatilidades para modelos a tempo discreto**





quadrados dos resíduos, percebe-se uma sensível queda nos valores das autocorrelações, principalmente se comparado ao modelo 2, que apresenta a pior *performance*.

O Gráfico 9 apresenta as estimativas suavizadas da volatilidade sem e com deformação temporal a tempo contínuo (modelo 1). Vemos que, ao contrário do que aconteceu na abordagem a tempo discreto, ao se introduzir deformação temporal as estimativas da volatilidade são mais suaves. Tal característica é oriunda do fato de o coeficiente do processo auto-regressivo do logaritmo da volatilidade ser também um processo estocástico e não uma constante, o que faz este coeficiente ficar menos sensível a ruído. Esta diminuição da sensibilidade a ruído pode acarretar vantagens em termos de previsão. No Gráfico 10, mostram-se as previsões um passo à frente para um período de aproximadamente 150 dias, baseadas nas estimativas filtradas da volatilidade. Observe que a amplitude dos limites dos intervalos de confiança para o modelo com deformação é menor implicando ganhos em termos de exposição a risco. No Gráfico 11 apresenta-se o diagrama de dispersão das volatilidades estimadas para estes casos e percebe-se que o modelo com deformação mostra uma amplitude de variação um pouco menor.

Em termos de medidas de ajuste do modelo 1 a tempo contínuo, podemos observar no Gráfico 12 que as autocorrelações dos quadrados dos resíduos corrigidos por heterocedasticidade pelo modelo 1 a tempo contínuo, apresentam uma sensível redução se comparadas aos quadrados dos resíduos do  $AR(1)$ . É, portanto, uma indicação de que o modelo foi capaz de capturar boa parte da variação da volatilidade. Entretanto, percebe-se que ainda permanece autocorrelação, mostrando que nem toda a não-linearidade foi captada pelo modelo. Este fato é confirmado pelo Gráfico 13, que apresenta o histograma

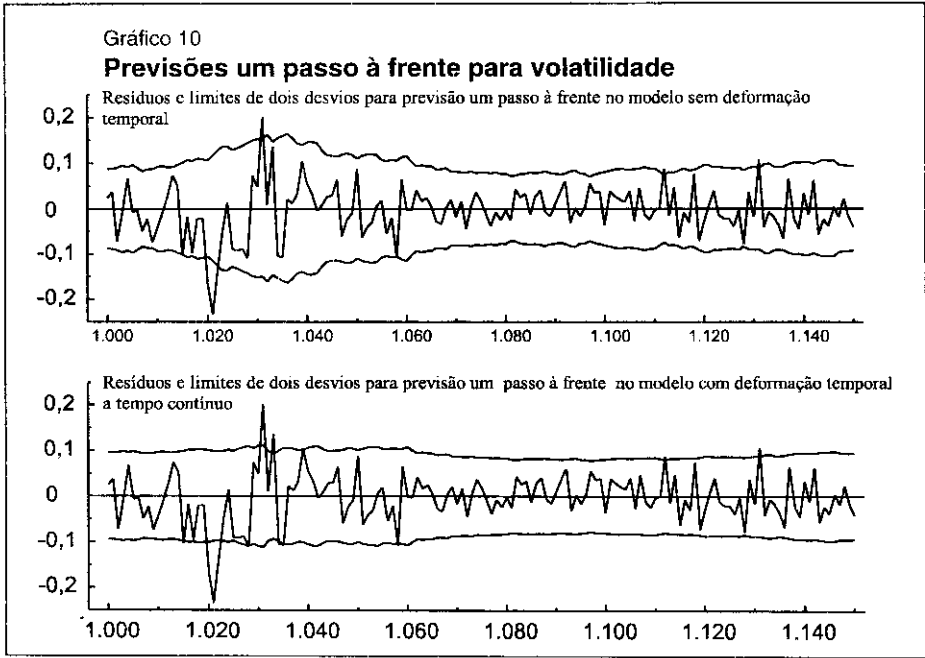
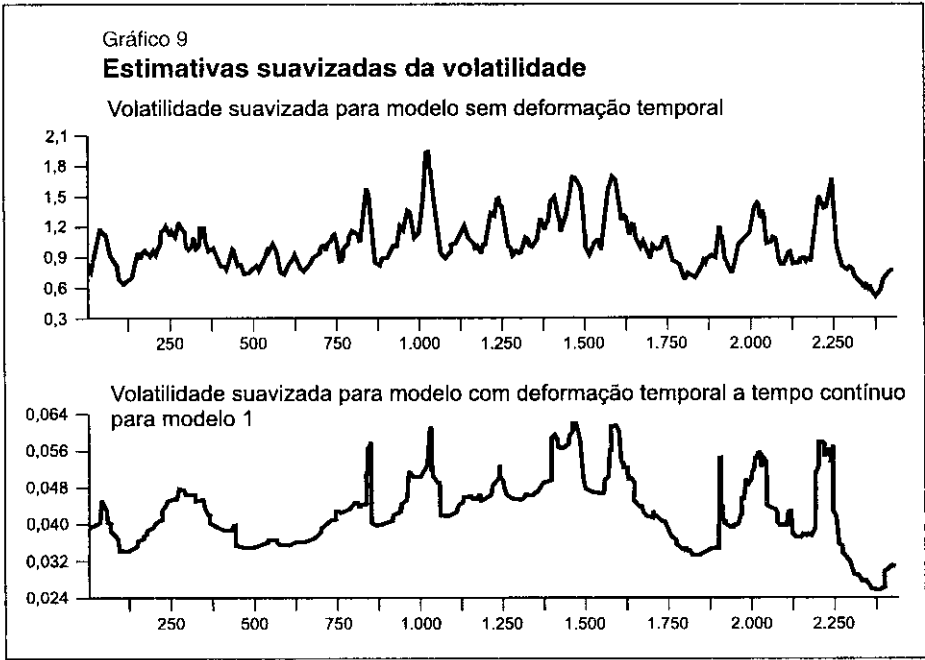


Gráfico 11

**Diagrama de dispersão entre volatilidades suavizadas do modelo sem deformação e do modelo 1 com deformação**

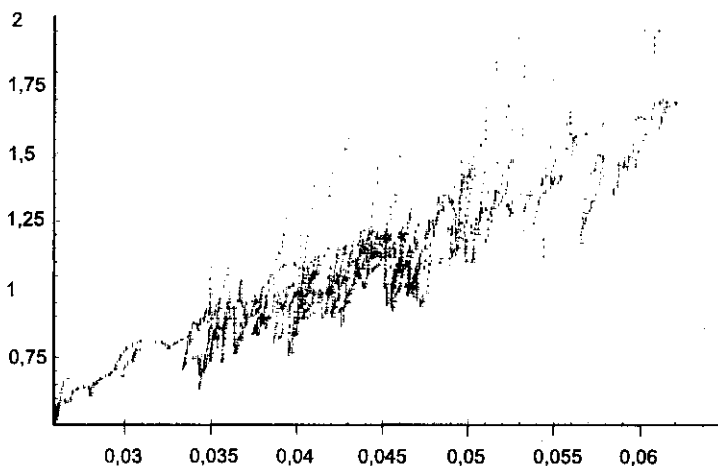
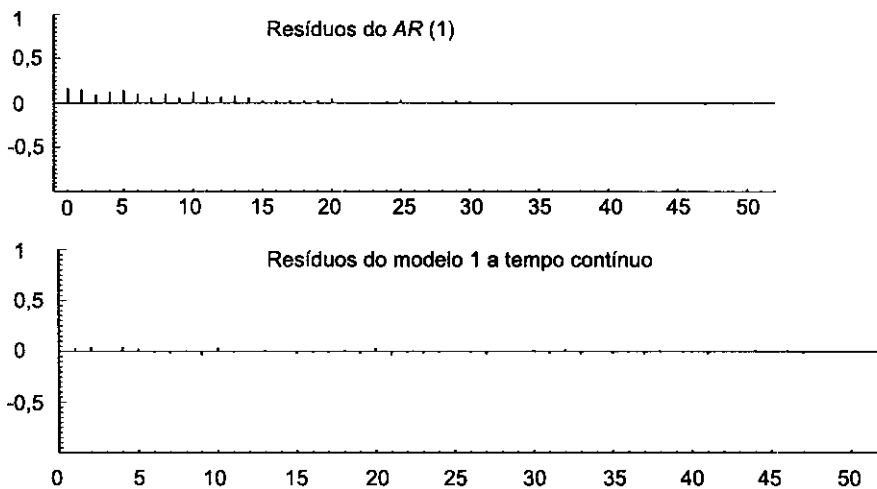
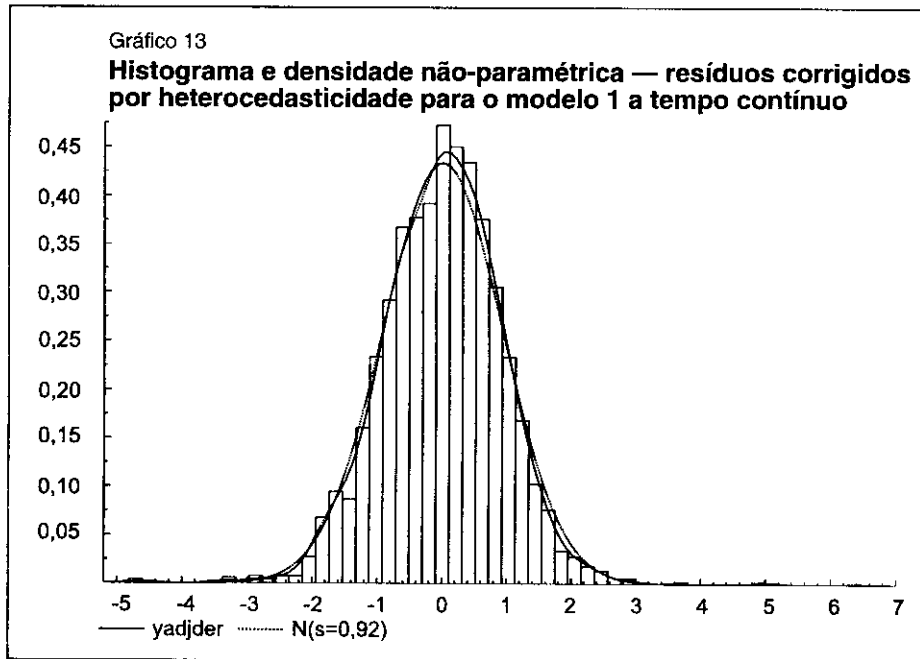


Gráfico 12

**Funções de autocorrelação dos quadrados dos resíduos corrigidos por heterocedasticidade**





dos resíduos corrigidos mostrando caudas ainda bastante pesadas. Talvez uma abordagem a tempo contínuo que substituísse o movimento browniano na equação por algum outro processo que implicasse uma distribuição a tempo discreto com caudas mais pesadas que a normal ofereça melhores resultados.

## 5 - Conclusões

O principal objetivo deste artigo foi modelar a volatilidade dos retornos de ativos financeiros através de Modelos de Volatilidade Estocástica a tempo contínuo com deformação temporal. Foram apresentados também modelos a tempo discreto e observou-se que a volatilidade estimada com deformação era mais errática do que a sem deformação, o que não acontecia quando se utilizava o modelo a tempo contínuo. Ao se introduzir o coeficiente aleatório no processo auto-regressivo  $AR(1)$  que governava o logaritmo da volatilidade, boa parte da erraticidade do processo desapareceu. Sendo assim, o processo duplamente estocástico resultante é preferível por conter menos ruído. Uma segunda vantagem é a possibilidade de incorporação de processos observáveis com um apelo empírico subjacente, ou seja, a idéia de alteração do mercado, à medida que novas informações chegam, permite a inclusão destes processos, observados no tempo calendário, de uma forma natural, incorporados à função de deformação temporal. A terceira vantagem é a relação que podemos obter entre variações destes processos e o

comportamento da volatilidade. Na aplicação aos dados do Ibovespa, encontramos que quanto maior o volume negociado no dia anterior, maior a volatilidade do dia em questão. Também encontramos que retornos negativos no dia anterior conduzem a uma volatilidade maior do que retornos positivos, o que significa dizer que, quando os preços diminuíam, a volatilidade subsequente era maior do que quando os preços aumentavam. A quarta e última vantagem é a possibilidade de utilizar esta abordagem para dados de alta frequência, os quais surgem de forma aleatória e não igualmente espaçados no tempo. Modelos a tempo discreto não são capazes de tratar de forma adequada este tipo de dados. Uma desvantagem desta modelagem é a impossibilidade de prever a volatilidade mais do que um passo à frente, embora se o objetivo é utilizar estas previsões para gerenciamento de risco esta desvantagem desapareça se o horizonte de balanceamento das carteiras for de um dia, como é usual no mercado.

#### **Abstract**

*To estimate and forecast volatility is one of the most important problems in financial economics. The purpose of this paper is to use time deformation in order to improve volatility estimates. The concept of time deformation is related to the idea that the stock market reacts to news which is not measured in calendar time. Stochastic Volatility models with and without time deformation are used to estimate the volatility of Ibovespa.*

#### **Bibliografia**

- ALEXANDER, C. *The handbook of risk management and analysis*. New York: John Wiley, 1996.
- CLARK, P. A subordinated stochastic process model with finite variance for speculative price. *Econometrica*, v.41, p.135-156, 1973.
- GHYSELS, E., JASIAK, J. *Stochastic volatility and time deformation; an application to trading volume and leverage effects*. Artigo apresentado na Western Finance Association Meeting, Santa Fé, 1994.
- GJHMAN, I. I., SKOROHOD, A. V. *Stochastic differential equations*. New York: Springer-Verlag, 1972.
- HARVEY, A. C., SHEPHARD, N. *Estimation and testing of stochastic variance models*. 1993 (Sticerd Econometrics Discussion Paper).
- HERENCIA, M. *et alii*. Volatilidade nos retornos de Telebrás. *Anais do XVII Encontro Brasileiro de Econometria*, v.1, p.587-621, 1995.
- HULL, J., WHITE, A. The pricing of options on assets with stochastic volatilities. *Journal of Finance*, v.42, p.281-300, 1987.

- LE BARON, B. Some relations between volatility and serial correlation in stock market returns. *Journal of Business*, v.65, p.199-219, 1992.
- MANDELBROT, B., TAYLOR, H. On the distribution of stock prices differences. *Operations Research*, v.15, p.1.057-1.062, 1967.
- PAGAN, A. *The econometric of financial markets*. The Australian National University, 1993, mimeo.
- STOCK, J. H. Estimating continuous time processes subject to time deformation. *Journal of the American Statistical Association*, v.83, p.77-84, 1988.
- TAYLOR, S. *Modelling financial time series*. New York: John Wiley, 1986.
- WU, R. *Stochastic differential equations*. Boston: Pitman Publishing, 1985.

(Originals recebidos em janeiro de 1997. Revistos em julho de 1997.)

