# Interpretando variações nos índices de desigualdade de Theil*

LAURO RAMOS**

*Este artigo propõe-se a oferecer uma interpretação mais intuitiva para as variações nos índices de desigualdade de Theil. Para tanto, as transformações ocorridas na distribuição são "sintetizadas" por esquemas simples de taxas e subsídios que, aplicados à distribuição inicial, geram uma distribuição imaginária com a mesma desigualdade da distribuição final, conforme medida por aqueles índices. A título de ilustração a técnica é aplicada às variações observadas na distribuição de rendimentos no Brasil entre 1977 e 1985.*

## 1 - Introdução

Nos últimos anos vários trabalhos [Bonelli e Sedlacek (1989), Reis e Barros (1989), Ramos (1990), entre outros] preocuparam-se com a evolução da desigualdade de renda. A análise desta evolução baseia-se comumente no cálculo de um índice de desigualdade em diferentes períodos, de tal sorte que quando o índice cresce de um período para outro diz-se que, de acordo com ele, a distribuição de renda "piorou" naquele intervalo de tempo, e vice-versa.[1]

Este procedimento, todavia, é de pouca ou nenhuma valia para a avaliação da magnitude das transformações nas rendas individuais responsáveis, em última análise, pela variação nos valores do índice, mesmo quando esta é estatisticamente significativa. Naturalmente esta limitação não é uma característica específica dos índices de desigualdade. Em geral qualquer índice é incapaz de fornecer muita informação a respeito das transformações que acontecem no interior da estrutura a que eles se referem, pelo fato básico de serem medidas agregadas que visam a uma descrição sumária de um conjunto de forças e mecanismos em ação dentro daquele contexto. O aspecto do problema mais específico às medidas de desigualdade é que suas estruturas, no mais das vezes, não são transparentes, tornando extremamente

* Agradeço a Rodolfo Hoffmann e Eleonora Santos pelas valiosas críticas e sugestões em versões anteriores deste trabalho.

** Do IPEA-Rio.

1 Aqui está implícita a hipótese de que não há modificações importantes no processo de mobilidade de renda. Há indicações, no entanto, de que houve variações sensíveis nesta mobilidade em períodos recentes [Pastore (1989), Adelman e Morley (1990)].

difícil a formação de uma "intuição" para o significado de alterações em seus valores.

Neste artigo tentaremos caminhar na direção de prover meios mais familiares e intuitivos para entender a dimensão das mudanças associadas a uma determinada variação nos valores dos índices propostos por Theil (1967). Para tanto, tais variações serão traduzidas, via mecanismos hipotéticos de redistribuição, em um esquema simples de taxas e subsídios que, aplicados à distribuição do ano $t$, gerariam uma distribuição imaginária com o mesmo índice de concentração daquela do ano $t+1$, quando medido por um daqueles índices.

O primeiro destes mecanismos consiste em um esquema de taxações/subsídios seletivos, de acordo com a posição dos indivíduos na distribuição e o hiato entre seus rendimentos e a média populacional. Em termos mais concretos, todos os indivíduos teriam seus rendimentos ($Y_i$) alterados em $\theta(\mu - Y_i)$, onde $0 \leq \theta \leq 1$[2] e $\mu$ corresponde à renda média da população, de tal modo que suas "novas" rendas ($Y_i$') seriam dadas por:

$$Y_i' = Y_i + \theta(\mu - Y_i) = (1-\theta)Y_i + \theta\mu \tag{1}$$

Este esquema de realocação de renda é obviamente compatível com uma seqüência de transferências progressivas do tipo Dalton-Pigou[3] que preservam tanto a média como a ordenação da distribuição original.[4] Ele pode ser entendido como uma taxação seletiva e proporcional (isto é, um imposto apenas para aqueles que estão acima da média, e igual a uma percentagem da parcela acima desta), em conjunto com um subsídio seletivo e proporcional (ou seja, apenas para aqueles abaixo da média, equivalente a uma percentagem fixa de sua distância a ela),[5] que operam no sentido de "melhorar" a distribuição.[6] Naturalmente, quanto maior for $\theta$, maior será a redistribuição e, conseqüentemente, maior a "melhoria" associada.

Alternativamente será analisado um esquema de redistribuição, chamado aqui de "transferências em bloco" por simplicidade, onde $\lambda$.100% da renda dos $(1-p)$.100% ($0<p<1$) indivíduos mais ricos são transferidos para os $p$.100% mais pobres, o que, admitindo-se que arrecadação e distribuição são feitas de modo proporcional dentro de cada estrato, implica a elevação da renda destes em $\tau$.100%,[7] ou seja, as "novas" rendas seriam dadas por:

---

2 Esta restrição assegura que a distribuição assim induzida iria Lorenz-dominar a distribuição original. Assim, os índices de Theil, como qualquer outra medida de desigualdade compatível com o critério de Lorenz [ver Barros e Ramos (1989)], decresceriam após a redistribuição.

3 Se, alternativamente, definimos $-1 \leq \theta \leq 0$, o processo seria equivalente a uma série de transferências regressivas.

4 Vale salientar que o mecanismo proposto por Blackburn (1989) em um exercício semelhante para o coeficiente de Gini induz reversões na ordenação dos indivíduos de acordo com seus rendimentos.

5 Tal esquema pode ser visto, alternativamente, como um imposto proporcional à renda individual ($\theta$. 100% $Y_i$), com posterior repartição eqüitativa do total assim gerado.

6 Ou piorá-la, no caso em que $-1 \leq \theta \leq 0$.

7 Pode-se mostrar que, para valores razoáveis de $\lambda < 0$, a distribuição assim gerada Lorenz-domina a original, o contrário ocorrendo para $\lambda > 0$.

$$Y_i' = (1 + \lambda)Y_i \qquad \text{para o estrato superior (2a)}$$

e:

$$Y_i' = (1 + \tau)Y_i \qquad \text{para o estrato inferior (2b)}$$

## 2 - O índice *T* de Theil

O primeiro índice proposto por Theil, o *T* de Theil, é definido por:

$$T = (1/N) \sum_{i=1}^{N} (Y_i/\mu) \log (Y_i/\mu) \tag{3}$$

onde $N$ é o tamanho da população em questão.

Quando a população, por um critério qualquer, é dividida em, digamos, $G$ grupos distintos, pode-se reescrever $T$ da seguinte maneira:

$$T = \sum_{g=1}^{G} \alpha_g \beta_g \log \alpha_g + \sum_{g=1}^{G} \alpha_g \beta_g T_g \tag{4}$$

onde $\alpha_g = Y_g/\mu$, $\beta_g = n_g/N$, $Y_g$ é a renda média dos membros do grupo $g$, $n_g$ é o número de elementos do $g$-ésimo grupo e $T_g$ é o índice de Theil relativo exclusivamente àquela categoria.

### 2.1 - Taxação proporcional ao excedente em relação à média

Se substituirmos (1) em (3), temos que:

$$T' = (1/N) \sum_{i=1}^{N} \left\{ [(1-\theta)Y_i + \theta\mu]/\mu \right\} \log \left\{ [(1-\theta)Y_i + \theta\mu]/\mu \right\} =$$

$$= (1/N) \sum_{i=1}^{N} [(1-\theta)(Y_i/\mu) + \theta] \log [(1-\theta)(Y_i/\mu) + \theta] =$$

$$= (1/N) \sum_{i=1}^{N} [(1-\theta)\alpha_i + \theta] \log [(1-\theta)\alpha_i + \theta] \qquad (5)$$

Aplicando uma expansão de Taylor de primeira ordem, tem-se que:

$$\log [(1-\theta)\alpha_i + \theta] \cong \log \alpha_i + \theta (1 - \alpha_i)/\alpha_i \qquad (6)$$

Substituindo (6) em (5), chega-se a:

$$T' \cong (1/N) \Big\{ (1-\theta) \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \log \alpha_i + (1-\theta)\theta \sum_{i=1}^{N} (1-\alpha_i) +$$

$$+ \theta \sum_{i=1}^{N} \log \alpha_i + \theta^2 \sum_{i=1}^{N} [(1-\alpha_i)/\alpha_i] \Big\}$$

Enquanto o segundo termo na relação acima é igual a zero, o último é negligível se $\theta^2 < \min \{\alpha_i\}$.[8] Assim, pode-se escrever que:

$$T' \cong (1-\theta) [(1/N) \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \log \alpha_i] + \theta [(1/N) \sum_{i=1}^{N} \log \alpha_i]$$

O primeiro termo entre colchetes nada mais é do que o $T$ de Theil original, e o segundo corresponde ao recíproco da segunda medida proposta por Theil, o $L$ de Theil. Assim:

$$T' \cong (1-\theta)T - \theta L \Rightarrow \Delta T = T' - T \cong -\theta(T + L) \qquad (7)$$

Para relacionar o resultado em (7) com a magnitude da mudança na distribuição entre dois instantes de tempo basta pensar em quão grande deveria ser a taxa ($\theta_T$) que, aplicada às rendas do período inicial, geraria uma distribuição com um índice $T$ de Theil igual ao do período final. Tal medida é prontamente obtida de (7):

8 Esta é uma condição suficiente, mas não necessária, para a maioria das distribuições estatísticas mais comuns. Vale frisar também que esta restrição limita a aplicabilidade do resultado final ao contexto de rendas positivas. Para um $\theta$ igual a 0,1, que, como será visto adiante, corresponde a alterações de monta na distribuição, esta restrição equivale a requerer que as rendas mensais individuais, no caso brasileiro, sejam superiores a 1/20 do salário mínimo, conservadoramente.

$$\theta_T \cong (T_t - T_{t+1})/(T_t + L_t) \qquad (8)$$

onde $T_t$ e $L_t$ são os índices de Theil para o período inicial e $T_{t+1}$ é o índice para o período final.

## 3 - O índice $L$ de Theil

O segundo índice de Theil, o $L$ de Theil, é definido por:

$$L = \log(\mu/M) = -(1/N)\sum_{i=1}^{N}\log(Y_i/\mu) =$$

$$= -(1/N)\sum_{i=1}^{N}\log\alpha_i \qquad (9)$$

onde $M$ é a média geométrica das rendas individuais.

Quando a população é dividida em $G$ grupos distintos, pode-se reescrever $L$ da seguinte maneira:

$$L = -\sum_{g=1}^{G}\beta_g\log\alpha_g + \sum_{g=1}^{G}\beta_g L_g \qquad (10)$$

onde $\alpha_g = Y_g/\mu$, $\beta_g = n_g/N$, $Y_g$ é a renda média dos membros do grupo $g$, $n_g$ é o número de elementos do $g$-ésimo grupo e $L_g$ é o $L$ de Theil relativo exclusivamente àquele grupo.

### 3.1 - Taxação proporcional ao excedente em relação à média

A nova indicação do índice $L$ de Theil — $L'$ — após a redistribuição de acordo com (1) é dada por:

$$L' = -(1/N)\sum_{i=1}^{N}\log\left\{[(1-\theta)Y_i + \theta\mu]/\mu\right\} =$$

$$= -(1/N)\sum_{i=1}^{N}\log[(1-\theta)\alpha_i+\theta] \tag{11}$$

Substituindo (6) em (11), chega-se a:

$$L' = -(1/N)\sum_{i=1}^{N}\log\alpha_i - \theta(1/N)\sum_{i=1}^{N}[(1-\alpha_i)/\alpha_i] =$$

$$= L - \theta(1/N)\sum_{i=1}^{N}[(1-\alpha_i)/\alpha_i] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta = (L-L')/\left\{(1/N)\sum_{i=1}^{N}[(1-\alpha_i)/\alpha_i]\right\} \tag{12}$$

A partir de (12) tem-se que a taxa ($\theta_L$) que, aplicada às rendas do período inicial, geraria uma distribuição com um índice de $L$ de Theil idêntico ao do período final é:

$$\theta_L \cong (L_t - L_{t+1})/\left\{(1/N)\sum_{i=1}^{N}[(1-\alpha_i)/\alpha_i]\right\} \tag{13}$$

onde $L_t$ e $L_{t+1}$ são os $L$ de Theil para os períodos inicial e final.[9]

Quando a população é dividida em $G$ grupos, a expressão anterior pode, ignorando-se os efeitos da redistribuição no interior de cada grupo,[10] ser reduzida a:

$$\theta'_L \cong (L_t - L_{t+1})/\sum_{g=1}^{G}\left\{[(1-\alpha_g)/\alpha_g]\beta_g\right\} \tag{14}$$

Na verdade $\theta'_L$ é, em termos absolutos, uma superestimativa da verdadeira taxa, na medida em que os efeitos da redistribuição de acordo com (1) no interior de cada grupo são sempre na direção desejada. Isto é, se por exemplo o objetivo da

9 Note-se que o denominador em (13) é igual à diferença entre a razão das médias aritmética e harmônica das rendas individuais e a unidade.

10 Isto é, admitindo que $L_g = L'_g$ em (10).

redistribuição é a redução da desigualdade, o efeito dos $\theta$ positivos em (1) é no sentido de reduzir as desigualdades internas de cada grupo. A desconsideração deste impacto traduz-se em taxas maiores que aquelas de fato necessárias. Raciocínio análogo leva à mesma conclusão para o caso onde a meta da redistribuição hipotética é a elevação da desigualdade. É claro, uma possível preferência por $\theta'_L$ em relação a $\theta_L$ poderia ser explicada pela diferença no grau de dificuldade envolvido nos cálculos (como, por exemplo, a natureza dos dados e os custos computacionais).[11]

## 3.2 - Transferências em bloco

Suponhamos que a população é agrupada em dois blocos quaisquer. Sejam $p_1$ e $s_1$ as frações da população e da renda total relativas ao primeiro grupo, e $p_2 = 1 - p_1$, $s_2 = 1 - s_1$ aquelas relativas ao segundo.[12] Seja $L$ o grau de concentração de renda nesta população conforme o $L$ de Theil. Podemos então escrever que:

$$L = -[p_1 \log(s_1/p_1) + p_2 \log(s_2/p_2)] + p_1 L_1 + p_2 L_2 \tag{15}$$

Se os membros do segundo grupo são taxados em $\lambda.100\%$ e os do primeiro subsidiados em $\tau.100\%$, conforme descrito por (2), a mudança no $L$ de Theil é dada por:[13]

$$L - L' = \Delta L = p_1 \log(1 + \tau) + p_2 \log(1 + \lambda) \cong$$

$$\cong p_1 \tau + (1 - p_1)\lambda \Rightarrow \lambda \cong (\Delta L - p_1 \tau)/(1 - p_1) \tag{16}$$

Para que a renda total permaneça inalterada tem-se que:

---

11 Desnecessário frisar, precisão e simplicidade caminham em direções opostas. Nesta linha, a seguinte expressão, obtida diretamente da anterior, fornece uma forma extremamente simples para o cálculo de um "limite superior" para $\theta_L$:

$$\theta_L^{\mu} \cong \frac{s^*(1 - s^*)}{(p^* - s^*)^2} (L_t - L_{t+1})$$

onde $s^*$ e $p^*$ são, respectivamente, as frações da população cujas rendas estão abaixo de $\mu$ e da renda em poder desta.

12 Isto é, os dois grupos correspondem a uma partição da população. Esta hipótese torna ligeiramente mais simples a manipulação algébrica do problema, mas não é necessária. O único requerimento para o exercício é que os dois grupos sejam mutuamente exclusivos.

13 Note-se que tal redistribuição não altera $p_1$ nem $L_1$ e $L_2$.

$$(1-\tau)s_1+(1+\lambda)s_2=1 \Rightarrow \lambda=-\tau s_1/(1-s_1) \quad (17)$$

De (16) e (17) tem-se de imediato que:

$$\tau \cong \frac{(1-s_1)}{(p_1-s_1)}\Delta L \quad \text{e} \quad \lambda \cong \frac{s_1}{(p_1-s_1)}\Delta L \quad (18)$$

Assim, os valores de $\lambda$ e $\tau$ que geram uma distribuição hipotética com um $L$ de Theil equivalente ao da distribuição no ano $t+1$, via taxação dos "mais ricos" no ano $t$ em $\lambda$.100%, juntamente com um subsídio aos "mais pobres" de $\tau$.100%, são dados por:

$$\tau \cong \frac{(1-s_1)}{(p-s_1)}(L_t-L_{t+1}) \quad \text{e} \quad \lambda \cong \frac{s_1}{(p-s_1)}(L_t-L_{t+1}) \quad (19)$$

## 4 - Ilustração: resultados para a evolução da distribuição de rendimentos no Brasil entre 1977 e 1985

Com o objetivo de ilustrar a aplicação desta técnica foram calculadas as taxas/subsídios a incidir sobre a diferença das rendas em relação às médias de modo a replicar as variações na distribuição de rendimentos no Brasil entre 1977 e 1985. Na tabela a seguir são apresentados os índices de Theil para o período em questão, conforme calculados em Ramos (1990)[14] a partir das PNAD (Pesquisas Nacionais por Amostra de Domicílios), bem como os "$\theta$" associados ao $T$ de Theil e ao $L$ de Theil — $\theta_T$ e $\theta'_L$[15] respectivamente — para as variações anuais e quadrienais.

Desta maneira, a evolução da desigualdade entre 1981 e 1985, por exemplo, pode ser sintetizada por um processo de transferências regressivas de renda da base para o topo da escala salarial equivalente a valores entre 5,6% (no caso do $L$ de Theil) e 7,3% (para o $T$ de Theil ) da diferença entre os salários individuais e a média. Analogamente, as alterações na distribuição de rendimentos entre 1977 e 1981 podem ser entendidas como sendo geradas por um processo de transferências

14 Para os homens entre 18 e 65 anos, ocupados, trabalhando 20 horas ou mais por semana em regiões urbanas.

15 Para o cálculo de $\theta'_L$ tomou-se por base a distribuição por decis em 1981, conforme apresentada em Ramos (1990, Tabela 2.1), de tal sorte que o denominador da expressão (14) assume o valor 1,148.

| Ano | $T$ | $L$ | $\theta_T$ (%) | | $\theta'_L$ (%) | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1977 | 0,607 | 0,511 | | | | |
| 1978 | 0,571 | 0,488 | 3,2 | | 2,0 | |
| 1979 | 0,560 | 0,486 | 1,0 | | 0,2 | |
| 1981 | 0,513 | 0,457 | 4,5 | 8,4[a] | 2,5 | 4,7[a] |
| 1982 | 0,527 | 0,465 | -1,4 | | -0,7 | |
| 1983 | 0,565 | 0,496 | -3,8 | | -2,7 | |
| 1984 | 0,558 | 0,498 | 0,7 | | -0,2 | |
| 1985 | 0,584 | 0,521 | -2,5 | -7,3[b] | -2,0 | -5,6[b] |

[a] Relativo ao período 1977/81.
[b] Relativo ao período 1981/85.

progressivas, com taxas sobre o excedente em relação à média entre 4,7 e 8,4% para os $L$ e $T$ de Theil, respectivamente.[16]

Para finalizar, vale notar que, como estamos ainda lidando com medidas agregadas, não podemos afirmar muito além de que taxas mais altas estão relacionadas com alterações mais substantivas na distribuição, enquanto taxas pequenas revelam mudanças de menor envergadura. É certo porém que, apesar de fornecer uma idéia bastante crua das transformações acontecidas, esta métrica alternativa tem um maior apelo intuitivo para a compreensão da magnitude destas do que a simples comparação dos valores dos índices de concentração.

**Abstract**

*This paper offers an alternative and more intuitive way of interpreting variations in the two Theil inequality indices — Theil* T *and Theil* L*. The changes in the distribution are summarized by simple schemes of taxes and subsidies that replicate the observed changes in inequality, as measured by those indices. The technique is applied, for the sake of illustration, to the evolution of the Brazilian earnings distribution from 1977 to 1985.*

16 As menores taxas/subsídios encontradas para o $L$ de Theil, mesmo tratando-se de superestimativas, são uma conseqüência da maior sensibilidade deste índice a alterações na cauda inferior, conforme discutido em Barros e Ramos (1989). Diferenças nas sensibilidades a transferências de renda são também responsáveis pelas discrepâncias nas indicações destes índices para a transição entre 1983 e 1984, assim como entre 1977 e 1985.

## Bibliografia

ADELMAN, I., MORLEY, S. *Measuring income mobility with census data*. North-East Development Economics Conference, Economic Growth Center, Yale University, 1990, mimeo.

ANAND, S. *Inequality and poverty in Malaysia: measurement and decomposition*. New York: Oxford University Press, 1983.

BARROS, R. P. de, RAMOS, L. *Medidas de desigualdade*. Rio de Janeiro: Terceira Escola de Séries Temporais e Econometria, 1989.

BLACKBURN, L. Interpreting the magnitude of changes in measures of income inequality. *Journal of Econometrics*, v. 42, p. 21-25, 1989.

BONELLI, R., SEDLACEK, G. Distribuição de renda: evolução no último quarto de século. In: BARROS, R. P. de, SEDLACEK, G. (eds.). *Mercado de trabalho e distribuição de renda: uma coletânea*. Rio de Janeiro: IPEA/RJ, 1989.

PASTORE, J. Inequality and social mobility: ten years later. In: BACHA, E., KLEIN, H. (eds.). *Social change in Brazil, 1945-1985: the incomplete transition*. Albuquerque: University of New Mexico Press, 1989.

RAMOS, L. *The distribution of earnings in Brazil: 1976-1985*. Berkeley: University of California, 1990. (Dissertação de Doutorado).

REIS, J. G. A., BARROS, R.P.de. *Um estudo da evolução das diferenças regionais da desigualdade no Brasil*. Rio de Janeiro: IPEA/RJ, 1989 (Texto para discussão interna, 178).

THEIL, H. *Economics and information theory*. Amsterdam: North-Holland, 1990.

*(Originais recebidos em dezembro de 1989. Revistos em março de 1991.)*