

Material Suplementar para:

“Concorrência no Setor Bancário Brasileiro:
Bancos Individuais versus Conglomerado Bancário”

Este é o material suplementar do artigo “Concorrência no Setor Bancário Brasileiro: Bancos Individuais versus Conglomerado Bancário”. Este material apresenta tabelas, derivações matemáticas e procedimentos de estimação que foram usados no artigo e que são necessárias para a completa compreensão e replicação do artigo.

A.1 Tabelas

Tabela 1: Evolução da ESTATÍSTICA H-PANZAR – BASE CONGLOMERADO

BASE 4040							
INTERVALO	H	D_WORK	D_ADM	D_CAP	H=1 (p-value)	H=0 (p-value)	R2
199912-200212	0,302 (0,039)***	0,195 (0,023)***	-0,445 (0,027)***	0,551 (0,021)***	0,000	0,000	0,704
200003-200303	0,321 (0,039)***	0,23 (0,026)***	-0,417 (0,028)***	0,508 (0,021)***	0,000	0,000	0,609
200006-200306	0,335 (0,039)***	0,202 (0,026)***	-0,377 (0,028)***	0,511 (0,021)***	0,000	0,000	0,586
200009-200309	0,324 (0,04)***	0,175 (0,026)***	-0,379 (0,029)***	0,529 (0,02)***	0,000	0,000	0,587
200012-200312	0,304 (0,043)***	0,126 (0,027)***	-0,319 (0,031)***	0,496 (0,02)***	0,000	0,000	0,531
200103-200403	0,291 (0,044)***	0,08 (0,029)***	-0,28 (0,032)***	0,491 (0,021)***	0,000	0,000	0,544
200106-200406	0,316 (0,044)***	0,076 (0,029)***	-0,248 (0,032)***	0,488 (0,021)***	0,000	0,000	0,526
200109-200409	0,361 (0,044)***	0,075 (0,03)**	-0,174 (0,032)***	0,461 (0,02)***	0,000	0,000	0,532
200112-200412	0,411 (0,043)***	0,084 (0,029)***	-0,1 (0,031)***	0,426 (0,021)***	0,000	0,000	0,527
200203-200503	0,434 (0,042)***	0,087 (0,029)***	-0,057 (0,03)*	0,404 (0,021)***	0,000	0,000	0,546
200206-200506	0,485 (0,042)***	0,091 (0,028)***	0,007 (0,029)	0,388 (0,021)***	0,000	0,000	0,526
200209-200509	0,433 (0,042)***	0,105 (0,029)***	-0,02 (0,028)	0,349 (0,021)***	0,000	0,000	0,510
200212-200512	0,368 (0,041)***	0,117 (0,03)***	0,019 (0,027)	0,232 (0,021)***	0,000	0,000	0,535
200303-200603	0,251 (0,039)***	0,111 (0,028)***	-0,015 (0,025)	0,154 (0,021)***	0,000	0,000	0,513
200306-200606	0,222 (0,038)***	0,097 (0,026)***	-0,02 (0,024)	0,146 (0,02)***	0,000	0,000	0,541
200309-200609	0,176 (0,035)***	0,092 (0,023)***	-0,046 (0,023)**	0,13 (0,019)***	0,000	0,000	0,550
200312-200612	0,093 (0,034)***	0,09 (0,021)***	-0,086 (0,022)***	0,088 (0,018)***	0,000	0,006	0,588
200403-200703	0,023 (0,035)	0,09 (0,022)***	-0,148 (0,022)***	0,082 (0,019)***	0,000	0,5062 [~]	0,579
200406-200706	0,018 (0,035)	0,108 (0,022)***	-0,185 (0,022)***	0,095 (0,02)***	0,000	0,5994 [~]	0,574
200409-200709	0,056 (0,039)	0,156 (0,024)***	-0,198 (0,025)***	0,098 (0,023)***	0,000	0,1554 [~]	0,512
200412-200712	0,093 (0,041)**	0,164 (0,025)***	-0,219 (0,026)***	0,148 (0,024)***	0,000	0,0242 [~]	0,515
200503-200803	0,123 (0,044)***	0,181 (0,026)***	-0,237 (0,028)***	0,179 (0,026)***	0,000	0,005	0,503
200506-200806	0,096 (0,045)**	0,199 (0,026)***	-0,257 (0,029)***	0,154 (0,027)***	0,000	0,0327 [~]	0,480
200509-200809	0,228 (0,054)***	0,21 (0,032)***	-0,16 (0,035)***	0,177 (0,03)***	0,000	0,000	0,452
200512-200812	0,266 (0,058)***	0,177 (0,034)***	-0,134 (0,038)***	0,223 (0,03)***	0,000	0,000	0,400
200603-200903	0,265 (0,059)***	0,191 (0,035)***	-0,118 (0,041)***	0,192 (0,03)***	0,000	0,000	0,433
200606-200906	0,237 (0,061)***	0,175 (0,036)***	-0,106 (0,043)**	0,168 (0,03)***	0,000	0,000	0,421
200609-200909	0,215 (0,061)***	0,148 (0,035)***	-0,06 (0,044)	0,127 (0,031)***	0,000	0,001	0,396
200612-200912	0,175 (0,063)***	0,144 (0,038)***	-0,063 (0,045)	0,093 (0,031)***	0,000	0,005	0,400
200703-201003	0,139 (0,066)**	0,142 (0,042)***	-0,108 (0,047)**	0,106 (0,031)***	0,000	0,0352 [~]	0,384
200706-201006	0,064 (0,066)	0,127 (0,042)***	-0,173 (0,048)***	0,11 (0,031)***	0,000	0,3342 [~]	0,391

Tabela 2: Evolução da ESTATÍSTICA H-PANZAR – BASE CNPJ

BASE 4010							
INTERVALO	H	D_WORK	D_ADM	D_CAP	H=1 (p-value)	H=0 (p-value)	R2
199912-200212	0,423 (0,161)***	0,201 (0,004)***	-0,358 (0,124)***	0,58 (0,125)***	0,000	0,009	0,7728
200003-200303	0,544 (0,167)***	0,2 (0,004)***	-0,368 (0,131)***	0,712 (0,127)***	0,007	0,001	0,765
200006-200306	0,557 (0,166)***	0,195 (0,004)***	-0,328 (0,129)**	0,69 (0,124)***	0,008	0,001	0,7546
200009-200309	0,739 (0,172)***	0,195 (0,004)***	-0,161 (0,137)	0,704 (0,122)***	0,13"	0,000	0,747
200012-200312	0,576 (0,171)***	0,194 (0,004)***	-0,297 (0,135)**	0,679 (0,119)***	0,0132"	0,001	0,7156
200103-200403	0,926 (0,173)***	0,193 (0,004)***	-0,097 (0,142)	0,83 (0,109)***	0,6693"	0,000	0,74
200106-200406	0,971 (0,149)***	0,193 (0,003)***	-0,061 (0,123)	0,839 (0,09)***	0,8453"	0,000	0,7832
200109-200409	1,056 (0,146)***	0,196 (0,003)***	0,058 (0,124)	0,803 (0,084)***	0,6997"	0,000	0,8021
200112-200412	0,826 (0,125)***	0,203 (0,003)***	0,037 (0,108)	0,587 (0,073)***	0,1646"	0,000	0,8447
200203-200503	0,576 (0,125)***	0,206 (0,003)***	-0,134 (0,108)	0,503 (0,071)***	0,001	0,000	0,8489
200206-200506	0,443 (0,117)***	0,211 (0,003)***	-0,158 (0,1)	0,39 (0,066)***	0,000	0,000	0,8685
200209-200509	0,337 (0,123)***	0,212 (0,003)***	-0,19 (0,108)*	0,315 (0,069)***	0,000	0,006	0,8549
200212-200512	0,422 (0,124)***	0,214 (0,003)***	-0,058 (0,111)	0,266 (0,069)***	0,000	0,001	0,8484
200303-200603	0,272 (0,125)**	0,215 (0,003)***	-0,137 (0,112)	0,194 (0,068)***	0,000	0,030	0,8282
200306-200606	0,188 (0,125)	0,219 (0,003)***	-0,078 (0,111)	0,047 (0,065)	0,000	0,1318"	0,8417
200309-200609	0,219 (0,132)*	0,22 (0,003)***	0,179 (0,119)	-0,18 (0,067)***	0,000	0,098"	0,8136
200312-200612	0,185 (0,126)	0,218 (0,003)***	0,171 (0,114)	-0,204 (0,063)***	0,000	0,1445"	0,8351
200403-200703	0,348 (0,127)***	0,221 (0,003)***	0,241 (0,114)**	-0,114 (0,063)*	0,000	0,006	0,8379
200406-200706	0,38 (0,125)***	0,223 (0,003)***	0,208 (0,112)*	-0,051 (0,06)	0,000	0,003	0,8432
200409-200709	0,516 (0,125)***	0,223 (0,003)***	0,252 (0,113)**	0,04 (0,06)	0,000	0,000	0,8429
200412-200712	0,49 (0,129)***	0,216 (0,003)***	0,163 (0,116)	0,11 (0,062)*	0,000	0,000	0,8375
200503-200803	0,652 (0,125)***	0,221 (0,003)***	0,289 (0,112)**	0,142 (0,062)**	0,005	0,000	0,8435
200506-200806	0,787 (0,123)***	0,22 (0,003)***	0,279 (0,11)**	0,288 (0,064)***	0,083	0,000	0,8373
200509-200809	0,981 (0,123)***	0,22 (0,003)***	0,278 (0,107)***	0,484 (0,071)***	0,8794"	0,000	0,8386
200512-200812	0,917 (0,118)***	0,219 (0,003)***	0,183 (0,101)*	0,516 (0,074)***	0,4822"	0,000	0,8681
200603-200903	0,891 (0,123)***	0,221 (0,003)***	0,109 (0,102)	0,562 (0,085)***	0,3774"	0,000	0,86
200606-200906	0,911 (0,117)***	0,219 (0,003)***	-0,006 (0,097)	0,697 (0,083)***	0,4473"	0,000	0,8692
200609-200909	0,999 (0,117)***	0,215 (0,003)***	-0,126 (0,096)	0,911 (0,081)***	0,9961"	0,000	0,8711
200612-200912	0,968 (0,103)***	0,219 (0,003)***	0,179 (0,087)**	0,57 (0,072)***	0,7567"	0,000	0,8911
200703-201003	0,897 (0,16)***	0,207 (0,004)***	-0,007 (0,135)	0,697 (0,107)***	0,5173"	0,000	0,7857
200706-201006	0,959 (0,178)***	0,205 (0,004)***	0,041 (0,153)	0,713 (0,116)***	0,8175"	0,000	0,7482

Tabela 3: Apresentação dos valores estimados no 1º estágio para o modelo Boone (2008) com a utilização dos dados do relatório 4010 (CNPJ)

	ln_ct
LnQ	57.837 (9.125)***
LnQ^2	-0.491 (0.102)***
$(LnQ) * Ln(W_1)$	-3.202 (0.537)***
$(LnQ) * Ln(W_2)$	2209 (0.396)***
$Ln(W_1)$	147.615 (26.559)***
$Ln(W_2)$	-145.648 (17.967)***
$\frac{Ln(W_1)^2}{2}$	-94.777 (15.080)***
$\frac{Ln(W_2)^2}{2}$	-40.321 (7.914)**
$Ln(W_1) Ln(W_2)$	74.482 (10.622)***
PIB	-2.054 (0.035)***
C_{nEmp}	1.207 (0.326)***
HHI_dep_prazo	1642 (0.500)***
HHI_ativo	7.231 (0.378)***
vc_04	-0.00 (0.000)
Constante	-99.11 (24.239)***
N^o Observações	5124
N^o BCOS	193
R^2 (within)	0.97
<i>(em parênteses estão os desvios padrões robustos)</i>	
<i>* Significativo a 10%; ** Significativo a 5%; *** Significativo a 1%</i>	

Tabela 4: Apresentação dos valores estimados no 2º estágio para o modelo Boone (2008) com a utilização dos dados do relatório 4010 (CNPJ)

	ln_lucro
<i>Ln(CM_g)</i>	-1.787 (0.074)***
<i>d_1s</i>	0.00 (0.000)***
<i>HHI_ativo</i>	-5.018 (0.742)***
Constante	117.142 (.008)***
<i>Nº Observações</i>	5124
<i>Nº BCOS</i>	193
<i>R² (within)</i>	0.42
<i>(em parênteses estão os desvios padrões robustos)</i>	
<i>* Significativo a 10%; ** Significativo a 5%; *** Significativo a 1%</i>	

Tabela 5: Apresentação dos valores estimados no 1º estágio para o modelo Boone (2008) com a utilização dos dados do relatório 4040 (Conglomerados)

	ln_ct
<i>LnQ</i>	1.84 (0.248)**
<i>LnQ</i>²	0.057 (0.012)***
<i>(LnQ) * Ln(W₁)</i>	0.057 (0.017)***
<i>(LnQ) * Ln(W₂)</i>	-0.955 (0.162)***
<i>Ln(W₁)</i>	0.92 (0.294)***
<i>Ln(W₂)</i>	-10.992 (2.700)***
$\frac{Ln(W_1)^2}{2}$	0.079 (0.010)**
$\frac{Ln(W_2)^2}{2}$	9.550 (1.550)***
<i>Ln(W₁</i>	-0.567 (0.154)***
<i>d_1s</i>	-0.123 (0.020)***
<i>PIB</i>	2.259 (0.114)***
<i>HHI_dep_prazo</i>	22.601 (1883)***
<i>HHI_ativo_I</i>	-0.565 (0.049)***
<i>d_cons</i>	0.374 (0.080)***
<i>vc_04</i>	0.018 (0.003)**
<i>Constante</i>	-0.705 (2612)
<i>Nº Observações</i>	3808
<i>Nº BCOS</i>	176
<i>R² (within)</i>	0.59
<i>(em parênteses estão os desvios padrões robustos)</i>	
<i>* Significativo a 10%; ** Significativo a 5%; *** Significativo a 1%</i>	

Tabela 6: Apresentação dos valores estimados no 2º estágio para o modelo Boone (2008) com a utilização dos dados do relatório 4040 (Conglomerados)

	ln_lucro
<i>Ln(CM_g)</i>	-0.860 (0.032)***
d_1s	0.073 (0.025)***
HHI_ativo	0.401 (0.025)***
Constante	3.882 (0.110)***
Nº Observações	3766
Nº BCOS	176
R² (within)	0.39
<i>(em parênteses estão os desvios padrões robustos)</i>	
<i>* Significativo a 10%; ** Significativo a 5%; *** Significativo a 1%</i>	

Tabela 7: Apresentação dos valores estimados no 1º Estágio do Modelo Bresnahan-Lau (1982) com a utilização dos dados do relatório 4010 (CNPJ)

	emp
P	-5725.485 (1333.547)***
P.Z	1844.124 (519.028)***
P.Y	6282.023 (1292.884)***
vc_03	4950.166 (919.940)***
vc_04	-13.981 (4.562)***
vc_11	-11031.719 (2595.654)***
HHI_ativo	194704.766 (80167.672)**
HHI_dep_vista	-53760.554 (32102.771)*
Constante	-47855.586 (6652.126)***
Nº Observações	5448
Nº BCOS	207
<i>(em parênteses estão os desvios padrões robustos)</i>	
<i>* Significativo a 10%; ** Significativo a 5%; *** Significativo a 1%</i>	

Tabela 8: Apresentação dos valores estimados no 2º Estágio do Modelo Bresnahan-Lau (1982) com a utilização dos dados do relatório 4010 (CNPJ)

	P
LAMB	-0.003 (0.028)
$\frac{C}{Q}$	11.259 (0.265)***
$\frac{C}{Q} * LnQ$	0.169 (0.014)***
$\frac{C}{Q} * W_1$	0.092 (0.009)***
$\frac{C}{Q} * W_2$	-0.643 (0.015)***
dum1	0.000 (0.00)
dum	0.06 (0.377)
Constante	-1.269 (0.226)***
Nº Observações	5448
Nº BCOS	207
R² (within)	.56
<i>(em parênteses estão os desvios padrões robustos)</i>	
<i>* Significativo a 10%; ** Significativo a 5%; *** Significativo a 1%</i>	

Tabela 9: Apresentação dos valores estimados no 1º Estágio do Modelo Bresnahan-Lau (1982) com a utilização dos dados do relatório 4040 (Conglomerado)

	q_emp
P	-29.470 (9.511)***
P.Z	-12.396 (4.022)***
P.Y	85.432 (9.378)***
vc_03	-0.090 (0.012)***
vc_08	0.092 (0.001)***
vc_11	-2.970 (1.270)**
HHI_credito	-36.140 (9.360)***
HHI_dep_vista	-64.600 (10.086)***
Constante	15.821 (1.658)***
Nº Observações	3539
Nº BCOS	175
<i>(em parênteses estão os desvios padrões robustos)</i>	
<i>* Significativo a 10%; ** Significativo a 5%; *** Significativo a 1%</i>	

Tabela 10: Apresentação dos valores estimados no 2º Estágio do Modelo Bresnahan-Lau (1982) com a utilização dos dados do relatório 4040 (Conglomerado)

	P
LAMB	0.022 (0.005)***
$\frac{C}{Q}$	0.000 (0.00)***
$\frac{C}{Q} * LnQ$	0.000 (0.000)***
$\frac{C}{Q} * W_1$	-0.000 (0.000)***
$\frac{C}{Q} * W_2$	0.000 (0.000)
dum1	-0.000 (0.000)*
dum5	-0.259 (0.058)***
Constante	0.106 (0.002)***
Nº Observações	3614
Nº BCOS	175
R² (within)	17
<i>(em parênteses estão os desvios padrões robustos)</i>	
<i>* Significativo a 10%; ** Significativo a 5%; *** Significativo a 1%</i>	

Tabela 11: Apresentação dos valores estimados do Modelo Panzar e Rosse (1987) com a utilização dos dados do relatório 4010 (CNPJ) para dois períodos (até jun/2004 e após jun/2004)

	(1)	(2)
	[RT]	[RT]
d_work	0.205 (0.003)***	0.225 (0.002)***
d_adm	-0.440 (0.094)***	0.001 (0.077)
d_cap	0.715 (0.077)***	0.221 (0.050)***
vc_11	1.370 (0.098)***	1.834 (0.034)***
HHI_dep_vista	-0.469 (0.419)	0.989 (0.372)***
Constante	8.061 (0.130)***	7.058 (0.117)***
Nº Observações	3017	3692
Nº BCOS	199	184
R² (within)	0.79	0.83
H-Panzar	0.480	0.447
DP(H)	0.118	0.090
t-Stat	4.082	4.952
H=1 (p-value)	0.000	0.000
H=0 (p-value)	0.000	0.000

(em parênteses estão os desvios padrões robustos)

* Significativo a 10%; ** Significativo a 5%; *** Significativo a 1%

Tabela 12: Apresentação dos valores estimados do Modelo Panzar e Rosse (1987) com a utilização dos dados do relatório 4040 (Conglomerados) para dois períodos (até jun/2004 e após jun/2004)

	(1)	(2)
	[RT]	[RT]
d_work	0.135 (0.032)***	0.174 (0.027)***
d_adm	-0.354 (0.038)***	-0.226 (0.037)***
d_cap	0.517 (0.033)***	0.178 (0.031)***
vc_11	0.488 (0.161)***	0.857 (0.184)***
d_01	0.066 (0.106)	0.276 (0.100)***
d_cons	0.845 (0.133)***	0.179 (0.086)**
d_03	-0.510 (0.049)***	-0.661 (0.047)***
d_06	-0.000 (0.022)	0.055 (0.026)**
d_09	-0.426 (0.044)***	-0.652 (0.044)***
Constante	7.568 (0.460)***	10.608 (0.387)***
Nº Observações	2912	3256
Nº BCOS	220	179
R² (within)	0.55	0.37
H-Panzar	0.298	0.125
DP(H)	0.056	0.047
t-Stat	5.287	2.641
H=1 (p-value)	0.000	0.000
H=0 (p-value)	0.000	0.0083

(em parênteses estão os desvios padrões robustos)

* Significativo a 10%; ** Significativo a 5%; *** Significativo a 1%

A.2 Derivações dos métodos de Estimação

Esta seção apresenta o modelo de correção para variância do segundo estágio das estimações do modelo de Bresnahan-Lau (1982) e Boone (2008).

Seguindo Wooldridge (2002), para correção dos parâmetros estimados no segundo estágio temos:

$$\begin{cases} S_1 = X' \cdot \hat{\mu}_1 \\ \widetilde{S}_2 = W' \cdot \hat{\mu}_2 + \widetilde{S}_1 \\ \widetilde{S}_1 = (\nabla_{\beta} S_2) \cdot S_1 \end{cases}$$

$$\sigma_{\theta}^2 = \frac{1}{N} \cdot (W'W)^{-1} \cdot (\widetilde{S}_2 \cdot \widetilde{S}_2^t) \cdot (W'W)^{-1}$$

Onde: $\hat{\mu}_1$ resíduos do primeiro estágio, $\hat{\mu}_2$ resíduos do segundo estágio, X' matriz com série de valores das variáveis utilizadas no primeiro estágio, e W' matriz com série de valores das variáveis utilizadas no primeiro estágio.

Observação: os cálculos desta correção, aplicados aos modelos de Bresnahan-Lau (1982) e Boone (2008), foram realizados no MatLab.

A.3 Modelo Boone (2008) no Stata

Para equação de Custo Total a forma funcional é a mesma que Shaffer (1993) e dada por:

$$\ln C = \alpha_0 + \alpha_1 \ln Q + \alpha_2 (\ln Q)^2 + \alpha_3 \ln W_1 + \alpha_4 \ln W_2 + \alpha_5 \frac{\ln(W_1)^2}{2} + \alpha_6 \frac{\ln(W_2)^2}{2} + \alpha_7 \ln W_1 \ln W_2 + \alpha_8 \ln Q \ln W_1 + \alpha_9 \ln Q \ln W_2 \quad (1)$$

e Custo Marginal:

$$CMg = [C/Q][\alpha_1 + 2 \cdot \alpha_2 \ln Q + \alpha_3 \ln W_1 + \alpha_4 \ln W_2] \quad (2)$$

Comando Stata:

```
xtreg ln_ct ln_q ln_q2 ln_Qw1 ln_Qw2 ln_w1 ln_w2 ln_w1_22 ln_w2_22 ln_w1w2 d_1s
y_tri hhi_dep_prazo hhi_ativo_l d_cons vc_04
```

Assim para o primeiro estágio de estimação podemos reescrever (1) por:

$$Y = \alpha \cdot X + \mu_1 \quad (3)$$

Onde:

$$[X]_{[n \times 15]} = [\ln Q, (\ln Q)^2, \ln W_1, \ln W_2, \frac{\ln(W_1)^2}{2}, \frac{\ln(W_2)^2}{2}, \ln W_1, \ln W_2, \ln Q \ln W_1, \ln Q \ln W_2]$$

A equação do modelo Boone (2008) em painel no segundo estágio do sistema é dada por:

$$\ln(\pi_i) = \alpha - \beta_1 \cdot \ln(CMg_i) + \beta_2 \cdot d_{1s} + \beta_3 \cdot HHI_{ATIVO} \quad (4)$$

O parâmetro β_1 estimado representa o BETA do modelo Boone (2008), e os parâmetros ($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_8, \alpha_9$) são parâmetros estimados na equação de Custo Total do primeiro estágio que geram a necessidade de correção da variância dos parâmetros estimados no segundo estágio. Esta correção é para garantir uma mensuração correta das significâncias individuais.

Escrevendo a equação do segundo estágio como em (7) temos:

$$P = \theta \cdot W + \mu_2 \quad (5)$$

Onde:

$$[W]_{[n \times 3]} = [\text{Ln}(CMg_i), d_{1s}, HHI_{ATIVO}]$$

Correção da variância dos parâmetros estimados no segundo estágio:

$$\sigma_{\theta}^2 = (W' \cdot W)^{-1} \cdot (\tilde{S}_2 \cdot \tilde{S}_2') \cdot (W' \cdot W)^{-1} \quad (6)$$

Sendo:

$$S_2 = W' \cdot \widehat{\mu}_2$$

$$S_2 = W' \cdot [P - \theta \cdot W]$$

$$S_{2_{[3 \times 1]}} = \begin{pmatrix} W_{11} & \cdots & W_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{71} & \cdots & W_{7n} \end{pmatrix}_{[3 \times n]} \cdot \begin{pmatrix} P_1 - \theta_1 \cdot W_{11} - \cdots - \theta_3 \cdot W_{13} \\ \vdots \\ P_n - \theta_1 \cdot W_{n1} - \cdots - \theta_3 \cdot W_{n3} \end{pmatrix}_{[n \times 1]}$$

$$S_{2_{[3 \times 1]}} = \begin{pmatrix} S_{2_{[1]}} \\ \vdots \\ S_{2_{[3]}} \end{pmatrix}_{[3 \times 1]} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n (w_{1,j}) \cdot [P_j - \theta_1 \cdot W_{j1} - \cdots - \theta_3 \cdot W_{j3}] \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n (w_{3,j}) \cdot [P_j - \theta_1 \cdot W_{j3} - \cdots - \theta_3 \cdot W_{j3}] \end{pmatrix}_{[3 \times 1]}$$

Como:

$$S_1 = X' \cdot \hat{\mu}_1$$

E então:

$$\tilde{S}_2 = W' \cdot \hat{\mu}_2 + \tilde{S}_1$$

Onde $\tilde{S}_1$ é dado por:

$$\tilde{S}_1 = (\nabla_{\alpha} S_2) \cdot S_1$$

Precisamos então calcular $(\nabla_{\alpha} S_2)$. Seja a seguinte variável:

$$AUX = \left(\frac{C}{Q}\right) \cdot CMg$$

Podemos então reescrever $(\nabla_{\alpha} S_2)$ por:

$$(\nabla_{\alpha} S_2) = \begin{pmatrix} S_{2[1]\alpha_1} & S_{2[1]\alpha_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{2[1]\alpha_8} & S_{2[1]\alpha_9} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_{2[2]\alpha_1} & S_{2[2]\alpha_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{2[1]\alpha_8} & S_{2[1]\alpha_9} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_{2[3]\alpha_1} & S_{2[3]\alpha_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{2[1]\alpha_8} & S_{2[1]\alpha_9} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{[3 \times 14]}$$

Sendo:

Para W1

$$S_{2[1]\alpha_1} = \frac{\partial S_{2[1]}}{\partial \alpha_1} = \sum_{j=1}^n [W_{1,j}] \cdot [(\theta_1) * 2 * AUX] + AUX' \cdot \hat{\mu}_2 = \nabla S_2 [1,1]$$

$$S_{2[1]\alpha_2} = \frac{\partial S_{2[1]}}{\partial \alpha_2} = \sum_{j=1}^n [W_{1,j}] \cdot [(\theta_1) * 2 * AUX * \ln Q] + (2 * AUX * \ln Q)' \cdot \hat{\mu}_2 = \nabla S_2 [1,2]$$

$$S_{2[1]\alpha_8} = \frac{\partial S_{2[1]}}{\partial \alpha_8} = \sum_{j=1}^n [W_{1,j}] \cdot [(\theta_1) * 2 * AUX * \ln W_1] + (AUX * \ln W_1)' \cdot \hat{\mu}_2 = \nabla S_2 [1,8]$$

$$S_{2[1]\alpha_9} = \frac{\partial S_{2[1]}}{\partial \alpha_5} = \sum_{j=1}^n [W_{1,j}] \cdot [(\theta_1) * 2 * AUX * \ln W_2] + (AUX * \ln W_2)' \cdot \hat{\mu}_2 = \nabla S_2 [1,9]$$

Para W2

$$S_{2[2]\alpha_1} = \frac{\partial S_{2[2]}}{\partial \alpha_1} = \sum_{j=1}^n [W_{2,j}] \cdot [(\theta_1) * AUX] = \nabla S_2 [2,1]$$

$$S_{2[2]\alpha_2} = \frac{\partial S_{2[2]}}{\partial \alpha_2} = \sum_{j=1}^n [W_{2,j}] \cdot [(\theta_1) * 2 * AUX * \ln Q] = \nabla S_2 [2,2]$$

$$S_{2_{[2]\alpha_8}} = \frac{\partial S_{2_{[2]}}}{\partial \alpha_8} = \sum_{j=1}^n [W_{2,j}] \cdot [(\theta_1) * 2 * AUX * \ln W_1] = \nabla S_2 [2,8]$$

$$S_{2_{[2]\alpha_9}} = \frac{\partial S_{2_{[2]}}}{\partial \alpha_9} = \sum_{j=1}^n [W_{2,j}] \cdot [(\theta_1) * 2 * AUX * \ln W_2] = \nabla S_2 [2,9]$$

Para W3

$$S_{2_{[3]\alpha_1}} = \frac{\partial S_{2_{[3]}}}{\partial \alpha_1} = \sum_{j=1}^n [W_{3,j}] \cdot [(\theta_1) * AUX] = \nabla S_2 [3,1]$$

$$S_{2_{[3]\alpha_2}} = \frac{\partial S_{2_{[3]}}}{\partial \alpha_2} = \sum_{j=1}^n [W_{3,j}] \cdot [(\theta_1) * 2 * AUX * \ln Q] = \nabla S_2 [3,2]$$

$$S_{2_{[3]\alpha_8}} = \frac{\partial S_{2_{[3]}}}{\partial \alpha_8} = \sum_{j=1}^n [W_{3,j}] \cdot [(\theta_1) * 2 * AUX * \ln W_1] = \nabla S_2 [3,8]$$

$$S_{2_{[3]\alpha_9}} = \frac{\partial S_{2_{[3]}}}{\partial \alpha_9} = \sum_{j=1}^n [W_{3,j}] \cdot [(\theta_1) * 2 * AUX * \ln W_2] = \nabla S_2 [3,9]$$

A.4 Modelo Bresnahan e Lau (1982) no Stata

Equação da Demanda estimada em painel com instrumentos:

$$Q_{EMP} = \alpha_0 + \alpha_1.P + \alpha_3.P.Z + \alpha_5.P.Y + \\ + \alpha_6.VC_{03} + \alpha_7.VC_{08} + \alpha_8.VC_{11} + \alpha_9.HHI_{CRED} + \alpha_{10}.HHI_{DepVista}$$

Comando Stata:

```
xtivreg q_emp vc_03 vc_08 vc_11 hhi_credito hhi_dep_vista (p2 pz2
p2y_tri = y_tri z w1_1 w2_2 lnw1 lnw2 lnw1w2 lnw_b5 lnw_b6), fe
```

Dessa forma P, P.Z e P.Y foram instrumentalizadas por outras variáveis.

Assim no primeiro estágio de estimação das equações temos:

$$Y = \alpha.X + \mu_1 \quad (7)$$

Onde:

$$[X]_{[n \times 8]} = [(\hat{P}), (\hat{P.Z}), (\hat{P.Y}), VC_{03}, VC_{08}, VC_{11}, HHI_{CRED}, HHI_{DepVista}]$$

Para obter $(\hat{P}), (\hat{P.Z}), (\hat{P.Y})$ é necessário calcular cada um dos instrumentos isoladamente como:

```
xtreg p2 y_tri z w1_1 w2_2 lnw1 lnw2 lnw1w2 lnw_b5 lnw_b6, fe
xtreg pz2 y_tri z w1_1 w2_2 lnw1 lnw2 lnw1w2 lnw_b5 lnw_b6, Fe
xtreg p2y_tri y_tri z w1_1 w2_2 lnw1 lnw2 lnw1w2 lnw_b5 lnw_b6, fe
```

A equação de oferta estimada em painel no segundo estágio do sistema é dada por:

$$\begin{aligned}
P_j = & \theta_1 \cdot \frac{C_j}{q_j} + \theta_2 \cdot \frac{C_j}{q_j} \cdot \ln(q_j) + \theta_3 \cdot \frac{C_j}{q_j} \cdot \ln(w_1) + \theta_4 \cdot \frac{C_j}{q_j} \cdot \ln(w_2) \\
& - \theta_5 \cdot \frac{Q}{\alpha_1 + \alpha_3 \cdot Z + \alpha_5 \cdot Y} + \theta_6 \cdot VC_{11} \cdot \frac{Q}{\alpha_1 + \alpha_3 \cdot Z + \alpha_5 \cdot Y} \\
& + \theta_7 \cdot HHI_{CRED} \cdot \frac{Q}{\alpha_1 + \alpha_3 \cdot Z + \alpha_5 \cdot Y} + \varepsilon
\end{aligned} \tag{8}$$

Vamos definir uma variável comum $LAMB = \frac{Q}{\alpha_1 + \alpha_3 \cdot Z + \alpha_5 \cdot Y}$, assim podemos reescrever a equação (8) por:

$$\begin{aligned}
P_j = & \theta_1 \cdot \frac{C_j}{q_j} + \theta_2 \cdot \frac{C_j}{q_j} \cdot \ln(q_j) + \theta_3 \cdot \frac{C_j}{q_j} \cdot \ln(w_1)_j + \theta_4 \cdot \frac{C_j}{q_j} \cdot \ln(w_2)_j \\
& - \theta_5 \cdot LAMB_j + \theta_6 \cdot (VC_{11} \cdot LAMB)_j + \theta_7 \cdot (HHI_{CRED} \cdot LAMB)_j + \varepsilon
\end{aligned} \tag{9}$$

O parâmetro estimado θ_5 representa o lambda do modelo Bresnahan e Lau (1987), e os parâmetros α_1 , α_3 e α_5 são parâmetros estimados na equação de demanda do primeiro estágio. Desta forma é preciso corrigir a variância dos parâmetros estimados no segundo estágio para garantir uma mensuração correta das significâncias individuais.

Comando Stata:

xtreg p2 c2q c2q_lnq c2q_w1_1 c2q_w2_2 lamb dum1 dum5, fe

Escrevendo a equação da oferta como em (7) temos:

$$P = \theta \cdot W + \mu_2 \tag{10}$$

Onde:

$$\begin{aligned}
[W]_{[n \times 7]} = & \\
= & \left[\frac{C_j}{q_j}, \frac{C_j}{q_j} \cdot \ln(q_j), \frac{C_j}{q_j} \cdot \ln(w_1)_j, \frac{C_j}{q_j} \cdot \ln(w_2)_j, LAMB_j, (VC_{11} \cdot LAMB)_j, (HHI_{CRED} \cdot LAMB)_j \right]
\end{aligned}$$

Sendo:

$$LAMB_j = \frac{Q_j}{\alpha_1 + \alpha_3 \cdot Z_j + \alpha_5 \cdot Y_j}$$

Correção da variância dos parâmetros estimados no segundo estágio:

$$\sigma_{\theta}^2 = (W' \cdot W)^{-1} \cdot (\tilde{S}_2 \cdot \tilde{S}_2') \cdot (W' \cdot W)^{-1} \quad (11)$$

Sendo:

$$\begin{aligned} S_2 &= W' \cdot \widehat{\mu}_2 \\ S_2 &= W' \cdot [P - \theta \cdot W] \\ S_{2[7 \times 1]} &= \begin{pmatrix} W_{11} & \cdots & W_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{71} & \cdots & W_{7n} \end{pmatrix}_{[7 \times n]} \cdot \begin{pmatrix} P_1 - \theta_1 \cdot W_{11} - \cdots - \theta_7 \cdot W_{17} \\ \vdots \\ P_n - \theta_1 \cdot W_{n1} - \cdots - \theta_7 \cdot W_{n7} \end{pmatrix}_{[n \times 1]} \\ S_{2[7 \times 1]} &= \begin{pmatrix} S_{2[1]} \\ \vdots \\ S_{2[7]} \end{pmatrix}_{[7 \times 1]} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n (w_{1,j}) \cdot [P_j - \theta_1 \cdot W_{j1} - \cdots - \theta_7 \cdot W_{j7}] \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n (w_{7,j}) \cdot [P_j - \theta_1 \cdot W_{j1} - \cdots - \theta_7 \cdot W_{j7}] \end{pmatrix}_{[7 \times 1]} \end{aligned}$$

Como:

$$S_1 = X' \cdot \widehat{\mu}_1$$

E então:

$$\tilde{S}_2 = W' \cdot \widehat{\mu}_2 + \tilde{S}_1$$

Onde $\tilde{S}_1$ é dado por:

$$\tilde{S}_1 = (\nabla_{\alpha} S_2) \cdot S_1$$

Precisamos então calcular $(\nabla_{\alpha} S_2)$ que é dado por:

$$(\nabla_{\alpha} S_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial S_{2[1]}}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial S_{2[1]}}{\partial \alpha_3} & \frac{\partial S_{2[1]}}{\partial \alpha_5} & \frac{\partial S_{2[1]}}{\partial \alpha_6} & \frac{\partial S_{2[1]}}{\partial \alpha_7} & \frac{\partial S_{2[1]}}{\partial \alpha_8} & \frac{\partial S_{2[1]}}{\partial \alpha_9} & \frac{\partial S_{2[1]}}{\partial \alpha_{10}} \\ \frac{\partial S_{2[2]}}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial S_{2[2]}}{\partial \alpha_3} & \frac{\partial S_{2[2]}}{\partial \alpha_5} & \frac{\partial S_{2[2]}}{\partial \alpha_6} & \frac{\partial S_{2[2]}}{\partial \alpha_7} & \frac{\partial S_{2[2]}}{\partial \alpha_8} & \frac{\partial S_{2[2]}}{\partial \alpha_9} & \frac{\partial S_{2[2]}}{\partial \alpha_{10}} \\ \frac{\partial S_{2[3]}}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial S_{2[3]}}{\partial \alpha_3} & \frac{\partial S_{2[3]}}{\partial \alpha_5} & \frac{\partial S_{2[3]}}{\partial \alpha_6} & \frac{\partial S_{2[3]}}{\partial \alpha_7} & \frac{\partial S_{2[3]}}{\partial \alpha_8} & \frac{\partial S_{2[3]}}{\partial \alpha_9} & \frac{\partial S_{2[3]}}{\partial \alpha_{10}} \\ \frac{\partial S_{2[4]}}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial S_{2[4]}}{\partial \alpha_3} & \frac{\partial S_{2[4]}}{\partial \alpha_5} & \frac{\partial S_{2[4]}}{\partial \alpha_6} & \frac{\partial S_{2[4]}}{\partial \alpha_7} & \frac{\partial S_{2[4]}}{\partial \alpha_8} & \frac{\partial S_{2[4]}}{\partial \alpha_9} & \frac{\partial S_{2[4]}}{\partial \alpha_{10}} \\ \frac{\partial S_{2[5]}}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial S_{2[5]}}{\partial \alpha_3} & \frac{\partial S_{2[5]}}{\partial \alpha_5} & \frac{\partial S_{2[5]}}{\partial \alpha_6} & \frac{\partial S_{2[5]}}{\partial \alpha_7} & \frac{\partial S_{2[5]}}{\partial \alpha_8} & \frac{\partial S_{2[5]}}{\partial \alpha_9} & \frac{\partial S_{2[5]}}{\partial \alpha_{10}} \\ \frac{\partial S_{2[6]}}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial S_{2[6]}}{\partial \alpha_3} & \frac{\partial S_{2[6]}}{\partial \alpha_5} & \frac{\partial S_{2[6]}}{\partial \alpha_6} & \frac{\partial S_{2[6]}}{\partial \alpha_7} & \frac{\partial S_{2[6]}}{\partial \alpha_8} & \frac{\partial S_{2[6]}}{\partial \alpha_9} & \frac{\partial S_{2[6]}}{\partial \alpha_{10}} \\ \frac{\partial S_{2[7]}}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial S_{2[7]}}{\partial \alpha_3} & \frac{\partial S_{2[7]}}{\partial \alpha_5} & \frac{\partial S_{2[7]}}{\partial \alpha_6} & \frac{\partial S_{2[7]}}{\partial \alpha_7} & \frac{\partial S_{2[7]}}{\partial \alpha_8} & \frac{\partial S_{2[7]}}{\partial \alpha_9} & \frac{\partial S_{2[7]}}{\partial \alpha_{10}} \end{pmatrix} \quad [7 \times 8]$$

Sejam as seguintes variáveis:

$$(\gamma 1)_j = (-1) \cdot Q_j \cdot \frac{(1)}{(\alpha_1 + \alpha_3 \cdot Z_j + \alpha_5 \cdot Y_j)^2}$$

$$(\gamma 2)_j = (-1) \cdot Q_j \cdot \frac{(Z_j)}{(\alpha_1 + \alpha_3 \cdot Z_j + \alpha_5 \cdot Y_j)^2}$$

$$(\gamma 3)_j = (-1) \cdot Q_j \cdot \frac{(Y_j)}{(\alpha_1 + \alpha_3 \cdot Z_j + \alpha_5 \cdot Y_j)^2}$$

Podemos então reescrever $(\nabla_{\alpha} S_2)$ por:

$$(\nabla_{\alpha} S_2) = \begin{pmatrix} S_{2[1]\alpha_1} & S_{2[1]\alpha_3} & S_{2[1]\alpha_5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_{2[2]\alpha_1} & S_{2[2]\alpha_3} & S_{2[2]\alpha_5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_{2[3]\alpha_1} & S_{2[3]\alpha_3} & S_{2[3]\alpha_5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_{2[4]\alpha_1} & S_{2[4]\alpha_3} & S_{2[4]\alpha_5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_{2[5]\alpha_1} & S_{2[5]\alpha_3} & S_{2[5]\alpha_5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_{2[6]\alpha_1} & S_{2[6]\alpha_3} & S_{2[6]\alpha_5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_{2[7]\alpha_1} & S_{2[7]\alpha_3} & S_{2[7]\alpha_5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad [7 \times 8]$$

Sendo:

Para W1

$$S_{2_{[1]\alpha_1}} = \frac{\partial S_{2_{[1]}}}{\partial \alpha_1} = \sum_{j=1}^n [W_{1,j}] \cdot [(\gamma_1) \cdot (-\theta_5 - \theta_6 - \theta_7)] = \nabla S_2 [1,1]$$

$$S_{2_{[1]\alpha_3}} = \frac{\partial S_{2_{[1]}}}{\partial \alpha_3} = \sum_{j=1}^n [W_{1,j}] \cdot [(\gamma_2) \cdot (-\theta_5 - \theta_6 - \theta_7)] = \nabla S_2 [1,2]$$

$$S_{2_{[1]\alpha_5}} = \frac{\partial S_{2_{[1]}}}{\partial \alpha_5} = \sum_{j=1}^n [W_{1,j}] \cdot [(\gamma_3) \cdot (-\theta_5 - \theta_6 - \theta_7)] = \nabla S_2 [1,3]$$

Para W2

$$S_{2_{[2]\alpha_1}} = \frac{\partial S_{2_{[2]}}}{\partial \alpha_1} = \sum_{j=1}^n [W_{2,j}] \cdot [(\gamma_1) \cdot (-\theta_5 - \theta_6 - \theta_7)] = \nabla S_2 [2,1]$$

$$S_{2_{[2]\alpha_3}} = \frac{\partial S_{2_{[2]}}}{\partial \alpha_3} = \sum_{j=1}^n [W_{2,j}] \cdot [(\gamma_2) \cdot (-\theta_5 - \theta_6 - \theta_7)] = \nabla S_2 [2,2]$$

$$S_{2_{[2]\alpha_5}} = \frac{\partial S_{2_{[2]}}}{\partial \alpha_5} = \sum_{j=1}^n [W_{2,j}] \cdot [(\gamma_3) \cdot (-\theta_5 - \theta_6 - \theta_7)] = \nabla S_2 [2,3]$$

Para W3

$$S_{2_{[3]\alpha_1}} = \frac{\partial S_{2_{[3]}}}{\partial \alpha_1} = \sum_{j=1}^n [W_{3,j}] \cdot [(\gamma_1) \cdot (-\theta_5 - \theta_6 - \theta_7)] = \nabla S_2 [3,1]$$

$$S_{2_{[3]\alpha_3}} = \frac{\partial S_{2_{[3]}}}{\partial \alpha_3} = \sum_{j=1}^n [W_{3,j}] \cdot [(\gamma_2) \cdot (-\theta_5 - \theta_6 - \theta_7)] = \nabla S_2 [3,2]$$

$$S_{2_{[3]\alpha_5}} = \frac{\partial S_{2_{[3]}}}{\partial \alpha_5} = \sum_{j=1}^n [W_{3,j}] \cdot [(\gamma_3) \cdot (-\theta_5 - \theta_6 - \theta_7)] = \nabla S_2 [3,3]$$

Para W4

$$S_{2_{[4]\alpha_1}} = \frac{\partial S_{2_{[4]}}}{\partial \alpha_1} = \sum_{j=1}^n [W_{4,j}] \cdot [(\gamma_1) \cdot (-\theta_5 - \theta_6 - \theta_7)] = \nabla S_2 [4,1]$$

$$S_{2_{[4]\alpha_3}} = \frac{\partial S_{2_{[4]}}}{\partial \alpha_3} = \sum_{j=1}^n [W_{4,j}] \cdot [(\gamma_2) \cdot (-\theta_5 - \theta_6 - \theta_7)] = \nabla S_2 [4,2]$$

$$S_{2_{[4]\alpha_5}} = \frac{\partial S_{2_{[4]}}}{\partial \alpha_5} = \sum_{j=1}^n [W_{4,j}] \cdot [(\gamma_3) \cdot (-\theta_5 - \theta_6 - \theta_7)] = \nabla S_2 [4,3]$$

Para W5

$$\begin{aligned}
S_{2_{[5]\alpha_1}} &= \frac{\partial S_{2_{[5]}}}{\partial \alpha_1} \\
&= \sum_{j=1}^n \left[[(\gamma_1) \cdot [P_j - \theta_1 \cdot W_{j,1} - \dots - \theta_7 \cdot W_{j,7}]] + [W_{5,j}] \cdot [(\gamma_1) \cdot (-\theta_5 - \theta_6 - \theta_7)] \right] \\
&= \nabla S_2 [5,1]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{2_{[5]\alpha_3}} &= \frac{\partial S_{2_{[5]}}}{\partial \alpha_3} \\
&= \sum_{j=1}^n \left[[(\gamma_2) \cdot [P_j - \theta_1 \cdot W_{j,1} - \dots - \theta_7 \cdot W_{j,7}]] + [W_{5,j}] \cdot [(\gamma_2) \cdot (-\theta_5 - \theta_6 - \theta_7)] \right] \\
&= \nabla S_2 [5,2]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{2_{[5]\alpha_5}} &= \frac{\partial S_{2_{[5]}}}{\partial \alpha_5} \\
&= \sum_{j=1}^n \left[[(\gamma_3) \cdot [P_j - \theta_1 \cdot W_{j,1} - \dots - \theta_7 \cdot W_{j,7}]] + [W_{5,j}] \cdot [(\gamma_3) \cdot (-\theta_5 - \theta_6 - \theta_7)] \right] \\
&= \nabla S_2 [5,3]
\end{aligned}$$

Para W6

$$\begin{aligned}
S_{2_{[6]\alpha_1}} &= \frac{\partial S_{2_{[6]}}}{\partial \alpha_1} \\
&= \sum_{j=1}^n \left[[(VC_{11} \cdot \gamma_1)_j \cdot [P_j - \theta_1 \cdot W_{j,1} - \dots - \theta_7 \cdot W_{j,7}]] \right. \\
&\quad \left. + [W_{6,j}] \cdot [(\gamma_1) \cdot (-\theta_5 - \theta_6 - \theta_7)] \right] = \nabla S_2 [6,1]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{2_{[6]\alpha_3}} &= \frac{\partial S_{2_{[6]}}}{\partial \alpha_3} \\
&= \sum_{j=1}^n \left[[(VC_{11} \cdot \gamma_2)_j \cdot [P_j - \theta_1 \cdot W_{j,1} - \dots - \theta_7 \cdot W_{j,7}]] \right. \\
&\quad \left. + [W_{6,j}] \cdot [(\gamma_2) \cdot (-\theta_5 - \theta_6 - \theta_7)] \right] = \nabla S_2 [6,2]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{2_{[6]\alpha_5}} &= \frac{\partial S_{2_{[6]}}}{\partial \alpha_5} \\
&= \sum_{j=1}^n \left[[(VC_{11} \cdot \gamma_3)_j \cdot [P_j - \theta_1 \cdot W_{j,1} - \dots - \theta_7 \cdot W_{j,7}]] \right. \\
&\quad \left. + [W_{6,j}] \cdot [(\gamma_3) \cdot (-\theta_5 - \theta_6 - \theta_7)] \right] = \nabla S_2 [6,3]
\end{aligned}$$

Para W7

$$\begin{aligned}
S_{2_{[7]\alpha_1}} &= \frac{\partial S_{2_{[7]}}}{\partial \alpha_1} \\
&= \sum_{j=1}^n \left[\left[(HHI_{CRED} \cdot \gamma_1)_j \cdot [P_j - \theta_1 \cdot W_{j,1} - \dots - \theta_7 \cdot W_{j,7}] \right] \right. \\
&\quad \left. + [W_{7,j}] \cdot [(\gamma_1) \cdot (-\theta_5 - \theta_6 - \theta_7)] \right] = \nabla S_2 [7,1]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{2_{[7]\alpha_3}} &= \frac{\partial S_{2_{[7]}}}{\partial \alpha_3} \\
&= \sum_{j=1}^n \left[\left[(HHI_{CRED} \cdot \gamma_2)_j \cdot [P_j - \theta_1 \cdot W_{j,1} - \dots - \theta_7 \cdot W_{j,7}] \right] \right. \\
&\quad \left. + [W_{7,j}] \cdot [(\gamma_2) \cdot (-\theta_5 - \theta_6 - \theta_7)] \right] = \nabla S_2 [7,2]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{2_{[7]\alpha_5}} &= \frac{\partial S_{2_{[7]}}}{\partial \alpha_5} \\
&= \sum_{j=1}^n \left[\left[(HHI_{CRED} \cdot \gamma_3)_j \cdot [P_j - \theta_1 \cdot W_{j,1} - \dots - \theta_7 \cdot W_{j,7}] \right] \right. \\
&\quad \left. + [W_{7,j}] \cdot [(\gamma_3) \cdot (-\theta_5 - \theta_6 - \theta_7)] \right] = \nabla S_2 [7,3]
\end{aligned}$$