

# AVALIANDO TRÊS ESPECIFICAÇÕES PARA O FATOR DE DESCONTO ESTOCÁSTICO ATRAVÉS DA FRONTEIRA DE VOLATILIDADE DE HANSEN E JAGANNATHAN: UM ESTUDO EMPÍRICO PARA O BRASIL

Eurilton Araújo  
Do Ibmec São Paulo

Este trabalho estuda três modelos de apreçamento de ativos baseados em consumo. A plausibilidade do fator de desconto estocástico gerado por cada um desses modelos é avaliada através da fronteira de volatilidade proposta por Hansen e Jagannathan (1991). Os modelos estudados envolvem um agente representativo, o qual decide seu perfil de consumo ao longo do tempo, bem como a alocação de sua riqueza entre um ativo arriscado e outro sem risco. Desse modo, o fator de desconto estocástico dos modelos está associado à taxa marginal de substituição intertemporal, advinda da especificação da função utilidade para o referido agente. Neste trabalho, avaliamos três especificações, já clássicas na literatura, para a função utilidade: a função com coeficiente de aversão relativa ao risco constante; a Formação de Hábito; e a especificação proposta por Epstein e Zin (1991). Os testes baseados na fronteira não conseguem discriminar qual desses fatores de desconto descreve melhor os dados e corroboram as evidências já existentes, as quais apontam para a inexistência de um *Equity Premium Puzzle* no Brasil.

## 1 INTRODUÇÃO

Este artigo procura comparar três especificações para o fator de desconto estocástico em um modelo de formação de preços de ativos baseado em consumo. O modelo considerado consiste em uma economia, sem produção, habitada por um agente representativo. Esse agente decide seu perfil de consumo ao longo do tempo e aloca sua riqueza entre um ativo arriscado e outro sem risco. Nesse contexto, o fator de desconto estocástico depende da taxa marginal de substituição intertemporal associada à especificação da função utilidade para o agente representativo.

Neste artigo, três especificações para a função utilidade são consideradas: a função com coeficiente de aversão relativa ao risco constante, a Formação de Hábito e a utilidade proposta por Epstein e Zin (1991). O modelo básico de apreçamento de ativo é estimado, para cada tipo de função utilidade considerada, via método generalizado dos momentos. Os fatores de desconto estocásticos associados às utilidades estudadas são comparados e avaliados de acordo com a capacidade de cada um deles de satisfazer as restrições impostas pela fronteira de volatilidade derivada por Hansen e Jagannathan (1991).

Este ensaio complementa a contribuição de Soriano (2002), o qual se dedica apenas ao estudo do fator de desconto estocástico associado à utilidade que apresenta coeficiente de aversão relativa ao risco constante. Em Soriano (2002), como aqui, as estatísticas de teste de Burnside (1994) são empregadas para a avaliação da referida especificação para a função utilidade.

Um outro trabalho relacionado a este artigo é Issler e Piqueira (2000). Esses autores estudam as mesmas classes de preferências analisadas aqui. Todavia, restringem-se a avaliar a validade das diferentes especificações, testando sobreidentificação, em um contexto de estimação via método generalizado dos momentos (MGM).

A novidade deste trabalho, no contexto brasileiro, é abordar outras classes de preferências além daquela caracterizada pela utilidade com coeficiente de aversão relativa ao risco constante, usando o método da fronteira de volatilidade de Hansen e Jagannathan.

Este estudo é uma extensão tanto de Soriano (2002) quanto de Issler e Piqueira (2000). A extensão relativa a Soriano (2002) é a análise das preferências tipo Kreps-Porteus e Hábito Externo. Quanto a Issler e Piqueira (2000), a extensão é o uso dos testes baseados na fronteira de volatilidade de Hansen e Jagannathan. Desse modo, é possível avaliar se a não-rejeição de quaisquer das especificações mencionadas, resultado encontrado por Issler e Piqueira (2000), é uma conclusão robusta ao tipo de metodologia econométrica empregada para testar o fator de desconto estocástico.

O trabalho mostra que é difícil discriminar entre as diferentes especificações para o fator de desconto estocástico com a ajuda de testes baseados na fronteira de volatilidade de Hansen e Jagannathan. Todavia, um dos testes de fronteira considerados apontou alguma evidência em favor do fator de desconto estocástico associado à Formação de Hábito como sendo aquele mais adequado para representar o conjunto de dados em estudo.

No mais, o trabalho está estruturado em quatro seções, além desta introdução. Na Seção 2, a fronteira de volatilidade é apresentada e sua relação com o *Equity Premium Puzzle* é estabelecida. Na Seção 3, a base de dados empregada é descrita e as diferentes especificações para a função utilidade são discutidas. A Seção 4 emprega os procedimentos de teste descritos em Burnside (1994) e avalia os candidatos a fator de desconto estocástico em termos da habilidade de cada um deles em satisfazer a restrição imposta pela fronteira de volatilidade. Por fim, a Seção 5 apresenta as conclusões do artigo.

## 2 A FRONTEIRA DE VOLATILIDADE E O EQUITY PREMIUM PUZZLE

A fronteira de volatilidade pode ser derivada a partir da equação fundamental para o apreçamento de ativos em um modelo com um agente representativo, a qual é dada por:

$$v = E[M_t(v + R_t)] \quad (1)$$

onde  $M_t$  é o fator de desconto estocástico,  $R_t$  é o vetor de retorno dos ativos em  $t$ , e  $\mathbf{1}$  é o vetor onde cada elemento é 1 e cuja dimensão é igual ao número de ativos considerados. Por fim,  $E$  denota o operador valor esperado, dado o conjunto de informação em  $t - 1$ .

Hansen e Jagannathan tratam a média não-condicional do fator de desconto estocástico, denotada por  $\bar{M}$ , como um parâmetro desconhecido e propõem um candidato para fator de desconto estocástico que independe do modelo considerado. Esse candidato, formado a partir de uma combinação linear de retornos para os ativos em questão, é dado por:

$$M_t^*(\bar{M}) = \bar{M} + (R_t - E(R_t))' \beta$$

A expressão para  $\beta$  é:

$$\beta = \Omega^{-1} (\mathbf{1} - \bar{M}E(\mathbf{1} + R_t))$$

onde  $\Omega$  denota a matriz de variância e co-variância para o conjunto de retornos considerado.

A variância de  $M_t^*(\bar{M})$  é dada por:

$$\text{Var}(M_t^*(\bar{M})) = (\mathbf{1} - \bar{M}E(\mathbf{1} + R_t))' \Omega^{-1} (\mathbf{1} - \bar{M}E(\mathbf{1} + R_t))$$

Hansen e Jagannathan mostram que qualquer fator de desconto estocástico  $M_t(\bar{M})$  satisfazendo a equação (1) deve respeitar a seguinte relação:

$$\text{Var}(M_t(\bar{M})) \geq \text{Var}(M_t^*(\bar{M})) \quad (2)$$

O lado direito da equação (2) constitui um limite inferior para qualquer candidato a fator de desconto estocástico com média  $\bar{M}$ . O gráfico de  $\text{Var}(M_t^*(\bar{M}))$ , como função de  $\bar{M}$ , descreve uma fronteira para a volatilidade de qualquer candidato a fator de desconto estocástico.

Para uma exposição mais completa, as referências são Hansen e Jagannathan (1991) e Campbell, Lo e MacKinley (1997), que oferecem um tratamento de livro-texto ao assunto.

Utilizando a equação (2), é possível avaliar candidatos alternativos a fator de desconto estocástico. Com efeito, o candidato é rejeitado caso não consiga satisfazer a equação (2). Além disso, caso  $M_t(\bar{M})$  possa ser escrito em função de certos

parâmetros, os quais possuem um significado econômico, é possível definir uma região no espaço de parâmetros onde o modelo em questão é capaz de gerar um fator de desconto estocástico que obedeça a equação (2). Assim, é possível avaliar a plausibilidade econômica para os valores dos parâmetros e decidir se um modelo é efetivamente capaz de produzir um fator de desconto estocástico legítimo sob condições empiricamente plausíveis em termos de parametrização.

A restrição (2) é o ponto de partida para a construção de testes estatísticos, os quais devem levar em conta a variabilidade amostral. Cecchetti *et alii* (1994) e Burnside (1994) discutem testes estatísticos para avaliar se a restrição na equação (2) é respeitada por um candidato a fator de desconto estocástico. Este trabalho emprega procedimentos de teste descritos em Burnside (1994) e que serão discutidos com mais detalhes na Seção 4.

A fronteira de volatilidade descrita anteriormente está intimamente relacionada com a literatura sobre *Equity Premium Puzzle*. Mehra e Prescott (1985) identificaram um prêmio de risco entre ações e títulos de renda fixa do governo americano de cerca de 6%, o qual era inconsistente com um modelo de formação de preços de ativos que utilizasse função de utilidade com aversão relativa ao risco constante (ARRC) para valores considerados razoáveis para o coeficiente de aversão relativa ao risco. A tentativa de reconciliar dados com a teoria impulsionou uma literatura, cujas principais contribuições se encontram sintetizadas em Kocherlakota (1996) e Mehra (2003). Essa literatura possui duas vertentes. A primeira relaciona-se com a busca de especificações alternativas para a função utilidade, capaz de separar os efeitos da aversão ao risco dos advindos de maior ou menor elasticidade intertemporal do consumo. A segunda vertente rompe com as hipóteses de mercados completos e de ausência de fricções relativas à transação de ativos. Segundo Kocherlakota (1996), ambas as vertentes não conseguiram uma resposta satisfatória, pois as classes de preferências alternativas estudadas ainda demandam uma aversão ao risco bastante elevada e o impacto quantitativo de ausência de mercados completos e a inclusão de custos de transação contribuíram pouco para que modelos com essas características gerassem um prêmio de risco de mesma magnitude do observado nos dados americanos.

A literatura resumida está relacionada às fronteiras de volatilidade, pois fatores de descontos estocásticos advindos de modelos que demandam um grau moderado de aversão ao risco, em geral, não conseguem satisfazer a restrição imposta pela fronteira de Hansen e Jagannathan (1991). Desse modo, a fronteira foi empregada, primeiramente, como instrumento gráfico para mostrar que fatores de desconto estocásticos só seriam capazes de satisfazer as restrições impostas pela fronteira quando a aversão ao risco fosse elevada. Em um segundo estágio, a partir da fronteira foram elaborados testes econométricos, os quais complementam a abordagem

tradicional de se usar testes de sobreidentificação nas estimativas que empregam as equações de Euler para o agente representativo.

No Brasil, a evidência aponta para a inexistência de *Equity Premium Puzzle*, conforme Sampaio (2002), Issler e Piqueira (2000) e Soriano (2002). Todas essas evidências contra o *Equity Premium Puzzle* para o Brasil foram encontradas de modo independente e simultâneo (entre 1999 e 2000). Mais recentemente, Catalão e Yoshino (2004) apresentam novas evidências que também concluem pela inexistência do *Equity Premium Puzzle* no Brasil.

No contexto do debate acerca do *Equity Premium Puzzle*, este trabalho fornece evidências adicionais a esse respeito ao estudar classes de preferências que ainda não foram testadas no Brasil via procedimentos construídos a partir da fronteira de Hansen e Jagannathan (1991). Assim, os resultados aqui apresentados tornam mais fortes as evidências contra um *Equity Premium Puzzle* para o Brasil.

### 3 DADOS E MODELOS

#### 3.1 Dados

Os dados empregados foram coletados no Ipeadata e na Bolsa de Valores de São Paulo (Bovespa). No Ipeadata, as séries coletadas foram o índice de preços IGP-DI, a população anual, a taxa *over*-Selic e o consumo das famílias. Na Bovespa, coletamos o índice da Bovespa (Ibovespa).

As séries do Ibovespa e da taxa *over*-Selic são mensais e foram acumuladas de modo a se ter dados trimestrais. Todos os dados, com exceção do consumo das famílias, foram compatibilizados de modo que a base de dados construída possui observações trimestrais de 1974 (primeiro trimestre) a 1999 (quarto trimestre).

Os dados do Ipeadata sobre consumo das famílias, coletados trimestralmente, só existem a partir de 1991. Desse modo, é imperativo construir *proxies* para o consumo das famílias de 1974 até 1990. A seguir, descreveremos a metodologia econométrica empregada para estimar essas observações trimestrais ausentes na amostra inicial.

Primeiramente, a série trimestral de 1991 até 1999 foi deflacionada pelo IGP-DI. Dados acerca do consumo das famílias, com periodicidade anual, existem desde 1947. A série anual também foi deflacionada pelo IGP-DI.

A idéia a ser explorada para a construção de *proxies* para valores trimestrais ausentes na amostra original é justamente a de usar a informação disponível na série anual para tentar obter estimativas para os valores trimestrais não-observados de 1974 até 1990. A estimação desses valores é feita via filtro de Kalman. A metodologia, proposta inicialmente por Harvey e Pierse (1984) e adaptada por Cuche e Hess (2000), será apresentada a seguir.

Considere a seguinte representação em espaço de estados:

$$s_{t+1} = F s_t + C' x_{t+1} + v_{t+1}$$

$$y_t^+ = h' s_t$$

A primeira equação descreve a dinâmica para o vetor de estados, dado por:

$$s_t = [y_t \quad y_{t-1} \quad y_{t-2} \quad y_{t-3}]'$$

onde a variável  $y_t$  denota a série de consumo real trimestral, tanto a parte observável (de 1991 até 1999) quanto a não-observável; e a variável  $x_t$  denota qualquer vetor com séries de tempo relacionadas à série de consumo real trimestral e que sejam potencialmente capazes de melhorar a estimação da parte não-observável da série de consumo real. Por fim,  $y_t^+$  denota a série observável de consumo, isto é, de 1974 a 1990, as componentes de  $y_t^+$  são formadas a partir da série de consumo real anual. De 1991 até 1999,  $y_t^+$  é constituído a partir dos valores já observados para o consumo real trimestral. Assim,  $h'$  é definido do seguinte modo:  $h' = [1 \ 1 \ 1 \ 1]$ , de 1974 até 1990, e  $h' = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$ , de 1991 até 1999.

Essa definição é capaz de levar em conta a restrição de agregação existente entre dados anuais e trimestrais. A partir de 1991 não há necessidade de se considerar a restrição de agregação, uma vez que os dados trimestrais para consumo real são valores observáveis.

O arcabouço econométrico descrito anteriormente, cujo objetivo é gerar *proxies* para o consumo real de 1974 até 1990, foi operacionalizado de dois modos: no primeiro, impomos uma estrutura AR(1) para  $y_t$ ; e no segundo, usamos duas séries potencialmente relacionadas ao consumo real, enquanto componentes de  $x_t$ , além da estrutura AR(1) imposta anteriormente. As séries empregadas foram o consumo residencial de energia e o índice de produção industrial para o setor de bens de consumo.

As duas alternativas já descritas forneceram séries qualitativamente equivalentes. Ademais, os três primeiros trimestres estimados foram descartados e a série de consumo real foi finalmente dessazonalizada via método X-12 do *bureau* de censo americano.

Procedimentos alternativos para a construção da série de consumo real foram considerados. Por exemplo, empregamos o Índice Nacional de Preços ao Consumidor (INPC) como deflator e usamos variáveis *dummies* para dessazonalizar a

série final obtida para o consumo real. As séries resultantes são bastante similares, diferindo pouco do consumo real obtido via procedimento descrito nos parágrafos anteriores. No mais, a série de consumo real foi transformada para valores *per capita*, através do uso da série anual interpolada para população.

Por fim, a base de dados empregada vai de 1975 até 1999 e é constituída por uma série de crescimento de consumo, denotada por  $C_g$ , além da taxa *over-Selic*, denotada por  $R_f$  e do Ibovespa, denotado por  $R_{ibo}$ .

As Tabelas 1 e 2 exibem algumas estatísticas descritivas relacionadas às séries descritas anteriormente. Os Gráficos 1, 2 e 3 mostram as séries temporais  $C_g$ ,  $R_f$  e  $R_{ibo}$ .

TABELA 1  
ESTATÍSTICAS DESCRITIVAS

Variável	Média	Desvio-padrão	Assimetria	Curtose
$C_g$	0,999251	0,030518	-0,01369	3,447963
$R_f$	1,013707	0,083953	-1,595800	10,471410
$R_{ibo}$	1,047722	0,257595	0,587581	3,725827

TABELA 2  
MATRIZ DE VARIÂNCIA E CO-VARIÂNCIA

Variável	$C_g$	$R_f$	$R_{ibo}$
$C_g$	0,000922	0,000385	0,000731
$R_f$	0,000385	0,006977	0,000507
$R_{ibo}$	0,000731	0,000507	0,065691

GRÁFICO 1  
CRESCIMENTO DO CONSUMO

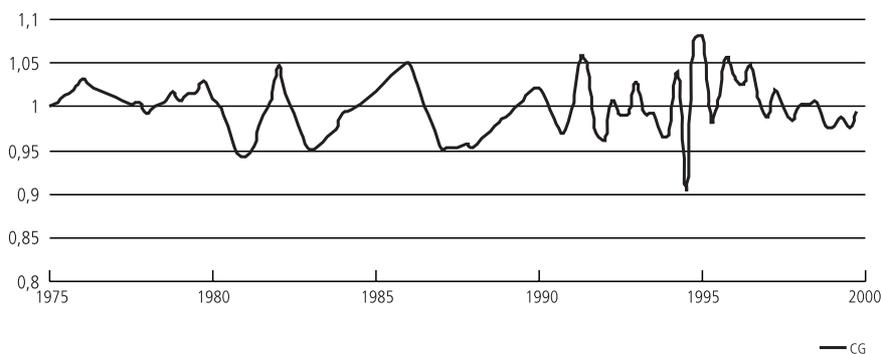


GRÁFICO 2  
TAXA OVER-SELIC

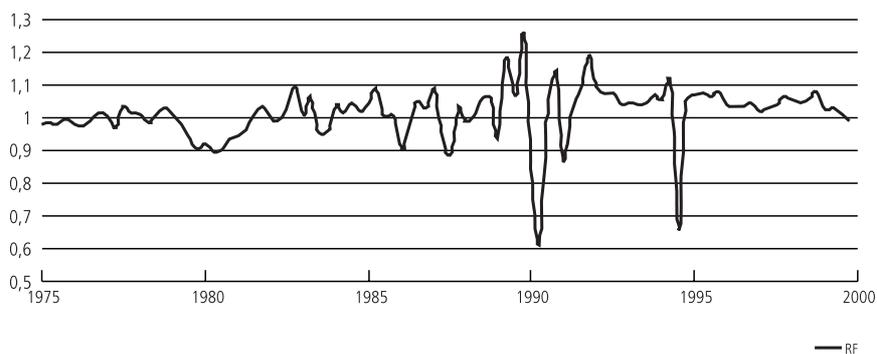
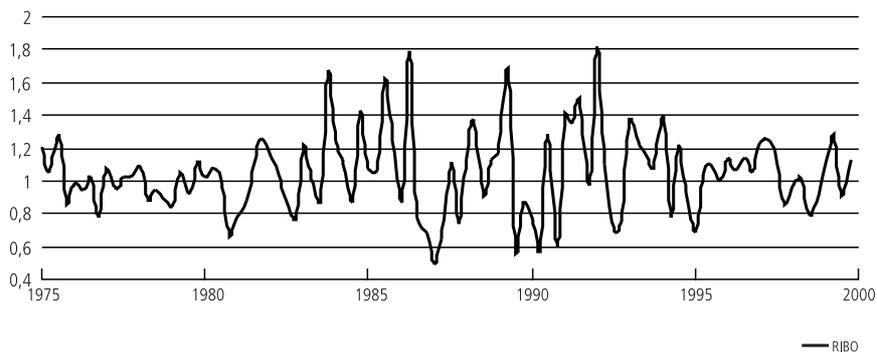


GRÁFICO 3  
IBOVESPA



### 3.2 Modelos

Os modelos para fator de desconto estocástico são derivados a partir do problema de escolha intertemporal de um agente representativo, o qual maximiza o valor descontado de sua utilidade esperada dado por:  $E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_t)$ . A restrição orçamentária é:

$$c_t + \sum_{a=1}^A p_{at} s_{at} \leq \sum_{a=1}^A (p_{at} + d_{at}) s_{at}$$

onde o agente representativo possui  $s_{at}$  unidades do ativo  $a$  no começo do período  $t$  e  $d_{at}$  é o dividendo pago pelo ativo  $a$ , cujo preço na data  $t$  é  $p_{at}$  em unidades de consumo.

Particularmente, este artigo considera o caso em que  $A = 2$ . Temos dois ativos a considerar: um ativo arriscado, correspondente ao retorno do Ibovespa, e um ativo sem risco, associado ao retorno advindo da taxa *over*-Selic.

Consideramos os três tipos de função utilidade estudados por Issler e Piqueira (2000). A notação empregada segue de perto aquela usada por esses autores.

A função utilidade, com coeficiente de aversão relativa ao risco, denotado por  $\gamma$ , constante, é dada pela expressão:  $U(c_t) = \frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}$  e gera o fator de desconto

$$\text{estocástico dado por: } M_{t+1}^{ARRC} = \beta \left( \frac{c_{t+1}}{c_t} \right)^{-\gamma}.$$

A especificação para a Formação de Hábito é:

$$U(c_t) = \frac{\left( \frac{c_t}{\bar{c}_{t-1}^k} \right)^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma}$$

As variáveis  $c_t$  e  $\bar{c}_{t-1}$  denotam, respectivamente, o consumo do agente representativo e o consumo agregado defasado de um período, ou seja, a utilidade do agente também depende do nível agregado de consumo alcançado no passado, além do seu consumo presente. O parâmetro  $k$ , suposto positivo, controla o grau de não-separabilidade da função utilidade ao longo do tempo. O fator de desconto estocástico associado a essa especificação é:

$$M_{t+1}^{FH} = \beta \left( \frac{c_{t+1}}{c_t} \right)^{-\gamma} \left( \frac{c_t}{c_{t-1}} \right)^{k(\gamma-1)}$$

Por fim, temos a função utilidade proposta por Epstein e Zin (1991), a qual é caracterizada pela equação:

$$U(c_t) = \left[ (1-\beta)c_t^\rho + \beta \left( E_t U_{t+1}^\alpha \right)^\frac{\rho}{\alpha} \right]^\frac{1}{\rho} \text{ para } 0 \neq \rho < 1$$

Essa especificação permite a separação entre a aversão ao risco e a taxa marginal de substituição intertemporal para o consumo.

O parâmetro de aversão ao risco, dado por  $\gamma = 1 - \alpha$ , determina de que modo o agente representativo aloca sua riqueza entre os ativos em sua carteira em um dado momento de tempo. O parâmetro de substituição intertemporal, dado

pela expressão  $\Psi = \frac{1}{1-\rho}$ , governa a escolha entre consumo presente e consumo futuro. O fator de desconto estocástico é:

$$M_{t+1}^{EZ} = \beta^\eta \left( \frac{c_{t+1}}{c_t} \right)^{\eta(\rho-1)} \tilde{B}_{t+1}$$

A variável  $\tilde{B}_{t+1}$  denota o retorno agregado da carteira do agente representativo.

A variável  $\eta$  é definida pela equação  $\eta = \frac{\alpha}{\rho}$ . Note-se que, se  $\alpha = \rho$  a especificação de Epstein-Zin coincide com a utilidade caracterizada por um coeficiente de aversão relativa ao risco constante.

As Tabelas 3 a 5 sintetizam estimativas, obtidas via MGM, para os parâmetros que descrevem as diferentes funções de utilidade. Esses valores servem de base para a construção de espaços de parâmetros associados aos testes de fronteira discutidos na próxima seção.

TABELA 3  
PREFERÊNCIA DO TIPO ARRC — SUMÁRIO DAS ESTIMATIVAS

Parâmetro	Média	Mediana	Valor máximo	Valor mínimo
$\beta$	0,9744	0,9767	0,9788	0,9644
$\gamma$	2,1705	2,1153	3,0505	1,5958

TABELA 4  
PREFERÊNCIA DO TIPO FH — SUMÁRIO DAS ESTIMATIVAS

Parâmetro	Média	Mediana	Valor máximo	Valor mínimo
$\beta$	0,9779	0,9780	0,9858	0,9622
$\gamma$	3,0708	2,9262	6,2572	1,6827
$\kappa$	0,8591	0,8242	1,1690	0,7079

TABELA 5  
PREFERÊNCIA DO TIPO EZ — SUMÁRIO DAS ESTIMATIVAS

Parâmetro	Média	Mediana	Valor máximo	Valor mínimo
$\beta$	0,9701	0,9689	0,9750	0,9661
$\eta$	0,8437	0,8195	1,0281	0,6901
$\rho$	0,8406	0,8805	1,0273	0,5997

## 4 AVALIANDO AS ESPECIFICAÇÕES USANDO FRONTEIRAS DE VOLATILIDADE

### 4.1 Procedimentos e estatísticas de teste

Esta seção tem por objetivo avaliar se os modelos descritos neste artigo, para as preferências do agente representativo, são consistentes com as restrições advindas da fronteira de volatilidade proposta por Hansen e Jagannathan.

Um modo intuitivo de avaliar modelos de formação de preços de ativos baseados em consumo é a comparação visual do desvio-padrão do fator de desconto estocástico associado a um modelo dado e a fronteira de volatilidade, a qual independe de modelos particulares, sendo função apenas de observáveis. Todavia, tal comparação ignora a variabilidade amostral associada ao fato de que tanto os retornos dos ativos considerados quanto o crescimento do consumo real são variáveis aleatórias.

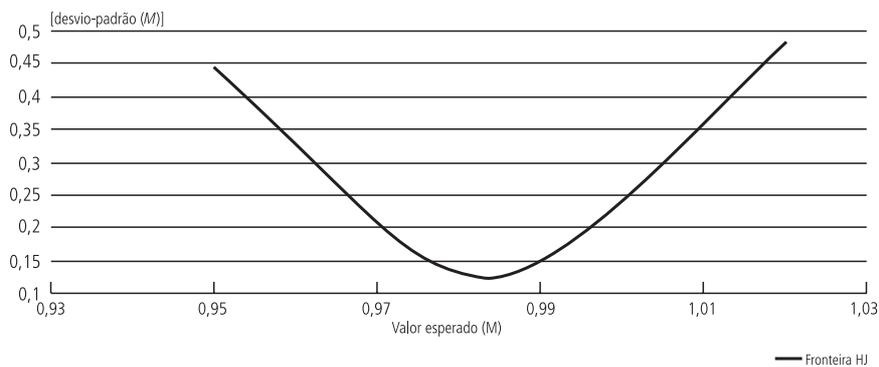
Com efeito, um teste estatístico formal se faz necessário, uma vez que a volatilidade da fronteira precisa ser estimada com base nos dados sobre retornos de ativos. Adicionalmente, a média e o desvio-padrão associados ao fator de desconto estocástico em questão também precisam ser estimados e dependem do processo estocástico para o crescimento do consumo real.

Assim, os elementos envolvidos na restrição imposta pela fronteira de volatilidade são estimadores, logo, variáveis aleatórias. Desse modo, os testes propostos procuram avaliar se a distância entre duas variáveis aleatórias é nula contra a alternativa de a distância ser negativa. É bom lembrar que a restrição imposta pela fronteira, descrita pela equação (2), implica uma distância nula ou positiva entre a variância do candidato a fator de desconto estocástico e a variância associada à fronteira para um dado  $\bar{M}$ . A restrição dada pela equação (2) está representada no Gráfico 4.

Os testes a serem empregados são discutidos em Soriano (2002) e em Burnside (1994). A seguir, apresenta-se uma descrição sucinta das estatísticas e procedimentos de teste.

O primeiro teste, denotado por  $T_1$ , está baseado na distância vertical entre o desvio-padrão do fator de desconto estocástico, denotado por  $\sigma_m$ , e o desvio-

GRÁFICO 4  
FRONTEIRA DE HANSEN E JAGANNATHAN



padrão associado à fronteira de volatilidade. Em termos populacionais, essa distância é dada pela expressão:

$$d = \sigma_m - \left[ (\mathbf{1} - E(M)E(\mathbf{1} + R_t))' \Omega^{-1} (\mathbf{1} - E(M)E(\mathbf{1} + R_t)) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

Em termos de notação,  $M_t$  denota o fator de desconto estocástico considerado,  $R_t$  é a matriz de retorno dos ativos e a letra  $E$  denota o operador valor esperado.

O análogo amostral para (3) é uma função que depende fundamentalmente de estimativas para o primeiro momento e o segundo momento centrado tanto para o fator de desconto estocástico quanto para cada ativo considerado na matriz  $R_t$ . O segundo momento amostral centrado para o fator de desconto estocástico é dado por:

$$s_m^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (M_t - \bar{M})^2$$

onde  $\bar{M} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T M_t$  e  $T$  denota o tamanho da amostra. Para a matriz de retornos, temos a seguinte expressão para a matriz de segundo momento amostral centrado:

$$S_R = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (R_t - \bar{R})(R_t - \bar{R})'$$

onde  $\bar{R} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_t$  e  $T$  denotam o tamanho da amostra.

A estimativa desses momentos pode ser feita via MGM. De posse dessas estimativas, a hipótese nula  $d = 0$  é equivalente a uma restrição envolvendo primeiro e segundo momentos para  $M_t$  e  $R_t$ . Tal restrição pode ser testada via teste de Wald, de acordo com a estatística de teste  $\sqrt{T} \frac{\hat{d}}{\hat{\sigma}_d}$ , cuja distribuição assintótica é uma Normal com média 0 e desvio-padrão igual a 1, sendo  $\hat{\sigma}_d$  o estimador para o desvio-padrão assintótico de  $\sqrt{T}(\hat{d} - d)$ , onde  $T$  denota o tamanho da amostra.

O segundo teste, denotado por  $T_2$ , tem por medida a distância vertical entre o segundo momento não-centrado associado ao fator de desconto estocástico e aquele associado à fronteira. O segundo momento amostral não-centrado para o fator de desconto estocástico é dado por  $\tilde{s}_m^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T M_t^2$ , onde  $T$  denota o tamanho da amostra. Para a matriz de retornos, temos a seguinte expressão para a matriz de segundo momento amostral não-centrado:

$$M_R = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_t R_t'$$

onde  $T$  denota o tamanho da amostra.

O valor da estatística de teste é obtido como resultado da estimação do sistema de equações baseado nas seguintes condições de momento:

$$E \left[ \begin{pmatrix} M_t \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} - (R_t R_t') \theta \right] = 0$$

$$E [ M_t^2 - (M_t \mathbf{1}') \theta - \zeta ] = 0$$

A estatística de teste em questão é  $\sqrt{T} \frac{\hat{\zeta}}{\hat{\sigma}_\zeta}$ , cuja distribuição assintótica é uma Normal com média 0 e desvio-padrão igual a 1, sendo  $\hat{\sigma}_\zeta$  o estimador para o desvio-padrão assintótico de  $\sqrt{T}(\hat{\zeta} - \zeta)$ , onde  $T$  denota o tamanho da amostra.

Convém mencionar que o teste  $T_2$  é, de fato, baseado no trabalho de Cochrane e Hansen (1992). A medida de distância para esse teste seria equivalente à medida preconizada pelo teste  $T_1$ , caso a distância vertical tivesse sido calculada no espaço envolvendo variância e média de fatores de desconto estocástico e não no espaço que considera desvio-padrão e média. O fato de os segundos momentos serem centrados ou não é pouco importante, uma vez que a diferença entre o segundo momento não-centrado e a variância é a média ao quadrado para o fator de desconto estocástico, a qual é suposta dada para um dado ponto da fronteira de volatilidade.

O terceiro teste, denotado por  $T_3$ , não mede a distância vertical mas sim a distância ótima entre o ponto  $(E(M_t), E(M_t^2))$ , localizado abaixo da fronteira de volatilidade, e a própria fronteira. Em primeiro lugar, calcula-se a matriz de segundos momentos não-centrados dos retornos dos ativos, simbolizada por  $M_R$ . Na seqüência, escolhe-se o parâmetro  $v$ , que satisfaz as seguintes condições de momento:

$$E[M_t - v] = 0$$

$$E\left[M_t^2 - (v'v)M_R^{-1}\begin{pmatrix} v \\ 1 \end{pmatrix}\right] = 0$$

A estatística de teste considerada, denotada por  $C_1$ , é definida como segue:  $C_1 = 0$  caso  $\hat{\zeta}$ , estatística computada em  $T_2$ , seja um número não-negativo ou  $C_1 = T \times J_T(v)$  se  $\hat{\zeta}$  for um número negativo. A variável  $J_T(v)$  denota a forma quadrática minimizada pelo método generalizado dos momentos, após a escolha apropriada da matriz de pesos. Sob a hipótese nula de que o fator de desconto estocástico avaliado encontra-se na fronteira, a estatística de teste é distribuída assintoticamente segundo uma  $\chi(1)$  com probabilidade 1/2.

Por fim, o teste  $T_4$ , último teste proposto por Burnside (1994) com base na fronteira de Hansen e Jagannathan, procura incorporar a restrição de não-negatividade, que deve ser respeitada por qualquer candidato a fator de desconto estocástico.

As condições de momento relevantes são:

$$E\left[\begin{pmatrix} M_t \\ 1 \end{pmatrix} - R_t \left(R_t' \phi\right)^+\right] = 0$$

$$E \left[ M_t^2 - \left[ (R_t' \phi)^+ \right]^2 - \xi \right] = 0$$

Por definição, temos  $(R_t' \phi)^+ = \text{Max}\{R_t' \phi, 0\}$ . A estatística de teste empregada quando levamos em conta a não-negatividade do fator de desconto estocástico é dada por  $\sqrt{T} \frac{\hat{\xi}}{\hat{\sigma}_\xi}$ , cuja distribuição assintótica é uma Normal com média 0 e desvio-padrão igual a 1, sendo  $\hat{\sigma}_\xi$  o estimador para o desvio-padrão assintótico de  $\sqrt{T}(\hat{\xi} - \xi)$ , onde  $T$  denota o tamanho da amostra.

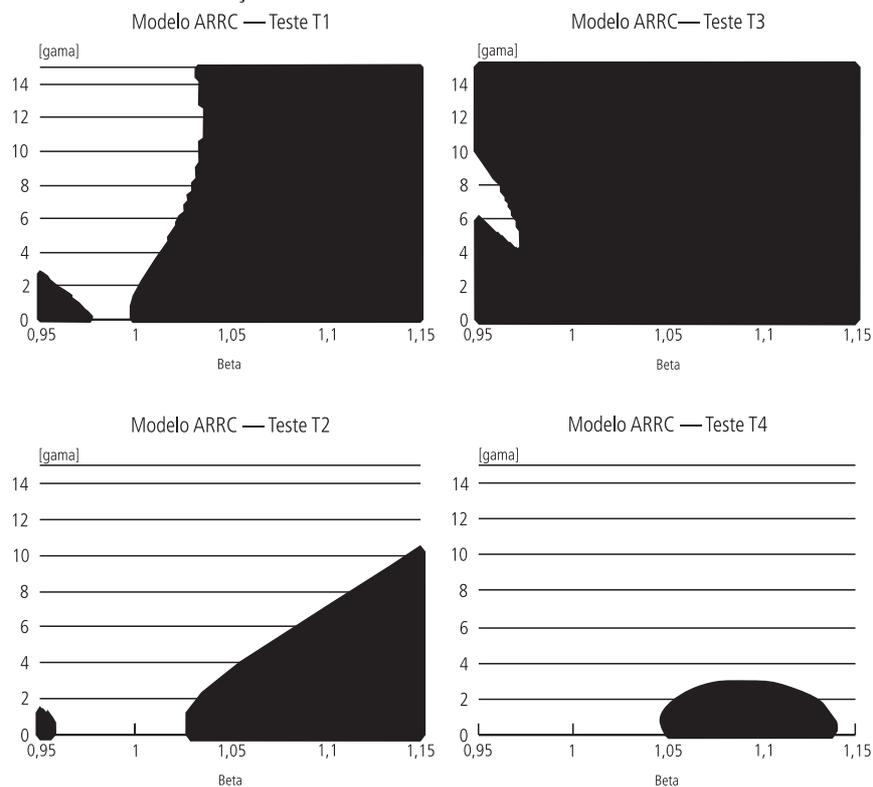
#### 4.2 Resultados

A estratégia para discriminar as diferentes especificações consiste primeiramente em determinar regiões de confiança a 95%, procurando caracterizar a região factível de parâmetros em termos da região onde os testes  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  e  $T_4$  não rejeitam a hipótese nula de que a restrição dada pela fronteira de Hansen e Jagannathan é satisfeita ao nível de significância usual de 5%. Em seguida, avalia-se quais das parametrizações baseadas nas estimativas de MGM, apresentadas nas Tabelas 3, 4 e 5, encontram-se na interseção entre as regiões factíveis definidas pelos testes  $T_1$  a  $T_4$ . Para tanto, os resultados dos testes  $T_1$  a  $T_4$  são computados para um *grid* específico a cada uma das preferências consideradas. No caso da preferência ARRC, o *grid* escolhido tem dimensão  $100 \times 100$  e encontra-se definido na seguinte região do espaço de parâmetros associados a  $\beta$  e  $\gamma$ :  $[0,95 \ 1,15] \times [0,05 \ 15]$ . Para as preferências caracterizadas por Formação de Hábito e para a especificação Epstein-Zin, para cada valor de  $b$ , tal que  $b \in \{0,95; 0,96; 0,97; 0,98; 0,99\}$ , a região de confiança a 95% é baseada em um *grid*  $100 \times 100$  para os demais parâmetros remanescentes.

As regiões de confiança estão representadas pela área não-pintada nos Gráficos 5 a 10.

Analisando as regiões de confiança, percebe-se que a região na qual uma dada parametrização, para um tipo específico de fator de desconto estocástico, não é rejeitada pelo teste da fronteira cresce ou não se altera quando  $\beta$  cresce em direção a 1 para os testes  $T_1$ ,  $T_2$  e  $T_4$ . Para o teste  $T_3$ , a região de confiança possui área menor quando  $\beta$  cresce em direção a 1. Como, em geral, o valor de  $\beta$  é

GRÁFICO 5  
REGIÕES DE CONFIANÇA A 95% PARA PREFERÊNCIA ARRC



próximo de 1, o teste  $T_3$  implica uma região de confiança bastante limitada, tornando mais fácil a rejeição da desigualdade na equação (2) para parametrizações convencionais na literatura.

Para as preferências do tipo ARRC, se  $0,98 \leq \beta \leq 0,95$ , de acordo com os testes  $T_1$ ,  $T_2$  e  $T_4$ , qualquer valor de  $\gamma$  é compatível com a restrição imposta pela fronteira de Hansen e Jagannathan. Todavia, de acordo com o teste  $T_3$ , parametrizações factíveis envolvem  $\beta$  próximo de 0,97 e valores elevados para  $\gamma$  ( $4 < \gamma < 10$ ).

Para preferências do tipo Formação de Hábito,  $2,5 < \gamma < 4$ , de acordo com os testes  $T_1$ ,  $T_2$  e  $T_4$ , é compatível com qualquer grau de Formação de Hábito ( $\kappa$ ), para todos os valores de  $\beta$  analisados. Isso também é verdade para  $T_3$ , quando  $\beta = 0,95$ . Para  $\beta > 0,95$ , a região de confiança obtida via teste  $T_3$  demanda valores de  $\gamma$  relativamente elevados (acima de 4).

GRÁFICO 6

REGIÕES DE CONFIANÇA A 95% PARA PREFERÊNCIAS: FORMAÇÃO DE HÁBITO E EPSTEIN-ZIN

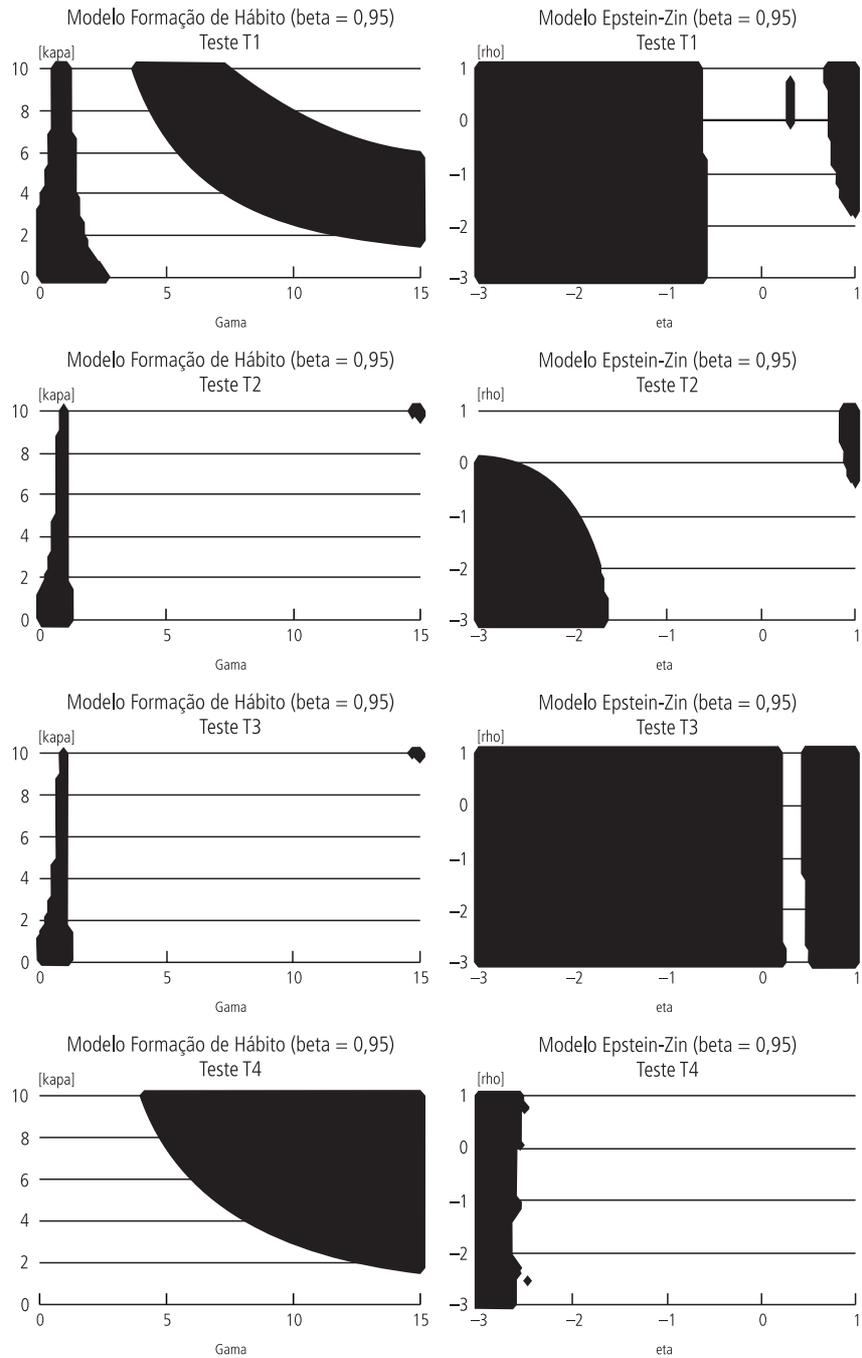


GRÁFICO 7

## REGIÕES DE CONFIANÇA A 95% PARA PREFERÊNCIAS: FORMAÇÃO DE HÁBITO E EPSTEIN-ZIN

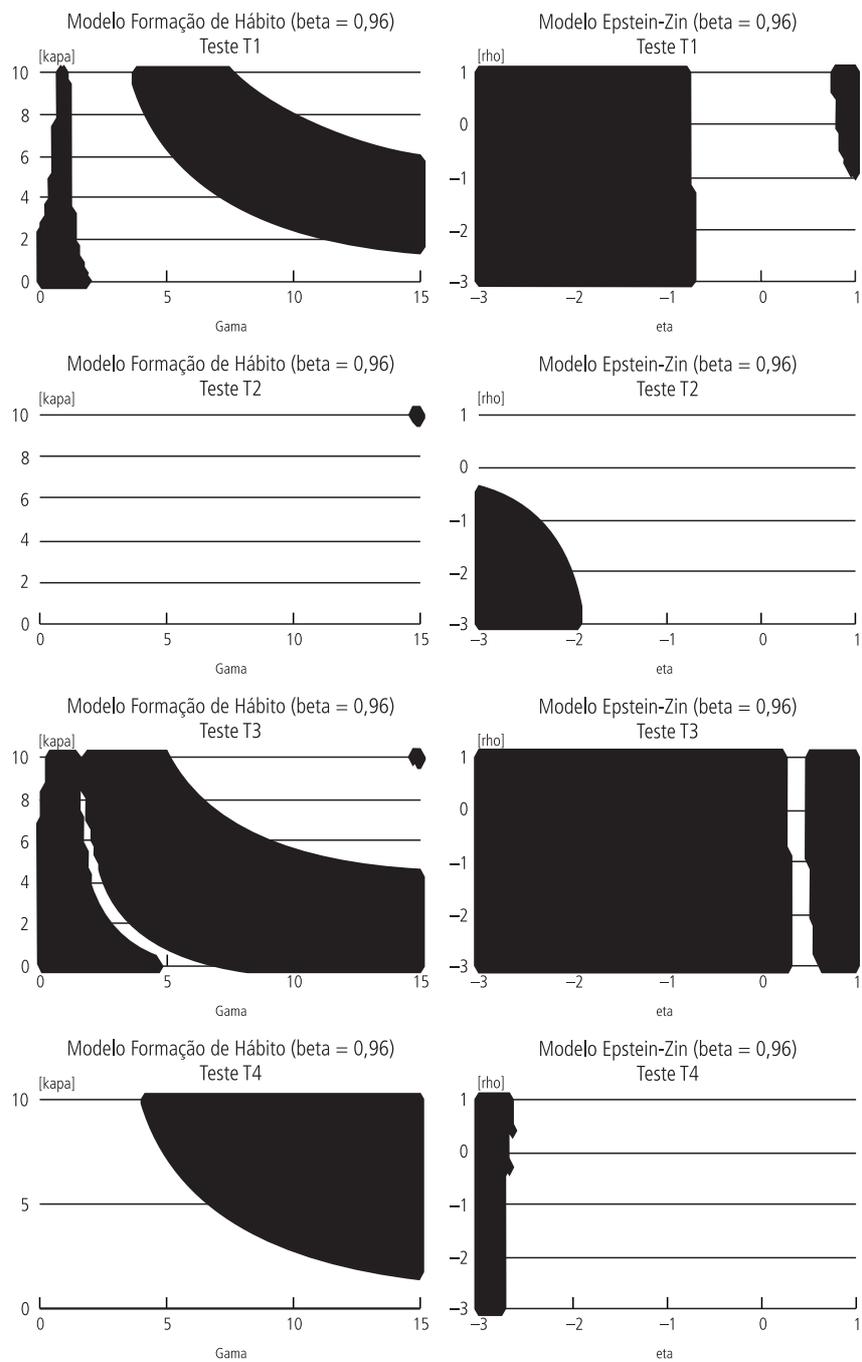


GRÁFICO 8  
**REGIÕES DE CONFIANÇA A 95% PARA PREFERÊNCIAS: FORMAÇÃO DE HÁBITO E EPSTEIN-ZIN**

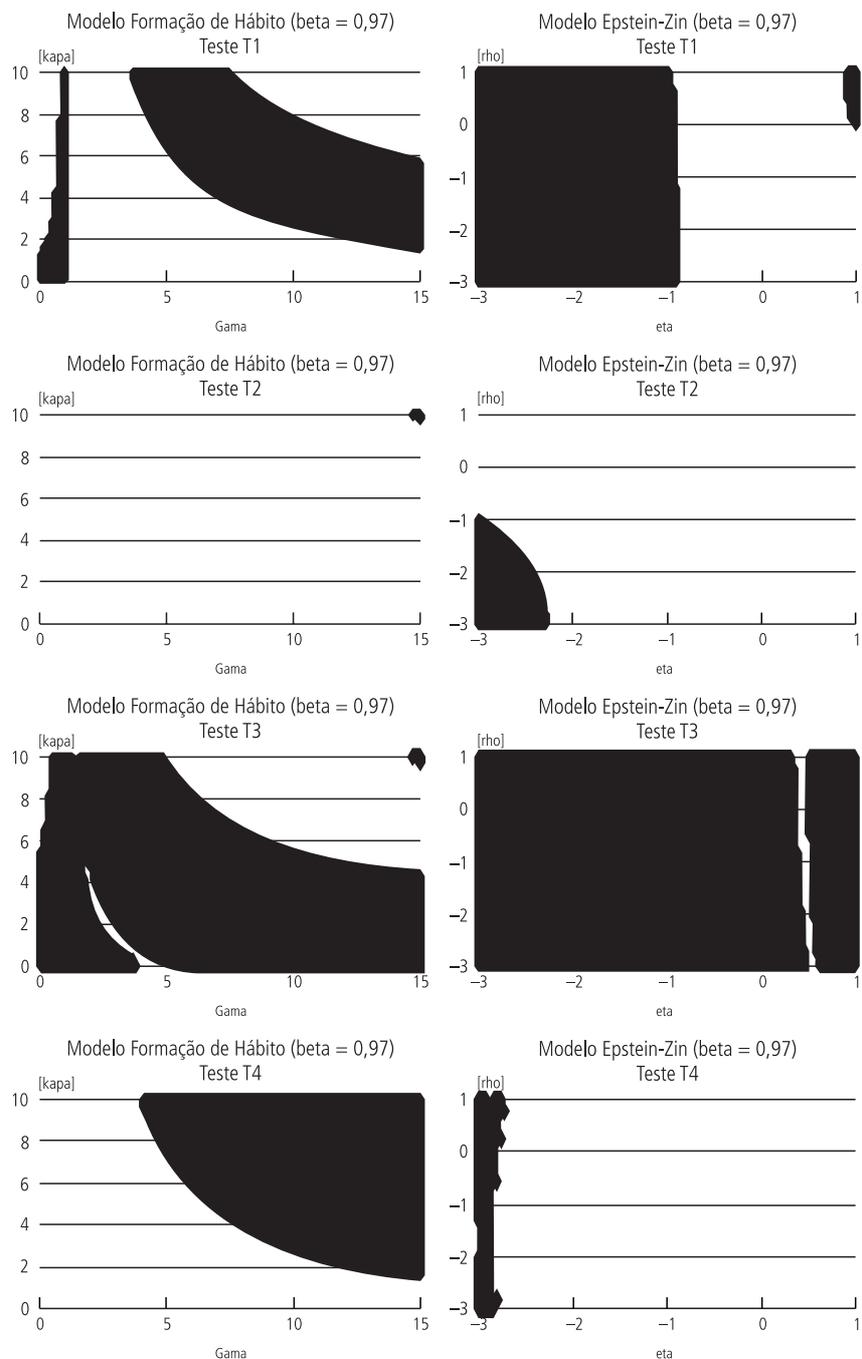


GRÁFICO 9

## REGIÕES DE CONFIANÇA A 95% PARA PREFERÊNCIAS: FORMAÇÃO DE HÁBITO E EPSTEIN-ZIN

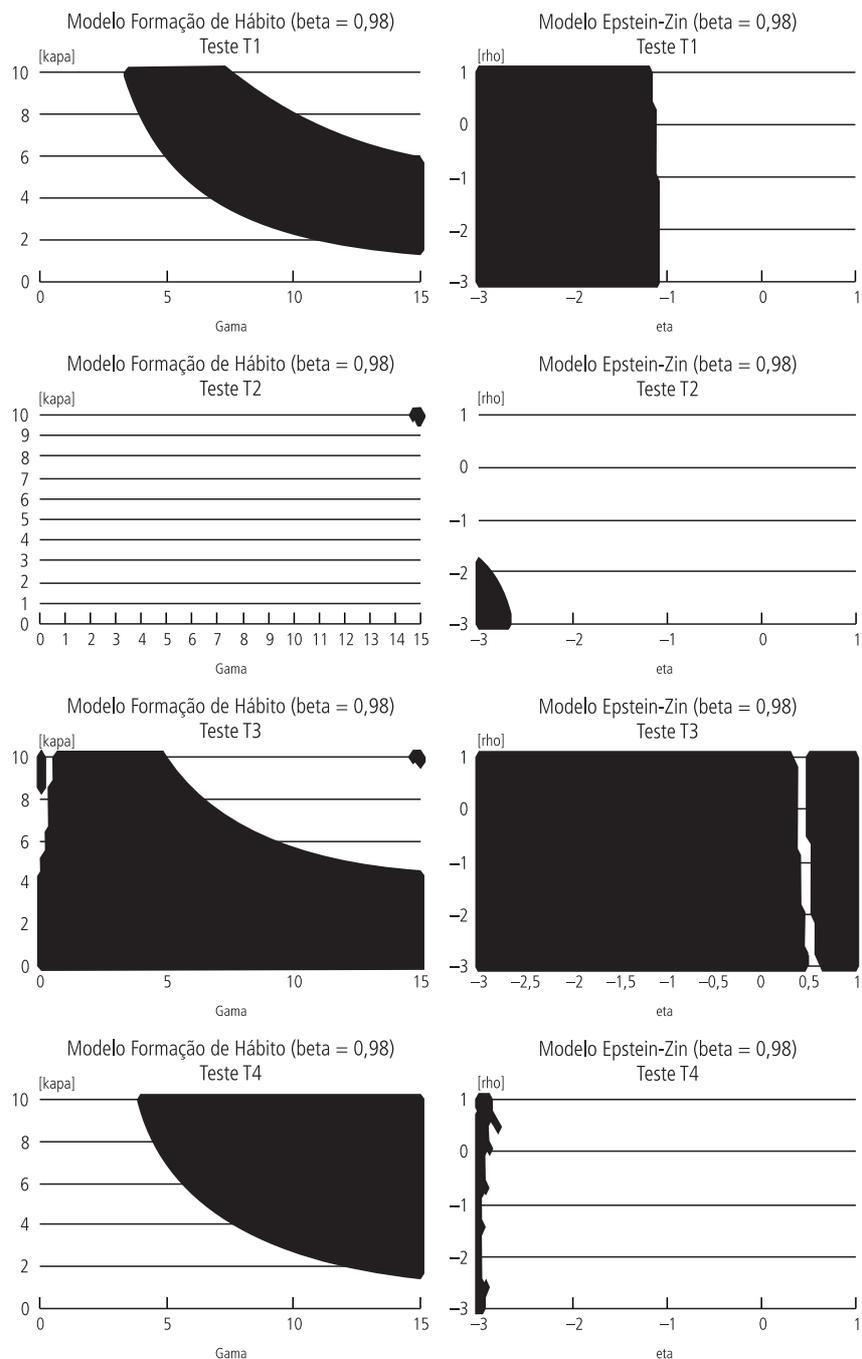
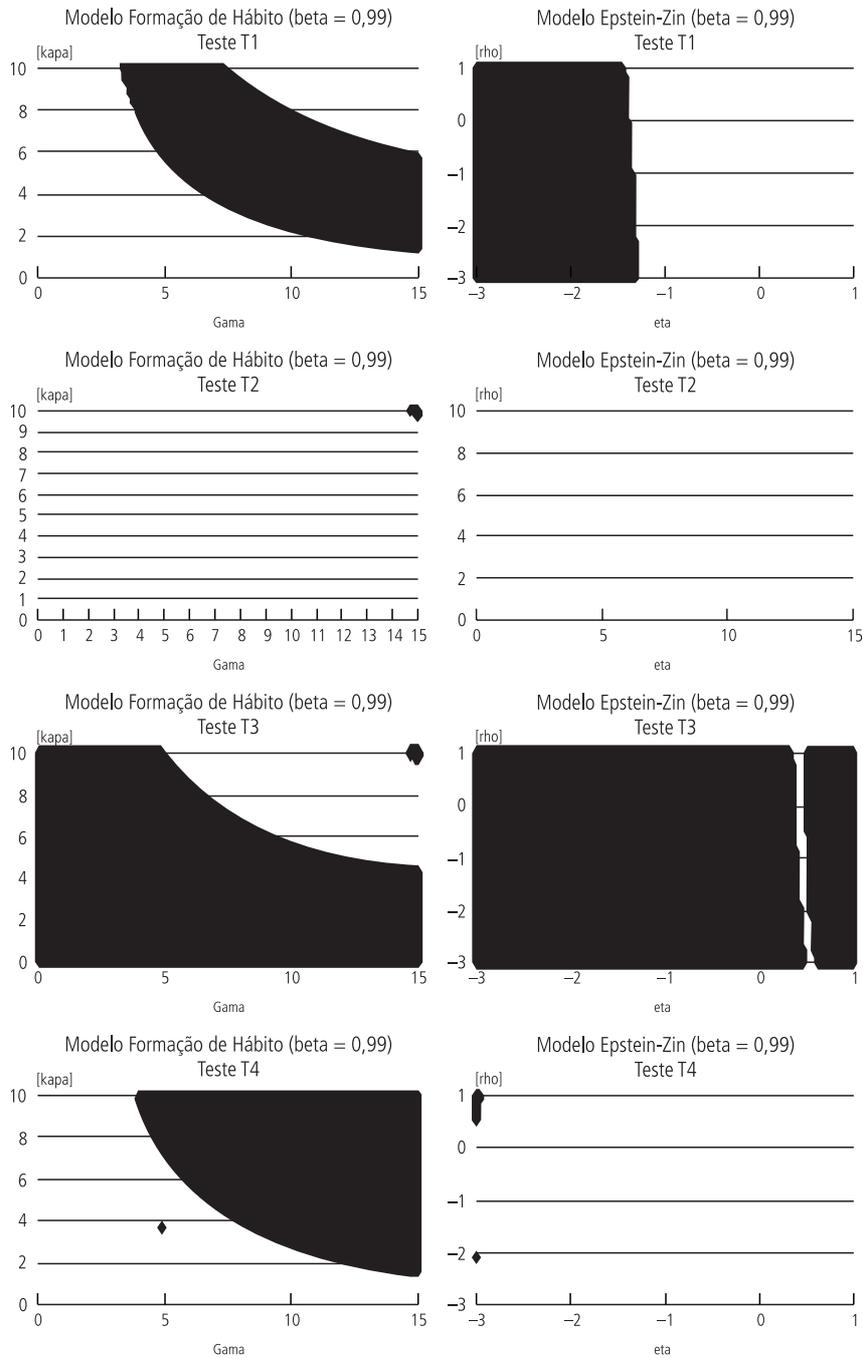


GRÁFICO 10

**REGIÕES DE CONFIANÇA A 95% PARA PREFERÊNCIAS: FORMAÇÃO DE HÁBITO E EPSTEIN-ZIN**



Uma vez que a aversão ao risco é dada por  $\gamma = 1 - \eta\rho$  e a elasticidade de substituição intertemporal é  $\psi = \frac{1}{1-\rho}$ , analisando as regiões relativas à especificação

de Epstein-Zin, nota-se que os testes  $T_1$ ,  $T_2$  e  $T_4$  determinam regiões nas quais valores usuais para a aversão ao risco são compatíveis com elasticidade de substituição intertemporal alta ( $\rho > 0$ ). Em contrapartida, o teste  $T_3$  associa valores convencionais para a aversão ao risco a relativamente baixos valores para elasticidade de substituição intertemporal ( $\rho < 0$ ).

Por fim, a Tabela 6 reporta o percentual de rejeição associado às 24 estimativas obtidas via MGM e sintetizadas nas Tabelas 3, 4 e 5. A Tabela 6 mostra que as preferências do tipo Epstein-Zin apresentam o pior desempenho em termos de rejeição da restrição imposta pela equação (2); em seguida, temos a especificação ARRC; e, por fim, a Formação de Hábito, que está associada ao menor percentual de rejeição. Nota-se que os testes  $T_1$ ,  $T_2$  e  $T_4$  tendem a não rejeitar a validade da equação (2). Em contraposição, o teste  $T_3$  rejeita a maior parte dos valores obtidos via estimação por MGM. As únicas especificações que não foram rejeitadas são:

- a) Formação de Hábito,  $\beta = 0,9731$ ;  $\gamma = 3,2183$ ;  $\kappa = 0,7564$ ; e
- b) Formação de Hábito,  $\beta = 0,9696$ ;  $\gamma = 3,8587$ ;  $\kappa = 0,7079$ .

TABELA 6  
PERCENTUAL DE REJEIÇÃO (ESTIMATIVAS PONTUAIS VIA MGM)

Preferência	Teste	Rejeição 1%	Rejeição 5%	Rejeição 10%
ARRC	$T_1$	0	0	0
ARRC	$T_2$	0	0	0
ARRC	$T_3$	100	100	100
ARRC	$T_4$	0	0	0
Formação de Hábito	$T_1$	0	0	0
Formação de Hábito	$T_2$	0	0	0
Formação de Hábito	$T_3$	91,67	91,67	91,67
Formação de Hábito	$T_4$	0	0	0
Epstein-Zin	$T_1$	0	33,33	50
Epstein-Zin	$T_2$	0	0	0
Epstein-Zin	$T_3$	100	100	100
Epstein-Zin	$T_4$	0	0	0

É importante lembrar que os testes  $T_1$ ,  $T_2$  e  $T_4$  mensuram distâncias verticais, ao passo que o teste  $T_3$  é baseado na distância ótima. Desse modo, o fato de o comportamento dos testes  $T_1$ ,  $T_2$  e  $T_4$  ser semelhante em termos da não-rejeição das especificações consideradas é esperado.

A rejeição de várias especificações usando o teste  $T_3$  coincide com a evidência obtida via simulação de Monte Carlo para a preferência do tipo ARRC, reportada por Burnside (1994), mostrando que o teste  $T_3$  tende a rejeitar mais do que o previsto pela teoria assintótica (*over-rejection*) em amostra finita. Além disso, o teste  $T_3$  é construído via estimação da média para o fator de desconto estocástico, o que introduz maior variabilidade na estatística de teste considerada. Desse modo, exacerba-se a tendência de rejeição desse teste.

O teste  $T_3$  é o elemento principal capaz de discriminar preferências do tipo ARRC (cujas estimativas via MGM foram todas rejeitadas por esse teste) da Formação de Hábito (em que duas estimativas passaram em todos os quatro testes), uma vez que, à medida que  $\beta$  se aproxima de 1, a região factível de parâmetros é mais restrita, envolvendo cada vez mais combinações de parâmetros empiricamente pouco plausíveis. Apesar disso, uma vez que o teste da distância ótima não possui *performance* tão boa quanto os demais, é possível hierarquizar os resultados obtidos, priorizando a evidência fornecida pelos três testes de distância vertical considerados, os quais introduzem menos ruído na mensuração da distância entre o fator de desconto estocástico e a fronteira de volatilidade.

O fato de que todas as especificações não são rejeitadas via teste de sobreidentificação e são pouco rejeitadas por  $T_1$ ,  $T_2$  e  $T_4$  (a especificação do tipo Epstein-Zin também foi rejeitada por  $T_1$ ) está relacionado ao caso de não se constatar a existência de um *Equity Premium Puzzle* para o Brasil, conforme evidências obtidas de modo quase simultâneo por Sampaio (2002), Issler e Piqueira (2000) e Soriano (2002). Dessa forma, a restrição imposta pela fronteira de volatilidade tende a ser satisfeita pelos dados com maior facilidade.

## 5 CONCLUSÃO

Neste artigo, três especificações para a função utilidade são estudadas: a utilidade com coeficiente de aversão relativa ao risco constante, a Formação de Hábito e a utilidade proposta por Epstein e Zin (1991). O modelo básico de apreçamento de ativo é estimado, para cada tipo de função utilidade considerada, via método generalizado dos momentos.

Os fatores de desconto estocástico associados às utilidades estudadas são comparados e avaliados de acordo com a capacidade de cada um deles em satisfazer as restrições impostas pela fronteira de volatilidade derivada por Hansen e Jagannathan (1991).

O artigo conclui que é difícil discriminar entre as diferentes especificações para o fator de desconto estocástico com o auxílio dos testes construídos a partir da fronteira de volatilidade de Hansen e Jagannathan. Todavia, um dos testes de fronteira (o teste  $T_3$ ) foi capaz de discriminar duas estimativas, associadas à Formação de Hábito, como sendo as parametrizações mais adequadas para descrever o conjunto de dados estudado. Essas especificações são:

a) Formação de Hábito,  $\beta = 0,9731$ ;  $\gamma = 3,2183$ ;  $\kappa = 0,7564$ ; e

b) Formação de Hábito,  $\beta = 0,9696$ ;  $\gamma = 3,8587$ ;  $\kappa = 0,7079$

Contudo, esse resultado deve ser avaliado com cautela, pois esse teste apresenta tendência mais acentuada que os demais para *over-rejection* em amostra finita, conforme mostram simulações realizadas por Burnside (1994). Desse modo, prefere-se priorizar os resultados obtidos através dos testes de distância vertical, os que são incapazes de discriminar as especificações alternativas para o fator de desconto estocástico. Os resultados associados aos testes de distância vertical corroboram evidências obtidas anteriormente, que apontam para a inexistência de um *Equity Premium Puzzle* para o Brasil.

#### ABSTRACT

This paper studies three consumption-based Asset Pricing models. The stochastic discount factors generated by the models are evaluated according to its ability to satisfy the Hansen and Jagannathan (1991) volatility bounds. In this article, three models based upon a representative agent, which chooses her consumption path over time as well as the allocation of her wealth by purchasing a risky and a risk free asset, are compared. In this context, the stochastic discount factor is related to the inter-temporal marginal rate of substitution that depends on the utility function specified for the representative agent. Three classic specifications are considered: a constant relative risk aversion utility function, habit persistence and the preference representation proposed by Epstein and Zin (1991). The econometric procedures based upon the volatility bounds are unable to identify the stochastic discount factor capable of describing the data more accurately. In addition, the findings reported here are consistent with empirical evidences pointing out to the inexistence of an Equity Premium Puzzle in Brazil.

#### BIBLIOGRAFIA

- BURNSIDE, C. Hansen-Jagannathan bounds as classical tests of asset-pricing models. *Journal of Business and Economic Statistics*, v. 12, p. 57-79, 1994.
- CAMPBELL, J. Y., LO, A. W., MACKINLEY, A. C. *The econometrics of financial markets*. Princeton: Princeton University Press, 1997.
- CATALÃO, A. B., YOSHINO, J. *Equity Premium Puzzle: Brasil e Estados Unidos*. Universidade de São Paulo, 2004 (manuscrito).
- CECCHETTI, S. G. *et alii*. Testing volatility restrictions on inter-temporal marginal rates of substitution implied by Euler equations and asset returns. *The Journal of Finance*, v. XLIX, n. 1, p. 123-152, 1994.

- COCHRANE, J. H., HANSEN, L. P. Asset pricing explorations for macroeconomics. *NBER Macroeconomics Annual*, n. 7, p. 115-165, 1992.
- CUCHE, N. A., HESS, M. K. Estimating monthly GDP in a general Kalman filter framework: evidence from Switzerland. *Economic and Financial Modelling*, v. 7, n. 4, p. 153-194, 2000.
- EPSTEIN, L., ZIN, S. Substitution, risk aversion and the temporal behavior of consumption and asset returns: an empirical analysis. *Journal of Political Economy*, v. 99, p. 263-286, 1991.
- HAMILTON, J. *Time series analysis*. Princeton: Princeton University Press, 1994.
- HANSEN, L., JAGANNATHAN, R. Implications of security market data for models of dynamic economies. *Journal of Political Economy*, v. 99, p. 225-262, 1991.
- HARVEY, A. C., PIERSE, R. G. Estimating missing observations in economic time series. *Journal of the American Statistical Association*, v. 79, n. 385, p. 747-772, 1984.
- ISSLER, J. V., PIQUEIRA, N. S. Estimating relative risk aversion, the discount rate and the inter-temporal elasticity of substitution in consumption for Brazil using three types of utility function. *Brazilian Review of Econometrics*, v. 20, n. 2, p. 201-239, 2000.
- KOCHERLAKOTA, N. The Equity Premium: it's still a Puzzle. *Journal of Economic Literature*, v. XXIV, p. 42-71, 1996.
- MEHRA, R. The Equity Premium: why is it a Puzzle? *NBER Working Paper*, n. 9.512, 2003.
- MEHRA, R., PRESCOTT, E. C. The Equity Premium Puzzle. *Journal of Monetary Economics*, v. 15, p. 145-161, 1985.
- SAMPAIO, F. S. Existe *Equity Premium Puzzle* no Brasil? In: BONOMO, M. (org.). *Finanças aplicadas ao Brasil*. Rio de Janeiro: Editora FGV, p. 8-25, 2002.
- SORIANO, A. Testando o CCAPM através das fronteiras de volatilidade e da equação de Euler. In: BONOMO, M. (org.). *Finanças aplicadas ao Brasil*. Rio de Janeiro: Editora FGV, p. 121-161, 2002.

(Originais recebidos em agosto de 2004. Revistos em dezembro de 2004.)

