

Hiperinflação e o regime das políticas monetária e fiscal

FERNANDO DE HOLANDA BARBOSA*
ELVIA MUREB SALLUM**

Este trabalho analisa a dinâmica da hiperinflação em dois tipos de regime de políticas monetária e fiscal. No regime de política monetária passiva, o Banco Central é obrigado a financiar o déficit do Tesouro, enquanto no regime de política monetária ativa o Banco Central é livre para escolher a taxa de expansão monetária. A economia é caracterizada por um sistema dinâmico, de duas equações diferenciais, e sua estrutura qualitativa pode mudar quando parâmetros do modelo mudam de valor (bifurcação de Hopf). O modelo dinâmico apresentado aqui generaliza vários modelos de hiperinflação conhecidos na literatura.

1 - Introdução

Uma forma de caracterizar o regime das políticas monetária e fiscal é pela relação entre o Banco Central e o Tesouro. Neste trabalho adotamos a definição de regime de política monetária passiva como sendo aquele em que o Banco Central é obrigado a financiar o déficit do Tesouro. Em símbolos:

$$\frac{dM}{dt} = G - T$$

onde $G-T$ é o déficit público nominal e dM/dt o acréscimo de moeda por unidade de tempo. Neste regime, a taxa de expansão monetária (μ) depende do déficit real (f) do Tesouro e da quantidade real de moeda (m) que o setor privado deseja reter. Esta proposição decorre de uma simples manipulação algébrica da expressão anterior, pois:

$$\mu = \frac{dM}{dt} \frac{1}{M} = \frac{(G-T)/P}{M/P} = \frac{f}{m}$$

* Da Escola de Pós-Graduação em Economia da FGV e do Departamento de Engenharia de Produção da UFF.

** Do Instituto de Matemática e Estatística da USP.

Nos Gráficos 1.A e 1.B os eixos vertical e horizontal medem, respectivamente, a taxa de expansão monetária e a quantidade real de moeda. A curva do Gráfico 1.A mostra a taxa de expansão monetária necessária para financiar um dado déficit real, para cada valor da quantidade real de moeda que o público deseja reter. A questão relevante neste tipo de regime de política monetária é saber se existe ou não uma taxa de expansão monetária de equilíbrio, para a qual a economia converge.

É bastante conhecido o fato de que neste tipo de modelo é possível que existam dois pontos de equilíbrio, como *A* (de inflação alta) e *B* (de inflação baixa) no Gráfico 1.A. Estes pontos são estáveis ou instáveis? Este regime é capaz de gerar trajetórias hiperinflacionárias, nas quais a taxa de inflação aumenta indefinidamente? Este trabalho analisa, nas Seções 2 e 3, para uma economia caracterizada por inércia no sistema de preços, a dinâmica do modelo e as mudanças qualitativas (bifurcação de Hopf) que nele ocorrem quando o parâmetro f , que mede o déficit público real, muda de valor. O modelo é bastante rico no sentido de que, dependendo dos seus parâmetros, pode gerar situações bem diversas, como, por exemplo: *a*) quando *A* for instável, ele será um ponto de repulsão, e a economia poderá eventualmente entrar numa trajetória hiperinflacionária; e *b*) quando *A* for estável, ele será um ponto de atração, e a economia poderá convergir para um patamar de inflação elevada.

O regime de política monetária ativa é definido aqui como aquele em que o Banco Central é livre para escolher a taxa de expansão monetária, independente da situação do orçamento fiscal e das decisões de portfólio do setor privado. Uma pergunta relevante que cabe fazer para uma economia que opera neste regime é se a taxa de

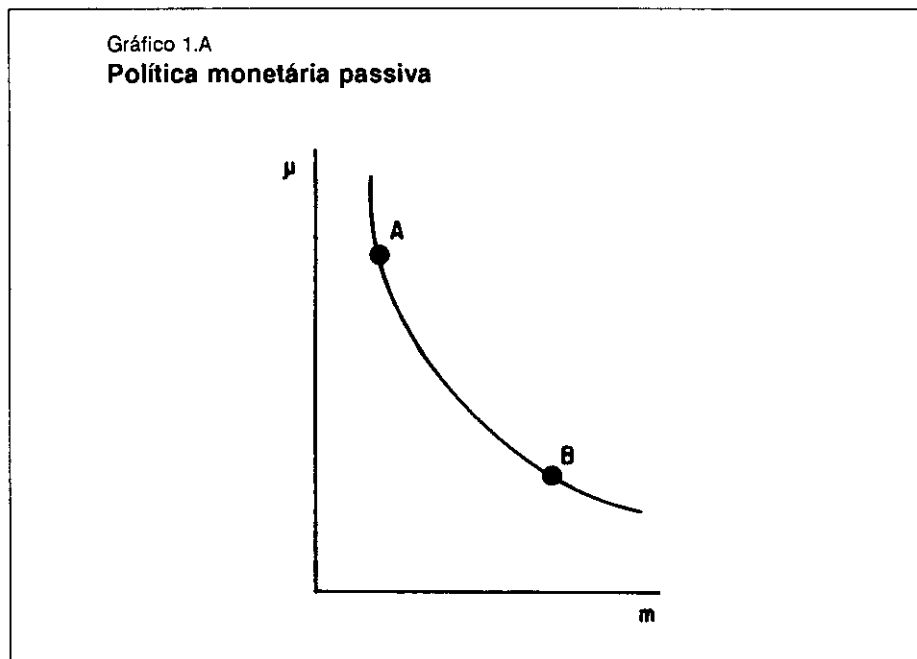
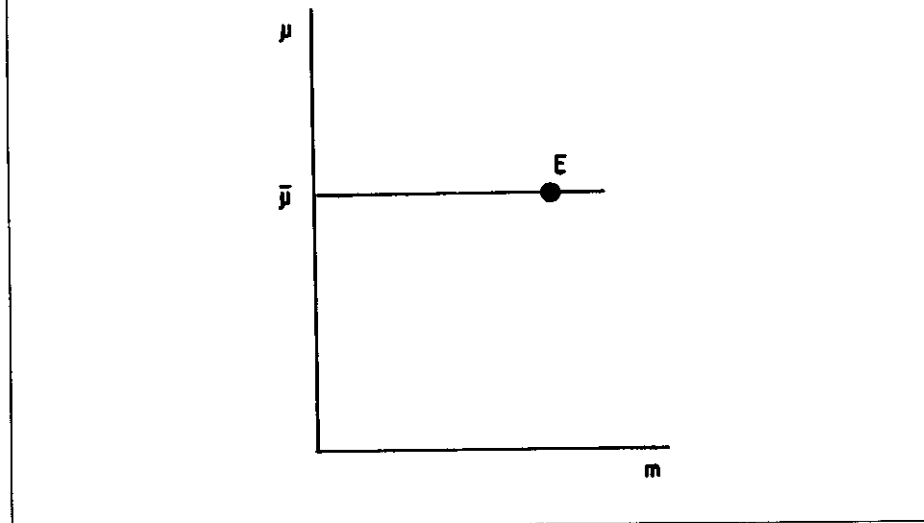


Gráfico 1.B
Política monetária ativa



inflação converge para a taxa de expansão monetária fixada pelo Banco Central. A questão pode ser colocada como no Gráfico 1.B: supondo-se que o Banco Central fixe a taxa de expansão monetária em $\bar{\mu}$, em que condições a economia converge para um ponto de equilíbrio como E , onde a taxa de inflação é igual a $\bar{\mu}$? É possível, neste caso, a ocorrência do fenômeno de hiperinflação? A Seção 4 deste trabalho analisa também as mudanças qualitativas (bifurcação de Hopf) que ocorrem na dinâmica da economia quando o parâmetro que mede a inércia do sistema de preços muda de valor. A Seção 5 sumaria as conclusões do trabalho.

Antes da apresentação do modelo da Seção 2 cabem algumas observações sobre o arcabouço teórico que será usado a seguir.

Neste trabalho, a economia será apresentada por um sistema de duas equações diferenciais, na taxa de inflação (π) e no nível de encaixe real (m):

$$\dot{\pi} = F(\pi, m, \dots)$$

$$\dot{m} = H(\pi, m, \dots)$$

onde três pontos (...) indicam os parâmetros estruturais do modelo. A primeira equação sintetiza o comportamento dos mercados de bens e serviços, de moeda e a formação de salários e preços na economia; e a segunda traduz o regime das políticas

monetária e fiscal. Quando a política monetária é passiva porque o Banco Central financia o Tesouro, a função $H(\cdot)$ tem a seguinte especificação:

$$\dot{m} = f - m \pi$$

onde f é o déficit público real. Quando a política monetária é ativa e o Banco Central controla a taxa de crescimento da base monetária (μ), a função $H(\cdot)$ é dada por:

$$\dot{m} = m (\mu - \pi)$$

Em ambos os casos, a equação de \dot{m} é não-linear nas variáveis m e π . Logo, o sistema de equações diferenciais é um sistema *não-linear* de equações diferenciais, e sua estrutura é bastante rica para que o modelo gere processos dinâmicos e trajetórias capazes de explicar o tipo de inflações observadas na América Latina. Cabe assinalar que a estrutura qualitativa deste sistema pode mudar, passando de estável para instável, por exemplo, quando um parâmetro do modelo muda de valor, de acordo com a bifurcação de Hopf. Um outro aspecto importante do arcabouço teórico deste trabalho é que vários modelos de hiperinflação conhecidos na literatura podem ser colocados como casos particulares da equação $F(\cdot)$.

2 - Inflação e inércia nos preços

Esta seção apresenta um modelo em que a taxa de crescimento dos salários tem uma componente inercial que pode ser atribuída a mecanismos de indexação ou a contratos salariais justapostos. Nos mercados de ativos, as expectativas são racionais no sentido de previsão perfeita, pois as variáveis não são estocásticas, e o déficit público é financiado através da emissão de moeda.

A taxa de crescimento dos salários (ω) depende da taxa de inflação inercial (π^i) e da situação do mercado de trabalho, medida pelo hiato do produto (h), isto é:

$$\omega = \pi^i + \delta h, \quad \delta > 0 \quad (1)$$

A taxa de inflação inercial é dada pelo seguinte mecanismo:

$$\dot{\pi}^i = \theta (\omega - \pi^i), \quad \theta > 0 \quad (2)$$

que equivale a supor que a inflação inercial é uma média ponderada das taxas de crescimento dos salários no passado, de acordo com:

$$\pi^i(t) = \int_{-\infty}^t s(t-\tau) \omega(\tau) d\tau$$

onde os pesos $s(t-\tau)$ são dados por:

$$s(t-\tau) = \theta e^{-\theta(t-\tau)}$$

e a soma dos mesmos é igual a 1:

$$\int_{-\infty}^t s(t-\tau) d\tau = 1$$

Derivando-se (1) com relação ao tempo e levando-se em conta (2), obtém-se:

$$\dot{\omega} = \theta \delta h + \delta \dot{h}$$

Os preços são determinados a partir de um *mark-up* constante sobre os custos unitários da produção. Segue-se, então, que a variação da taxa de inflação é igual a:

$$\dot{\pi} = \theta \delta h + \delta \dot{h}$$

A equação de demanda agregada, obtida combinando-se as curvas IS e LM, pode ser escrita como:

$$h = -a + b \ln m + c \pi^e$$

onde a , b e c são parâmetros positivos, c representa o efeito Mundell e b o efeito Keynes, m é o encaixe real (M/P) e π^e é a taxa de inflação esperada.

Admitindo-se previsão perfeita no mercado de ativos financeiros, a derivada de h com relação ao tempo é dada por:

$$\dot{h} = b \frac{\dot{m}}{m} + c \dot{\pi}$$

Substituindo-se as expressões de \dot{h} e de h na equação da aceleração da inflação ($\dot{\pi}$), obtém-se:

$$\dot{\pi} = \frac{\delta}{1 - \delta c} \left[-a\theta + b\theta \ln m + c\theta\pi + b\frac{\dot{m}}{m} \right] \quad (3)$$

Esta equação sintetiza o comportamento da economia, no mercado de bens e serviços, no mercado de moeda, na formação de preços e na determinação dos salários no mercado de mão-de-obra. Para se completar o modelo, é preciso especificar o regime das políticas monetária e fiscal, o que será feito na seção seguinte.

A aceleração da inflação neste modelo ocorre porque existe excesso de demanda ($h > 0$) ou porque a capacidade ociosa da economia está diminuindo ($h > 0$). Nas experiências hiperinflacionárias de vários países, observaram-se três fatos estilizados: *a*) a capacidade ociosa aumentou; *b*) o salário real diminuiu; e *c*) a dispersão de preços relativos também aumentou. Estes fatos podem ser acomodados numa curva de Phillips que siga as sugestões de Friedman (1977), de acordo com a seguinte especificação:

$$\pi_t = (1 + \alpha) \pi_t^e + \delta G(h_t)$$

onde α e δ são parâmetros e $G(h)$ é uma função com as seguintes propriedades: $G(0) = 0$, $G'(h) > 0$. Quando α for positivo, existirá uma correlação positiva, no longo prazo, entre inflação e capacidade ociosa, pois, se $\pi_t^e = \pi_t$, tem-se que:

$$\pi_t = -\frac{\delta}{\alpha} G(h_t)$$

O termo $\alpha \pi_t^e$ da curva de Phillips pode ser interpretado como uma *proxy* para o efeito do aumento da dispersão de preços na taxa de inflação, e é plausível que o coeficiente α varie com a própria taxa de inflação.

Friedman (1977) descreveu três fases no desenvolvimento da curva de Phillips: na primeira, admitiu que o parâmetro α estaria compreendido entre zero e menos um ($-1 < \alpha < 0$) e que, portanto, existiria uma relação de trocas, no longo prazo, entre capacidade ociosa e inflação; na segunda, argumentou que o coeficiente α era igual a zero e que inexistiria, no longo prazo, qualquer relação de trocas entre inflação e capacidade ociosa; na terceira, o desenvolvimento teórico levaria a uma curva de Phillips em que a inflação seria prejudicial ao nível de atividade, e a neutralidade da moeda no longo prazo não se verificaria, como acontece quando a curva de Phillips é vertical.

A combinação da curva de Phillips anterior fazendo-se $G(h) = h$ com um mecanismo que supõe inércia no sistema de preços, como o de expectativas adaptativas:

$$\dot{\pi}^e = \theta (\pi - \pi^e)$$

conduz à seguinte equação para a aceleração da taxa de inflação:

$$\dot{\pi} = \alpha \theta \pi + \delta \theta h + \delta \dot{h}$$

Substituindo-se h e \dot{h} da equação de demanda agregada nesta expressão, obtém-se:

$$\dot{\pi} = \frac{\delta}{1 - \delta c} \left(-a \theta + b \theta \ln m + \left(c + \frac{\alpha}{\delta} \right) \theta \pi + b \frac{\dot{m}}{m} \right)$$

que é igual à equação (3) quando $\alpha = 0$. A análise que será apresentada nas próximas seções utiliza a especificação da equação (3). Todavia, os resultados qualitativos permanecem os mesmos quando se usa esta equação de $\dot{\pi}$, pois as duas equações não são diferentes do ponto de vista formal, e o modelo é consistente com os fatos estilizados que ocorreram nas hiperinflações.

3 - Equilíbrio e dinâmica da inflação com déficit público financiado por moeda

O déficit público real é constante e inteiramente financiado pela emissão de moeda:

$$f = \frac{G - T}{P} = \frac{\dot{M}}{P}$$

onde G é o total das despesas do governo, T a receita tributária, P o índice de preços e \dot{M} o acréscimo do estoque nominal de moeda. Derivando-se com relação ao tempo ambos os membros da identidade $m \equiv M/P$ e substituindo-se o valor de \dot{M}/P dado pela equação anterior, obtém-se:

$$\dot{m} = f - m \pi \tag{4}$$

Substituindo-se este valor de \dot{m} na equação (3), resulta:

$$\dot{\pi} = \frac{\delta}{1 - \delta c} \left[-a \theta + b \theta \ln m + (c \theta - b) \pi + \frac{b f}{m} \right] \tag{5}$$

O modelo de inflação é formado pelo sistema de equações diferenciais (4) e (5). Os pontos de equilíbrio ($\dot{m} = 0$ e $\dot{\pi} = 0$) são obtidos pelas soluções da seguinte equação:

$$g(m) = m(a - b \ln m) = cf$$

A condição necessária e suficiente para que existam dois pontos de equilíbrio (m_A, π_A) e (m_B, π_B) é que:

$$f < \frac{b}{c} e^{\frac{a-b}{b}}$$

Nesta seção consideramos apenas o caso em que esta desigualdade é satisfeita. Segue-se, então, que:

$$m_A < e^{\frac{a-b}{b}} < m_B < e^{\frac{a}{b}}$$

No Gráfico 2 observamos que m_A cresce e m_B decresce quando o déficit público real (f) aumenta. Além disso, temos que $m'_A(f) > 0$ e $m'_B(f) < 0$ desde que $g'(m) \neq 0$ para $m \neq \exp[(a-b)/b]$. Como os pontos de equilíbrio obedecem à relação:

$$-a\theta + b\theta \ln m + (c\theta - b)\pi + b\pi = 0$$

então $\pi'_A(f) < 0$ e $\pi'_B(f) > 0$. Portanto, π_A decresce e π_B cresce quando f aumenta.

No Gráfico 3 apresentamos as curvas $\dot{m} = 0$ e $\dot{\pi} = 0$ no caso limite em que $f = \frac{b}{c} e^{\frac{a-b}{b}}$, conforme a variação de $\theta c - b$.

No Gráfico 4 apresentamos os diagramas de fase do sistema de equações diferenciais quando existem dois pontos de equilíbrio: A (de inflação elevada) e B (de inflação baixa).

A matriz jacobiana do sistema num ponto (m, π) é dada por:

Gráfico 2

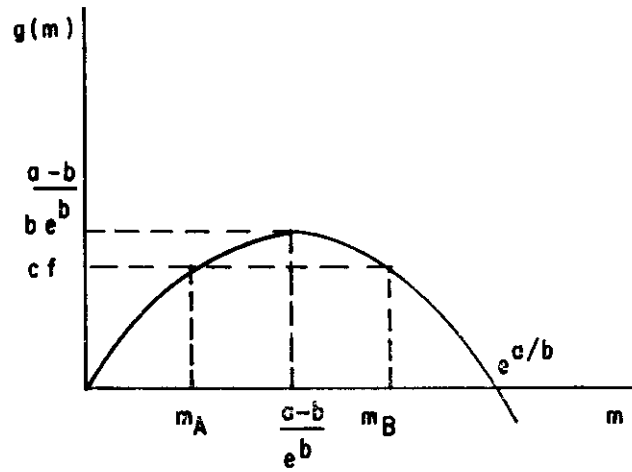


Gráfico 3.A
 $\theta c - b > 0$

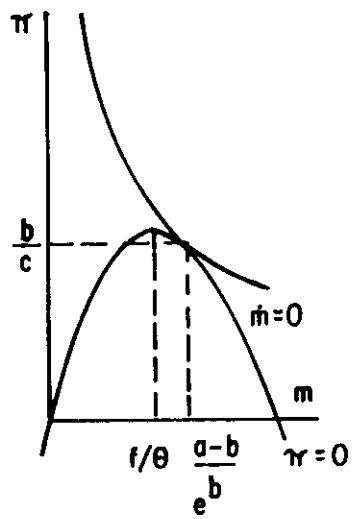


Gráfico 3.B
 $\theta c - b < 0$

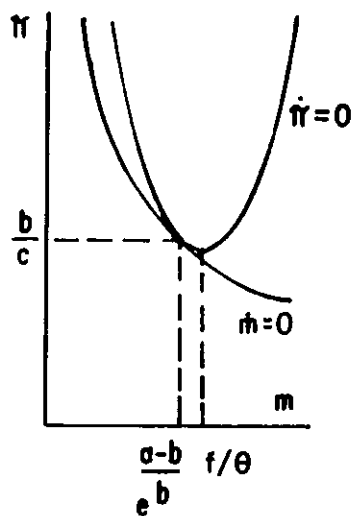


Gráfico 3.C
 $\theta c - b = 0$

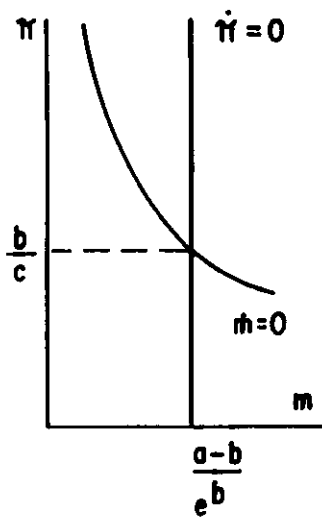


Gráfico 4.A
 $\theta c - b > 0$ e $1 - \delta c > 0$

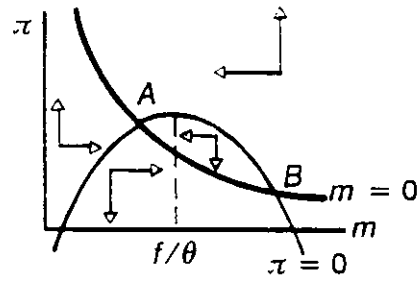


Gráfico 4.B
 $\theta c - b > 0$ e $1 - \delta c < 0$

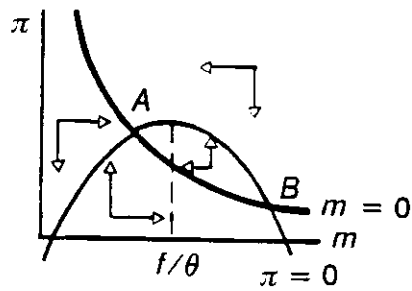


Gráfico 4.C
 $\theta c - b < 0$ e $1 - \delta c > 0$

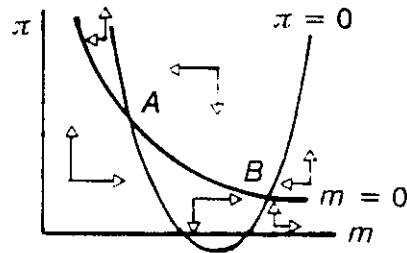


Gráfico 4.D
 $\theta c - b < 0$ e $1 - \delta c < 0$

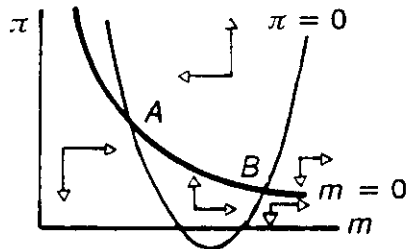


Gráfico 4.E

$$\theta c - b = 0 \text{ e } 1 - \delta c > 0$$

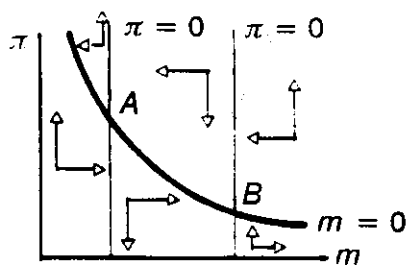


Gráfico 4.F

$$\theta c - b = 0 \text{ e } 1 - \delta c < 0$$

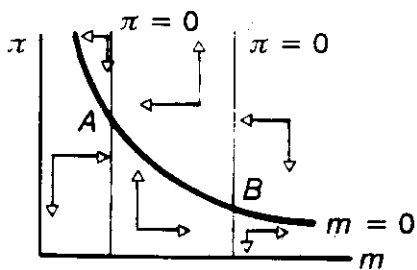


Gráfico 4.G
 $\theta c - b < 0$ e $1 - \delta c = 0$

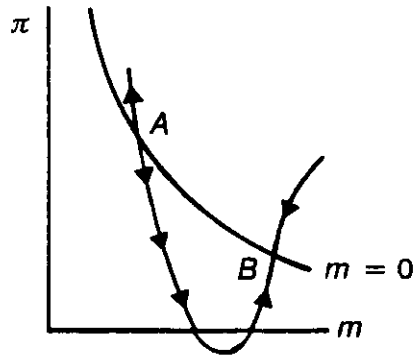
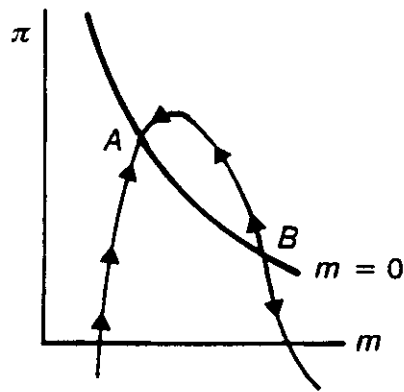


Gráfico 4.H
 $\theta c - b > 0$ e $1 - \delta c = 0$



$$J = \begin{bmatrix} -\pi & -m \\ \frac{\delta b(\theta m - f)}{(1 - \delta c)m^2} & \frac{\delta(\theta c - b)}{1 - \delta c} \end{bmatrix}$$

O determinante e o traço dessa matriz, nos pontos de equilíbrio, são dados, respectivamente, por:

$$|J| = \frac{\delta\theta(b - \pi c)}{1 - \delta c} \quad \text{e} \quad \text{tr}J = -\pi + \frac{\delta(\theta c - b)}{1 - \delta c}$$

Consideremos em primeiro lugar o caso em que $1 - \delta c > 0$. O ponto de equilíbrio A , de inflação elevada, é um ponto de sela porque $|J_A| < 0$, em virtude de $b - \pi_A c < 0$. No ponto de equilíbrio B , de inflação baixa, o determinante da matriz jacobiana é positivo, $|J_B| > 0$, pois $b - \pi_B c > 0$.

Quando $\theta c - b \leq 0$, temos que $\text{tr}J_B < 0$ e, portanto, o ponto B é um poço. Para $\theta c - b > 0$, a condição necessária e suficiente para que exista um valor do déficit público real $f = f_0$ para o qual $\text{tr}J_B = 0$ é que:

$$\gamma = \frac{\delta(\theta c - b)}{1 - \delta c} < \frac{b}{c}$$

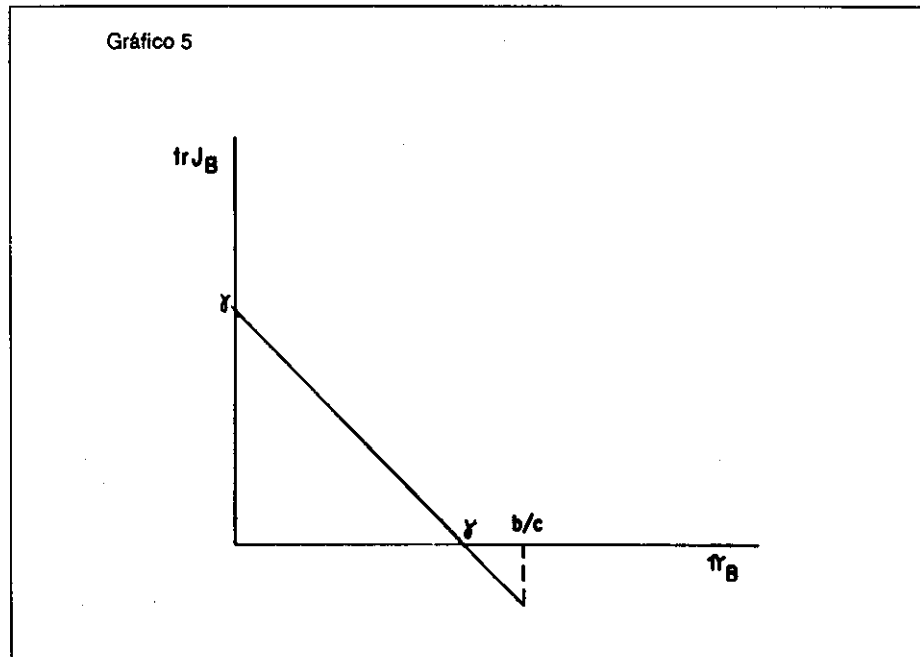
ou, equivalentemente, que:

$$\delta\theta c^2 < b$$

e, neste caso:

$$f_0 = \gamma e^{\frac{a - c\gamma}{b}}$$

Quando $\theta c - b > 0$ e $c\gamma \geq b$, temos $\text{tr}J_B > 0$ e, portanto, o ponto B é uma fonte. Para $\theta c - b > 0$ e $c\gamma < b$, o ponto de equilíbrio B será fonte quando $f < f_0$ e poço para $f > f_0$. O Gráfico 5 mostra, neste caso, como o $\text{tr}J_B$ varia com a taxa de inflação π_B .



Ainda no caso em que $\theta c - b > 0$ e $c\gamma < b$, mostram-se no Apêndice A as verificações necessárias, segundo Marsden e McCracken (1976), que garantem a existência de uma bifurcação de Hopf para o sistema de equações diferenciais quando $f = f_0$. O ponto de equilíbrio B será um fator de atração não-hiperbólico e, para cada parâmetro f suficientemente próximo de f_0 , com $f < f_0$, aparece uma órbita periódica de atração envolvendo a fonte hiperbólica B .

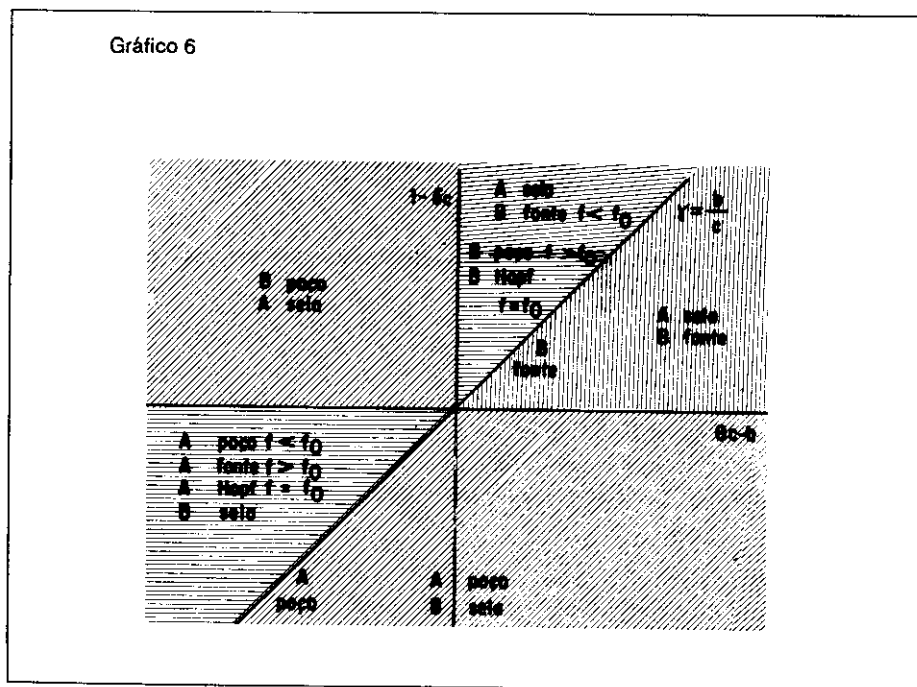
Consideremos agora o caso em que $1 - \delta c < 0$. As afirmações que se seguem foram obtidas repetindo-se a análise anterior, quando se admitiu $1 - \delta c > 0$, levando-se em conta que $c\pi_A > b$ e que π_A decresce quando f aumenta.

O ponto de equilíbrio B , que corresponde à taxa de inflação baixa, é um ponto de sela. No ponto de equilíbrio A , de taxa de inflação elevada, o determinante da matriz jacobiana é positivo, $|J_A| > 0$. Quando $\theta c - b \geq 0$, o ponto de equilíbrio A é um ponto de atração. Para $\theta c - b < 0$, temos que: a) se $c\gamma \leq b$, então o ponto de equilíbrio A é de atração; e b) se $c\gamma > b$, ou, equivalentemente, $\delta\theta c^2 < b$, então o ponto A é um poço para $f < f_0$ e uma fonte para $f > f_0$, onde $f_0 = \gamma \exp\left(\frac{a - c\gamma}{\gamma}\right)$. Quando $f = f_0$, o sistema admite uma bifurcação de Hopf em A , que é um ponto de atração não-hiperbólico. Para f suficientemente próximo de

f_0 , com $f > f_0$, o sistema admite uma órbita periódica de atração envolvendo o ponto A .

O Gráfico 6 contém um resumo da análise desenvolvida até aqui do sistema de equações diferenciais. Quando $1 - \delta c > 0$, chegamos às seguintes conclusões: a) o ponto A de inflação elevada é um ponto de sela; b) para $\theta c - b \leq 0$, o ponto B de inflação baixa é um poço; c) para $\theta c - b > 0$ e $c\gamma < b$, o ponto B é uma fonte se $f < f_0$, envolvido por órbita periódica de atração se f é suficientemente próximo de f_0 , para $f = f_0$ ocorre uma bifurcação de Hopf e B é um ponto de atração, e para $f > f_0$ o ponto B é um poço; e d) quando $\theta c - b > 0$ e $c\gamma \geq b$, o ponto B é uma fonte.

Quando $1 - \delta c < 0$, as conclusões são as seguintes: a) o ponto B de inflação baixa é um ponto de sela; b) para $\theta c - b \geq 0$, o ponto A de inflação elevada é um poço; c) quando $\theta c - b < 0$ e $c\gamma \leq b$, o ponto A é um poço; e d) para $\theta c - b < 0$ e $c\gamma > b$, o ponto A é um poço se $f < f_0$, se $f = f_0$ ocorre uma bifurcação de Hopf e A é um ponto de atração, e se $f > f_0$ o ponto A é uma fonte envolvida por órbita periódica de atração para f suficientemente próximo de f_0 .



4 - Equilíbrio e dinâmica da inflação com controle de oferta de moeda

Esta seção apresenta um modelo semelhante ao da segunda seção, mas com uma diferença no regime das políticas monetária e fiscal. No regime que analisamos em seguida, o Banco Central controla a taxa de expansão monetária e não mais financia o déficit do governo. A equação diferencial do encaixe real é obtida diferenciando-se com relação ao tempo $m = M/P$ e, admitindo-se que a taxa de expansão monetária $\dot{M}/M = \mu$ é o parâmetro de política monetária, tem-se:

$$\dot{m} = m(\mu - \pi) \quad (6)$$

Substituindo-se este valor de \dot{m} na equação (3), resulta:

$$\dot{\pi} = \frac{\delta}{1 - \delta c} \left[-a\theta + b\theta \ln m + (c\theta - b)\pi + b\mu \right] \quad (7)$$

O modelo agora é formado pelo sistema de equações diferenciais (6) e (7), cuja matriz jacobiana no ponto (m, π) é dada por:

$$J = \begin{bmatrix} \mu - \pi & -m \\ \frac{\delta b \theta}{(1 - \delta c)m} & \frac{\delta(c\theta - b)}{1 - \delta c} \end{bmatrix}$$

O determinante e o traço dessa matriz, no ponto de equilíbrio, são iguais a:

$$|J| = \frac{\delta b \theta}{1 - \delta c} \quad e \quad \text{tr}J = \frac{\delta(c\theta - b)}{1 - \delta c}$$

Consideremos em primeiro lugar o caso em que $1 - \delta c < 0$. Nestas circunstâncias, $|J| < 0$, e o ponto de equilíbrio é um ponto de sela. Os Gráficos 7.A e 7.B apresentam os diagramas de fases neste caso, em duas situações, para $b \geq c\theta$.

Consideremos agora o caso em que $1 - \delta c > 0$. Com esta hipótese, $|J| > 0$, e o ponto de equilíbrio será um poço se $\text{tr}J < 0$ e uma fonte quando $\text{tr}J > 0$. A primeira hipótese ocorre quando $c\theta < b$ e a segunda se $c\theta > b$. Os Gráficos 7.C e 7.D mostram os diagramas de fases correspondentes a esses dois casos.

Os Gráficos 7.E e 7.F mostram os diagramas de fases do modelo quando $1 - \delta c = 0$. Nestas circunstâncias, se $b > c \theta$, a economia converge para o ponto de equilíbrio E e, quando $b < c \theta$, o equilíbrio é instável.

O parâmetro θ representa a inércia do sistema de preços e, quando ele aumenta, a inércia diminui. A variação deste parâmetro pode alterar a dinâmica do modelo. Com efeito, quando $\theta = b/c$, o traço da matriz jacobiana do sistema de equações diferenciais se anula, e a derivada do traço com relação ao parâmetro θ é diferente de zero, pois:

$$\frac{d \text{tr}}{d \theta} = \frac{c \delta}{1 - \delta c} > 0$$

Neste caso ($\theta = \frac{b}{c}$ e $1 - c \delta > 0$), na região onde \dot{m} não se anula, as soluções podem ser dadas por $\pi = \pi(m)$, com:

$$\frac{d \pi}{d m} = \frac{-k + \beta \ln m + \frac{\beta \mu}{\theta}}{m(\mu - \pi)}$$

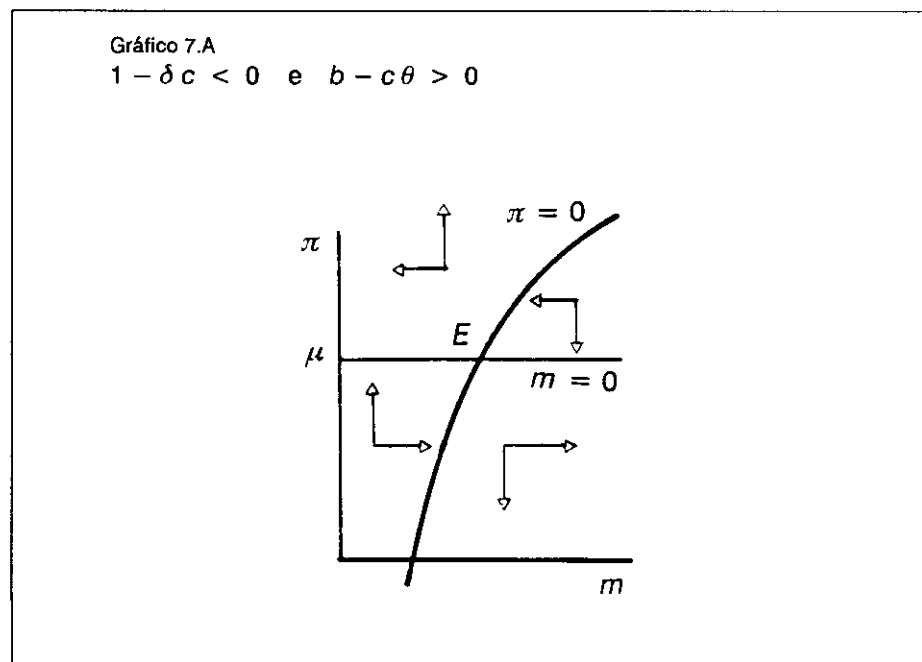


Gráfico 7.B
 $1 - \delta c < 0$ e $b - c\theta < 0$

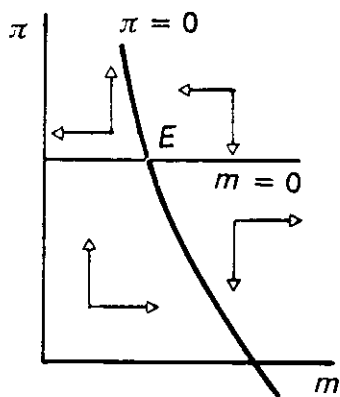


Gráfico 7.C
 $1 - \delta c > 0$ e $b - c\theta > 0$

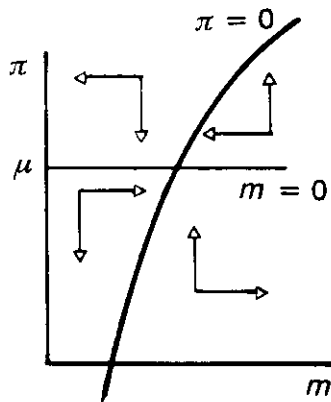


Gráfico 7.D
 $1 - \delta c > 0$ e $b - c\theta < 0$

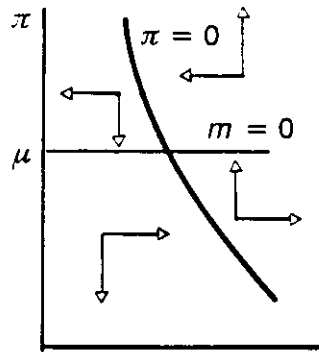


Gráfico 7.E
 $1 - \delta c = 0$ e $b - c\theta > 0$

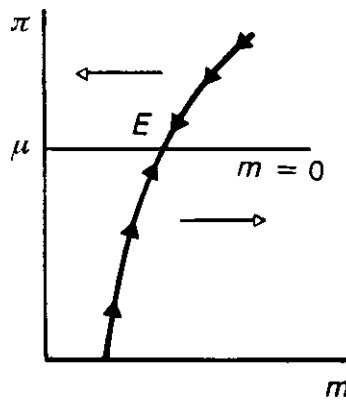
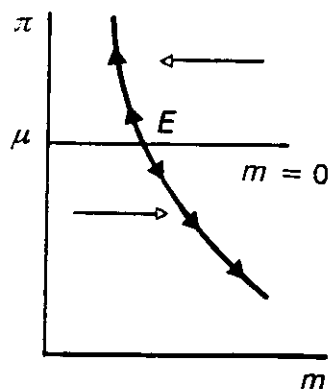


Gráfico 7.F

$$1 - \delta c = 0 \text{ e } b - c\theta < 0$$



onde $\beta = \frac{b\theta\delta}{1-\delta c}$ e $k = \frac{a\theta\delta}{1-\delta c}$. Por integração, concluímos que as soluções obedecem a:

$$\pi^2 - \mu\pi + \frac{\beta}{2}(\ln m)^2 - (k - \frac{\beta\mu}{\theta})\ln m = c$$

onde c é constante e, portanto, as soluções são periódicas.

5 - Conclusões

A tabela a seguir sumaria as várias possibilidades de ocorrência de hiperinflação e hiperdeflação no modelo analisado neste trabalho, de acordo com o regime da política monetária.

Quando o Banco Central financia o déficit público através da emissão de moeda, no regime de política monetária passiva, a hiperinflação pode ocorrer: a) quando $1 - \delta c > 0$ independente do grau de inércia do sistema de preços; e b) quando $1 - \delta c = 0$ e $\theta < b/c$. Nestes dois casos, o equilíbrio de inflação alta é instável.

Possibilidades de hiperinflação e hiperdeflação

Parâmetros do modelo	Regimes de política monetária	
	Passiva	Ativa
$1 - \delta c > 0$	Hiperinflação	Hiperinflação ($\theta > \frac{b}{c}$ e $\gamma < \frac{b}{c}$) Hiperdeflação
$1 - \delta c < 0$	Hiperdeflação	Hiperdeflação ($\theta \neq \frac{b}{c}$) Hiperinflação
$1 - \delta c = 0$	Hiperinflação ($\theta < \frac{b}{c}$) Hiperdeflação ($\theta > \frac{b}{c}$)	Hiperdeflação ($\theta > \frac{b}{c}$) Hiperinflação

Por outro lado, se $1 - \delta c < 0$, não há possibilidade de hiperinflação, o ponto de inflação baixa é instável e existe a possibilidade de hiperdeflação, que também pode ocorrer se $1 - \delta c = 0$ e $\theta > b/c$.

Quando o Banco Central é livre para escolher a taxa de expansão monetária, no regime de política monetária ativa, a hiperinflação pode ocorrer nas seguintes circunstâncias: a) se $1 - \delta c > 0$, $\theta > b/c$ e $\gamma = \frac{(\theta c - b)\delta}{1 - \delta c} < \frac{b}{c}$; b) quando $1 - \delta c < 0$; e c) se $1 - \delta c = 0$ e $\theta > b/c$. Por outro lado, a hiperdeflação é possível quando: a) $1 - \delta c < 0$; b) $1 - \delta c = 0$ e $\theta > b/c$; e c) $1 - \delta c > 0$, $\theta > b/c$ e $\gamma < b/c$.

O regime de política monetária afeta, portanto, não somente o equilíbrio, mas a própria dinâmica do modelo. A evidência empírica dos fenômenos hiperinflacionários é de que eles não ocorreram por combustão espontânea, através do aumento da velocidade da moeda, como aconteceria no regime de política monetária ativa.

Nas hiperinflações observa-se que a taxa de expansão monetária aumenta e que a velocidade-renda da moeda também cresce, contribuindo para a aceleração da taxa

de inflação. Estes fatos são consistentes com o modelo do regime de política monetária passiva. A conclusão a que se chega é de que o combate a um processo hiperinflacionário requer uma mudança no regime de política monetária, através de reformas que permitam ao Banco Central controlar efetivamente o estoque de moeda.

Apêndice A

Neste apêndice faremos as verificações necessárias, segundo Marsden e McCracken (1976), para o caso em que $1 - \delta c > 0$, $\theta c - b > 0$ e $\gamma < b$, que garantem a existência de uma bifurcação de Hopf para o sistema de equações diferenciais (4)-(5) quando $f = f_0$. As curvas:

$$\lambda(f) = \frac{\text{tr} J_B \pm \sqrt{\text{tr}^2 J_B - 4 |J_B|}}{2}$$

dos autovalores no ponto B cortam o eixo imaginário transversalmente em $\lambda(f_0) = \pm i \sqrt{|J_B|}$, já que:

$$\frac{d}{df} \text{Re} \lambda(f) = \frac{1}{2} \frac{d}{df} \text{tr} J_B(f) = -\frac{d \pi_B(f)}{df} \neq 0$$

Por intermédio da mudança de coordenadas, $m = X + m_B$ e $\pi = Y + \pi_B$, que translada a origem de coordenadas para o ponto de equilíbrio B , transformamos o sistema de equações diferenciais, com $f = f_0$ em:

$$\begin{cases} \dot{X} = F_1(X, Y) \\ \dot{Y} = F_2(X, Y) + \varphi(X) \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

onde:

$$F_1 = -XY - \frac{f_0}{\gamma} Y - \gamma X$$

$$F_2 = \beta \ln \left(\frac{\gamma X}{f_0} + 1 \right) + \gamma Y$$

$$\varphi = \frac{\beta f_0}{\theta (X + \frac{f_0}{\gamma})} + \gamma^2 + \beta \ln \frac{f_0}{\gamma} - k$$

$$\beta = \frac{b \theta \delta}{1 - \delta c}; \gamma = \frac{(\theta c - b) \delta}{1 - \delta c}; k = \frac{a \theta \delta}{1 - \delta c}$$

A matriz jacobiana do sistema de equações diferenciais (A.1) na origem é igual a:

$$J = \begin{bmatrix} -\gamma & -\frac{f_0}{\gamma} \\ \frac{\beta \gamma}{f_0} (1 - \frac{\gamma}{\theta}) & \gamma \end{bmatrix}$$

e tem como autovalores $\pm i \sqrt{\lambda_0}$, onde:

$$\lambda_0 = \beta (1 - \frac{\gamma}{\theta}) - \gamma^2 = |J_B| > 0$$

A seguinte mudança de coordenadas:

$$\begin{cases} X = a + B b \\ Y = -A B b \end{cases}$$

onde:

$$B = \frac{\gamma}{\sqrt{\lambda_0}}, A = \frac{\alpha \beta}{f_0}, \lambda_0 = \beta \alpha - \gamma^2, \alpha = 1 - \frac{\gamma}{\theta}$$

transforma o sistema de equações diferenciais (A.1) em:

$$\begin{cases} \dot{a} = F_1 + \frac{1}{A} (F_2 + \varphi) = \hat{X}_1(a, b) \\ \dot{b} = -\frac{1}{A B} (F_2 + \varphi) = \hat{X}_2(a, b) \end{cases}$$

cuja matriz jacobiana na origem é dada por:

$$\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{\lambda_0} \\ -\sqrt{\lambda_0} & 0 \end{bmatrix}$$

Para se aplicar a fórmula $V'''(0)$ de Marsden e McCracken (1976, p.26), tem-se que computar as seguintes derivadas parciais:

$$\frac{\partial^3 \hat{X}_1}{\partial a^3}(0,0) = \frac{1}{A} \frac{2\beta\gamma^3}{f_0^3} \left(1 - \frac{2\gamma}{\theta}\right)$$

$$\frac{\partial^3 \hat{X}_1}{\partial a \partial b^2}(0,0) = \frac{B^2}{A} \frac{2\beta\gamma^3}{f_0^3} \left(1 - \frac{2\gamma}{\theta}\right)$$

$$\frac{\partial^3 \hat{X}_2}{\partial a^2 \partial b}(0,0) = -\frac{1}{A} \frac{2\beta\gamma^3}{f_0^3} \left(1 - \frac{2\gamma}{\theta}\right)$$

$$\frac{\partial^3 \hat{X}_2}{\partial b^3}(0,0) = -\frac{B^2}{A} \frac{2\beta\gamma^3}{f_0^3} \left(1 - \frac{2\gamma}{\theta}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{X}_1}{\partial a^2}(0,0) = \frac{1}{A} \frac{\beta\gamma^2}{f_0^2} \left(\frac{2\gamma}{\theta} - 1\right)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{X}_1}{\partial a \partial b}(0,0) = B \left[A + \frac{1}{A} \frac{\beta\gamma^2}{f_0^2} \left(\frac{2\gamma}{\theta} - 1\right) \right]$$

$$\frac{\partial^2 \hat{X}_2}{\partial b^2}(0,0) = -\frac{B}{A} \frac{\beta\gamma^2}{f_0^2} \left(\frac{2\gamma}{\theta} - 1\right)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{X}_2}{\partial a \partial b}(0,0) = -\frac{1}{A} \frac{\beta\gamma^2}{f_0^2} \left(\frac{2\gamma}{\theta} - 1\right)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{X}_2}{\partial a^2}(0,0) = -\frac{1}{AB} \frac{\beta\gamma^2}{f_0^2} \left(\frac{2\gamma}{\theta} - 1\right)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{X}_1}{\partial b^2}(0,0) = B^2 \left[2A + \frac{1}{A} \frac{\beta \gamma^2}{f_0^2} \left(\frac{2\gamma}{\theta} - 1 \right) \right]$$

$$\frac{\partial^2 \hat{X}_2}{\partial b^2}(0,0) = -\frac{B}{A} \frac{\beta \gamma^2}{f_0^2} \left(\frac{2\gamma}{\theta} - 1 \right)$$

Aplicando-se, então, a fórmula de $V'''(0)$, chega-se à seguinte expressão:

$$V'''(0) = -\frac{3\pi\beta^2\gamma^3\alpha}{4\lambda_0^2\sqrt{\lambda_0}f_0^2} < 0$$

Apêndice B

Com as anotações do apêndice anterior, fazendo-se a mudança de coordenadas $X = \log m$ e $Y = \pi$, o sistema (4)-(5) se escreve como:

$$\begin{cases} \dot{X} = fe^{-X} - Y \\ \dot{Y} = -k + \beta X + \gamma Y + \frac{\beta}{\theta} fe^{-X} \end{cases}$$

As trajetórias deste sistema, num domínio em que X não se anula, são dadas por $Y = Y(X)$, onde:

$$Y'(X) = \frac{-k + \beta X + \gamma Y + \frac{\beta}{\theta} fe^{-X}}{fe^{-X} - Y}$$

Elas não têm assíntota vertical, pois, se $\lim_{x \rightarrow x_0} Y(X) = \pm\infty$, então teríamos $\lim_{x \rightarrow x_0} Y'(X) = -\gamma$.

Além disso, elas não têm assíntota horizontal, pois, se $\lim_{x \rightarrow \infty \text{ ou } -\infty} Y(X) = Y_0$, teríamos:

$$\lim_{y \rightarrow y_0} X'(Y) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{fe^{-X} - Y}{-k + \beta X + \gamma Y + \frac{\beta}{\theta} fe^{-X}} = 0 \text{ ou } \frac{\theta}{\beta}$$

Podemos concluir que existem trajetórias de hiperdeflação para $1 - \delta c < 0$, mas não para $1 - \delta c > 0$ e $\theta c - b \leq 0$, e que existem trajetórias de hiperinflação para $1 - \delta c > 0$, mas não para $1 - \delta c < 0$ e $\theta c - b \geq 0$.

Sendo $\bar{Y}(X) = \frac{1}{\gamma}(k - \beta X - \frac{\beta}{\theta} fe^{-X})$ a curva dos pontos onde $Y' = 0$, temos:

$$(Y - \bar{Y})'(X) = \frac{-k + \beta X + \gamma Y + \frac{\beta}{\theta} fe^{-X}}{fe^{-X} - Y} + \frac{\beta}{\gamma} \left(1 - \frac{f}{\theta} e^{-X}\right)$$

Suponhamos $\theta c - b > 0$, $1 - \delta c > 0$ e $\gamma^2 < \beta$. Na região onde $X > 0$ e $X > \ln \frac{f}{\theta(1 - \frac{\gamma^2}{\beta})}$ temos que $(Y - \bar{Y})'(X) > 0$ se, e somente se, $Y < \varphi(X)$, onde:

$$\varphi(X) = \frac{\beta}{\beta(1 - \frac{fe^{-X}}{\theta}) - \gamma^2} \left[\left(1 - \frac{fe^{-X}}{\theta}\right) fe^{-X} - \frac{\gamma^2}{\beta} \bar{Y}(X) \right]$$

Observamos que o gráfico de φ passa pelos pontos críticos do sistema e que $\lim_{X \rightarrow \pm\infty} \varphi(X) = +\infty$. Como:

$$Y''(X) = \frac{(fe^{-X} - Y)(\beta + \gamma Y' - \frac{\beta}{\theta} fe^{-X}) + (fe^{-X} + Y')(-k + \beta X + \gamma Y + \frac{\beta}{\theta} fe^{-X})}{(fe^{-X} - Y)^2}$$

podemos escrever:

$$(fe^{-X} - Y)Y'' = \omega^2 + (\gamma + fe^{-X})\omega + \beta \left(1 - \frac{fe^{-X}}{\theta}\right) \quad (\text{B.1})$$

onde $\omega = Y'(X)$. Teremos $\Delta = (\gamma + fe^{-X})^2 - 4\beta(1 - \frac{fe^{-X}}{\theta}) < 0$ se, e somente se, $v^2 + 2(\gamma + \frac{2\beta}{\theta})v + \gamma^2 - 4\beta < 0$, onde $v = fe^{-X}$. Como:

$$\bar{\Delta} = 4 \left[(\gamma + \frac{2\beta}{\theta})^2 - \gamma^2 + 4\beta \right] = 16\beta \left(\frac{\gamma}{\theta} + \frac{\beta}{\theta} + 1 \right) > 0$$

então teremos $\Delta < 0$ se $fe^{-X} < \bar{v}$, onde:

$$\bar{v} = -(\gamma + \frac{2\beta}{\theta}) + \sqrt{(\gamma + \frac{2\beta}{\theta})^2 - \gamma^2 + 4\beta}$$

ou seja, desde que $X > \ln \frac{f}{\bar{v}}$.

Concluimos que $Y'' > 0$ na região onde $X > 0$ e $X > \ln \frac{f}{\bar{v}}$. Estas considerações nos levam a deduzir que não existem trajetórias de hiperdeflação no caso $\theta c - b > 0, 1 - \delta c > 0$ e $\gamma^2 < \beta$.

Suponhamos agora que $\theta c - b < 0$ e $1 - \delta c < 0$. Na região onde $X < 0$, $X < \ln \frac{f}{\theta(1 - \frac{\gamma^2}{\beta})}$ e $Y > \varphi(X)$, teremos $(Y - Y')(X) > 0$. Neste caso, também teremos que $\lim_{X \rightarrow \pm\infty} \varphi(X) = +\infty$. Além disso, para X suficientemente pequeno teremos $fe^{-X} < Y(X)$. Logo, $\varphi(X) < Y(X)$.

O discriminante Δ do trinômio (B.1) é positivo para X suficientemente pequeno.

Logo, teremos $(fe^{-X} - Y)Y'' > 0$ desde que $\omega > \bar{\omega} = \frac{-(\gamma + fe^{-X}) + \sqrt{\Delta}}{2}$.

Na região onde $X < 0$, a desigualdade anterior é equivalente a $(\gamma + \bar{\omega})Y < k - \beta X - \frac{\beta}{\theta}fe^{-X} + \bar{\omega}fe^{-X}$. Como $\lim_{X \rightarrow -\infty} (\gamma + \bar{\omega}) = \gamma + \frac{\beta}{\theta} = \frac{\theta c \delta}{1 - \delta c} < 0$, concluimos que $Y'' < 0$ na região onde $X < 0$, X suficientemente pequeno e $Y > \psi(X)$, onde:

$$\psi(X) = \frac{k - \beta X - \frac{\beta}{\theta}fe^{-X} + \bar{\omega}fe^{-X}}{\gamma + \bar{\omega}}$$

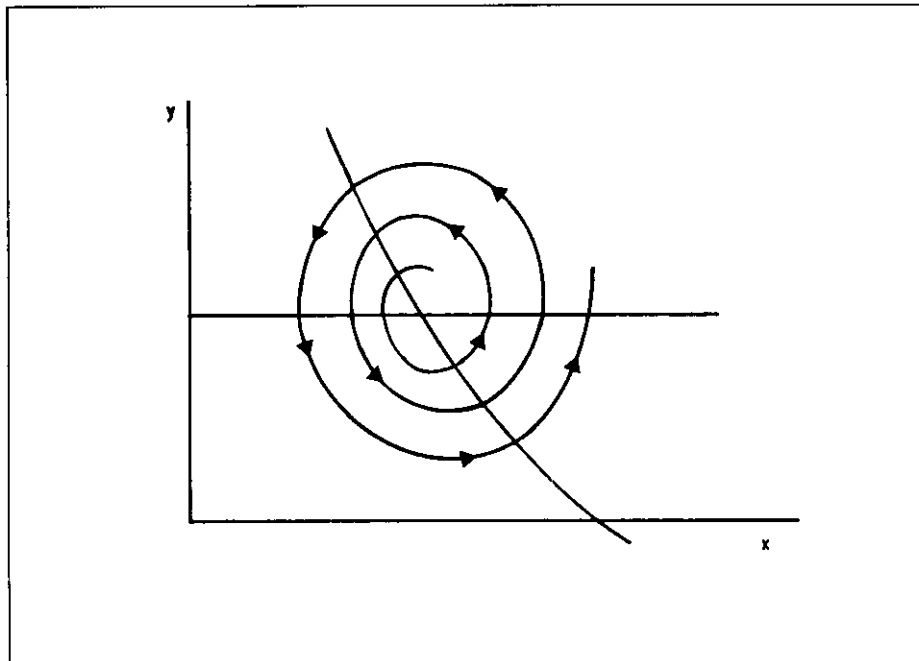
Observamos ainda que, para X suficientemente pequeno, $\psi(X) < Y(X)$. Podemos assim concluir que, para $\theta c - b < 0$ e $1 - \delta c < 0$, não existem trajetórias de hiperinflação.

Com a mesma mudança de coordenadas e as anotações do Apêndice A, (6)-(7) transforma-se em:

$$\begin{cases} \dot{X} = u - y \\ \dot{Y} = -k + \beta X + \gamma Y + \frac{\beta u}{\theta} \end{cases}$$

Suas soluções não admitem assíntota vertical nem horizontal. Logo, no caso $1 - \delta c < 0$ existem trajetórias de hiperinflação e de hiperdeflação.

No caso $1 - \delta c > 0$, $\theta c - b > 0$ e $\gamma^2 < \beta$ estudamos a distância entre $Y = Y(X)$ e $Y(X) = \frac{k - \beta X - \beta u / \theta}{\gamma}$, onde $Y = Y(X)$ representa uma solução e a curvatura de $Y = Y(X)$. Levando em conta que, pelo Critério de Bendixon, não existem órbitas periódicas não-triviais, podemos descrever o comportamento das soluções como mostra o gráfico a seguir e concluir que existe um processo cíclico instável.



Abstract

This paper analyzes the dynamics of hyperinflation in two types of monetary-fiscal policy regime. Under the regime of passive monetary-fiscal policy, the Central Bank is obliged to finance the Treasury's deficit, whereas under the active monetary policy the Central Bank is free to choose the rate of monetary expansion. The economy is characterized by a dynamic system of two differential equations, and its qualitative structure may change when the model's parameters change in value (Hopf bifurcation). The dynamic model presented here generalizes several hyperinflation models known in the literature.

Bibliografia

- BARBOSA, F. H., OLIVA, W. M., SALLUM, E. M. A dinâmica da inflação. *Revista de Economia Política*, v.13, 1993.
- BRUNO, M. Econometrics and the design of economic reforms. *Econometrica*, v.57, p.275-308, 1989.
- BRUNO, M., FISCHER, S. Seignorage, operating rules and the high inflation trap. *Quarterly Journal of Economics*, v.105, p.353-374, 1990.
- CAGAN, P. The monetary dynamics of hyperinflation. In: FRIEDMAN, M. (org.). *Studies in the quantity theory of money*. Chicago: The University of Chicago Press, 1956.
- CAVALCANTI, R. O. *Inflação, estagnação e incerteza: teoria e experiência brasileira*. Rio de Janeiro: BNDES, 1990 (14º Prêmio BNDES de Economia).
- FRIEDMAN, M. Nobel lecture: inflation and unemployment. *Journal of Political Economy*, v.85, n.3, p.471-472, June 1977.
- MARSDEN, J. E., MCCracken, M. *The Hopf bifurcation and its applications*. New York: Springer-Verlag, 1976.

(Originais recebidos em março de 1993. Revisos em maio de 1993.)