A relevância geral do Índice de Sharpe*

NEY ROBERTO OTTONI DE BRITO**

A relevância do Índice de Sharpe para a seleção de carteiras pode ser examinada no contexto de "adicionar estratégia", considerando um investidor com uma carteira preexistente e que deseja rebalanceá-la adicionando um conjunto de swaps *de investimento zero. A relevância do Índice de Sharpe em casos especiais de adicionar estratégia tem sido discutida, mas sua relevância no contexto do problema geral de adicionar estratégia — adicionar um portfólio de* swaps *de investimento zero correlacionados entre si e correlacionados com a carteira inicial — permanece pouco clara porque o índice não inclui informações sobre a correlação do seu retorno com o da carteira preexistente. Este trabalho irá resolver o problema geral de adicionar estratégia. A relevância do Índice de Sharpe, no caso geral, é então formalmente mostrada.*

1 - Introdução

A relevância do Índice de Sharpe no processo de gestão de investimentos deriva-se diretamente do trabalho original de Sharpe (1964) e é revista e consolidada pelo próprio autor em Sharpe (1994). Esse trabalho clássico mostra a relevância do Índice de Sharpe, considerando "o caso de um investidor com uma carteira preexistente que está considerando a escolha de uma estratégia de investimento zero para expandir os seus investimentos" [Sharpe (1994, p. 53)]. Essa formulação básica é definida por Sharpe (1994) como *Adding A Zero- Investment Strategy to an Existing Portfolio*.

Nesse contexto, Sharpe (1994) prossegue para mostrar a relevância do Índice de Sharpe em três casos:

a) adicionando estratégia para uma carteira preexistente sem qualquer risco;

b) adicionando estratégia para uma carteira preexistente de risco através de um único fundo selecionado de um conjunto de fundos de risco identicamente correlacionados com a carteira preexistente; e

c) adicionando estratégia para uma carteira preexistente de risco através de uma carteira de fundos de risco não-correlacionados nem com a carteira preexistente nem entre si.

* O autor agradece os comentários de William Sharpe em versões anteriores e o apoio geral da Área de Mercado de Capitais do Banco Itaú. Os eventuais erros remanescentes são de sua responsabilidade.

** Sócio-diretor de Ney O. Brito & Associados e *chairman* do Comitê Técnico do International Association of Finance Executives Institutes (Iafei).

Pesq. Plan. Econ., Rio de Janeiro, v. 30, n. 3, p. 383-394, dez. 2000

Em seu artigo clássico Sharpe (1994) corretamente observa que, no caso geral de adicionar estratégia para uma carteira preexistente de risco através de uma carteira de fundos de risco correlacionados com a carteira preexistente e correlacionados entre si, o papel do Índice de Sharpe não é muito claro porque, "enquanto o índice considera os dois aspectos centrais do desempenho de investimento (o seu retorno esperado e o seu risco), ele não inclui informação sobre a correlação do seu retorno com aquele dos outros investimentos do investidor" [Sharpe (1994, p. 55)] na carteira preexistente. Entretanto, ele não se endereça nem se propõe a resolver o problema geral de adicionar estratégia.

Este trabalho irá resolver o problema geral de adicionar estratégia de investimento zero para uma carteira preexistente. A relevância do Índice de Sharpe, no caso geral, é então formalmente mostrada.

2 - Resolvendo o problema geral de adicionar estratégia

Esta seção irá resolver o problema geral de adicionar estratégia de um investidor que quer rebalancear sua carteira global para o próximo período de investimentos usando contratos de investimento zero, em geral, e *swaps*, em particular. Como em Sharpe (1994), supõe-se que o investidor mantém uma carteira original e preexistente, não ótima no início do período, e quer rebalancear a sua combinação de risco e retorno. A carteira original e preexistente pode não ser ótima pela existência de restrições legais à venda de ativos, mudanças em preferências por risco ou outras possíveis razões.

O investidor irá rebalancear a sua carteira original e preexistente no contexto de Sharpe (1994), adicionando uma carteira de *swaps* de risco de um determinado universo de *swaps* de risco viáveis. Os mercados são assumidos perfeitos sem custos de transação e nenhuma restrição é imposta sobre a estrutura da matriz variância-co-variância de *swaps* de risco ou sobre a estrutura de co-variâncias entre os *swaps* de risco e a carteira original.

Inicialmente, uma notação básica precisa ser estabelecida. Defina-se:

$\tilde{r}_o \sim N(E_o, \sigma_o)$ = distribuição de retorno da carteira original do investidor;

NA_x = fator de escala e valor nocional dos investimentos no *swap* X;

A = valor de mercado da carteira original;

$p_x = NA_x / A$ = valor nocional relativo ao valor de mercado dos investimentos originais;

$\tilde{d}_x \sim N(\bar{d}_x, \sigma_{dx})$ = retorno diferencial oferecido pelo *swap* X;

ρ_x = correlação entre $\tilde{d}_x$ e $\tilde{r}_o$;

C_{ox} = co-variância entre $\tilde{d}_x$ e $\tilde{r}_o$;

$S_x = \dfrac{\bar{d}_x}{\sigma_{dx}}$ = Índice de Sharpe do *swap* de investimento zero X;

$E = \{\bar{d}_x\}$ = vetor de retornos esperados do universo de *swaps*;

C = matriz variância-co-variância dos *swaps* de risco;

$C_o = \{C_{ox}\}$ = vetor de co-variâncias entre os *swaps* e os investimentos originais;

$P = \{p_x\}$ = vetor de posições alavancadas no universo de *swaps*;

$\tilde{R} = \{\tilde{d}_x\}$ = vetor de retornos aleatórios oferecidos pelo universo de *swaps*;

$\tilde{r}_t = \tilde{r}_o + P'\tilde{R}$ = retorno terminal aleatório da carteira agregada de investimentos originais e *swaps*;

E_t, σ_t = média e desvio-padrão de $\tilde{r}_t$;

γ = taxa marginal de substituição na combinação ótima $\tilde{r}_t^{\,*}$; e

r_F = taxa de retorno no ativo sem risco.

Considere o investidor com uma carteira original O rebalanceada adicionando uma carteira de *swaps* P. O retorno total agregado do investidor para o próximo período de investimento é obtido por:

$$\tilde{r}_t = \tilde{r}_o + P'\tilde{R} \tag{1}$$

e o problema de seleção de *swaps* pode ser analisado no contexto usual de seleção no espaço média variância, admitindo-se que a distribuição conjunta de todas as variáveis aleatórias envolvidas é multivariada normal.

Se vendas a descoberto dos *swaps* de investimento zero e posições longas nos *swaps* reversos são viáveis, então o problema de seleção de *swaps* pode ser representado por:

$$\underset{\{P\}}{\text{Min}}\ \sigma_t^2 - \gamma E_t \tag{2}$$

Como os *swaps* envolvem investimento zero, não existem quaisquer restrições de riqueza ou de soma de pesos no programa. A solução do programa pode ser obtida por derivação da função objetivo. Como:

$$\sigma_t^2 = P'CP + 2P'C_o + \sigma_o^2$$

e:

$$E_t = E_o + P'E$$

então, na carteira ótima de *swaps*,

$$\frac{\partial}{\partial P} \text{ função objetivo} = 2CP + 2C_o - \gamma E = 0$$

A carteira ótima de *swaps* é, então,

$$P^* = \frac{\gamma}{2} C^{-1} E - C^{-1} C_o \tag{3}$$

e definindo-se

$$\eta = \frac{1}{2} C^{-1} E \text{ e } \theta = -C^{-1} C_o \tag{4}$$

então:

$$P^* = \gamma\eta + \theta \tag{5}$$

Nesse ponto, parece crítico obter um melhor entendimento das duas carteiras: η e θ.

Observe-se que a carteira ótima de *swaps* P^* pode ser estruturada como um único contrato pelo investidor e sua contraparte. O investidor não precisa negociar cada um dos *swaps* elementares. A composição de P^* define a estrutura do contrato único a ser negociado. Observe-se também que P^* é a solução do problema geral de adicionar estratégia proposto por Sharpe (1994).

3 - A carteira de *hedge* θ e suas implicações

Para se achar a carteira de *swaps* que minimiza o risco total do investidor é preciso resolver o seguinte programa:

$$\underset{\{P\}}{\text{Min}}\, \sigma_t^2 = P'CP + 2P'C_o + \sigma_o^2$$

A solução pode, mais uma vez, ser obtida por diferenciação:

$$\frac{\partial \sigma_t^2}{\partial P} = 2CP + 2C_o = 0$$

A solução é, então,

$$P = -C^{-1}C_o = \theta \qquad (6)$$

Segue-se que a carteira θ apresenta características interessantes. Ela não depende de preços ou preferências, nem mesmo de expectativas. Ela simplesmente diversifica o máximo possível de risco da carteira original e preexistente.

É importante observar, também, uma outra propriedade crítica de θ: ela é um *hedge* perfeito de risco de co-variância. Decorre da relação (6) que, para qualquer carteira K de *swaps*,

$$\text{Cov}(\tilde{\theta}, \tilde{K}) = K'C\theta = K'C(-C^{-1}C_o) = -K'C_o = -\text{Cov}(\tilde{r}_o, \tilde{K}) \qquad (7)$$

Quer dizer, a co-variância de $\tilde{\theta}$ com qualquer carteira de *swaps* é igual a menos a co-variância dos investimentos originais com a carteira de *swaps*. Isso implica que a co-variância de $(\tilde{r}_o + \theta)$ — os investimentos originais mais θ — com qualquer carteira de *swaps* é zero:

$$\text{Cov}(\tilde{r}_o + \tilde{\theta}, \tilde{K}) = \text{Cov}(\tilde{r}_o, \tilde{K}) + \text{Cov}(\tilde{\theta}, \tilde{K}) = 0 \qquad (8)$$

Parece intuitivo que o investidor pode ajustar e eliminar o risco de co-variância selecionando uma carteira adequada de *swaps*. Ajustando a carteira de *swaps* a ser adicionada aos investimentos originais, o investidor pode ajustar o nível de co-variância com o universo de *swaps*. O resultado mais importante é que a carteira θ que elimina o risco de co-variância é também a que minimiza o risco total. Como a carteira θ diversifica todo o risco de co-variância dos investimentos originais e também minimiza o risco desses investimentos, parece adequado defini-la como a carteira de *hedge* do investidor.

Observe-se que, se a estrutura do conjunto de *swaps* viáveis permite a composição de uma carteira ξ que é perfeitamente negativamente correlacionada com a carteira original O, então $\xi = -O$ iria satisfazer as equações (7) e (8). Ela seria a carteira de *hedge* do investidor $\xi = \theta$. No primeiro estágio do processo de seleção, o investidor iria, então, "vender" os seus investimentos originais através de *swaps*.

Mais especificamente, se os mercados de *swaps* são completos — isto é, todo o ativo pode ser "swapado" contra qualquer outro ativo —, então o *swap* do ativo sem risco de retorno r_F contra os investimentos originais O oferece retornos diferenciais de $(r_F - \tilde{r}_o)$ e é perfeitamente negativamente correlacionado com os investimentos originais.

Esse *swap*, portanto, representa a carteira de *hedge* θ do investidor, que no primeiro estágio do processo de seleção obtém o equivalente ao investimento completo no ativo sem risco. Comprar o *swap* é equivalente a vender os investimentos originais e investir todos os recursos no ativo sem risco.

Se os mercados de *swaps* são incompletos, então existirá uma carteira de *hedge* θ que diversifica todo o risco de co-variância, mas não todo o risco. Após comprar a carteira de *swap* θ, o investidor não estará numa posição sem risco associada ao investimento pleno no ativo sem risco.

Decorre das equações (3) a (5) que a carteira ótima de *swaps* para qualquer investidor é a soma de duas carteiras. Uma delas é θ, que é específica para cada investidor, mas independente de suas preferências e dos preços de *swaps*. A segunda carteira é η, que é ajustada escalarmente pelas preferências de risco do investidor e γ. Entretanto, η é dependente de expectativas e preços. Esses resultados serão explorados na seção seguinte.

4 - A carteira de máximo Índice de Sharpe η e implicações

Como qualquer investidor irá sempre demandar sua carteira de *hedge* θ no primeiro estágio do processo de seleção de *swaps*, parece fazer sentido se definir o conjunto dos investimentos originais $O + \theta$ como a carteira original virtual de investimentos O^* do investidor: $O^* = O + \theta$.

Decorre da equação (8) que, para qualquer *swap X* oferecendo retornos diferenciais $\tilde{d}_x$,

$$C_{ox}^{*} = \mathrm{Cov}(\tilde{r}_o^{*}, \tilde{d}_x) = \mathrm{Cov}(\tilde{r}_o + \tilde{\theta}, \tilde{d}_x) = 0$$

Como discutido no Apêndice — implicação (*a*) — esse resultado pressupõe que O^* irá sempre representar a combinação de mínima variância no lugar geométrico de posições alavancadas de qualquer *swap X*. O lugar geométrico hiperbólico de posições alavancadas é sempre definido pela combinação de mínima variância e pela sua assíntota. Entretanto, como a combinação de mínima variância O^* é sempre a combinação de mínima variância no lugar geométrico de posições alavancadas em qualquer *swap X*, então a assíntota irá determinar completamente o lugar geométrico.

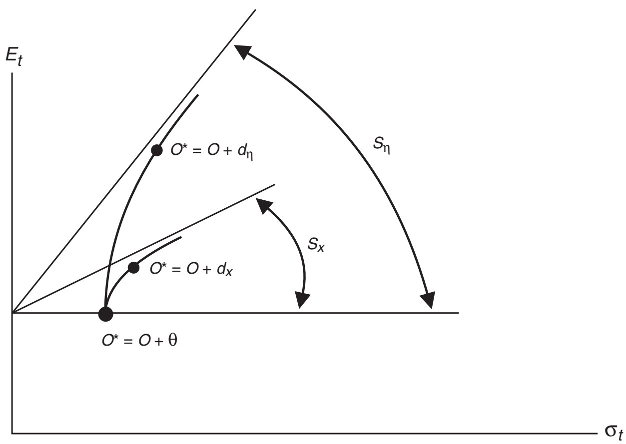
Mas, como mostrado no Apêndice, a assíntota do lugar geométrico associado a qualquer *swap X* é definida pelo seu Índice de Sharpe S_x. Nesse contexto, após adquirir a carteira de *swaps* θ e atingir seu conjunto virtual de investimentos originais O^*, o investidor deve sempre e somente demandar a carteira oferecendo o maior Índice de Sharpe.[1]

Esse resultado implica que η é a carteira de *swaps* oferecendo o máximo Índice de Sharpe, como mostra o gráfico a seguir. O processo de seleção de *swap* do investidor, então, parece claro. No primeiro estágio, ele demanda a carteira de *hedge* θ de *swaps*, minimizando o risco total e eliminando todos os componentes de risco de co-variância. No segundo, ele adiciona o montante adequado da carteira de máximo Índice de Sharpe η — ajustada escalarmente pelo fator de preferência de risco γ — adicionando risco, mas também adicionando retorno à melhor taxa possível. O resultado também estabelece a relevância geral do Índice de Sharpe no contexto de adicionar estratégia proposto por Sharpe (1994).

Mais uma vez deve ser observado que a representação em dois estágios foi utilizada apenas para facilitar o entendimento do processo. Em termos práticos, o investidor iria negociar um único contrato com sua contraparte e a estrutura desse contrato seria definida por P^*.

1 Observe-se que depois de adquirir θ e atingir o conjunto virtual de investimentos originais O^* com correlação zero com universo de *swaps*, o investidor está essencialmente no primeiro caso discutido por Sharpe (1994), ou seja, adicionando estratégia para uma carteira original sem risco e não-correlacionada com o universo de *swaps*. Como mostra o autor, nesse caso o investidor irá demandar a carteira de *swaps* oferecendo o mais elevado Índice de Sharpe. Isso corresponde exatamente à demanda do investidor no caso geral depois de ter conduzido o *hedge* do risco de co-variância.

O segundo estágio do processo de seleção de *swap*



Obs.: S_η é o máximo Índice de Sharpe.

5 - Conclusões

Este trabalho examinou o problema de rebalanceamento de portfólio de um investidor avesso a risco no contexto de adicionar estratégia para uma carteira preexistente como proposto por Sharpe (1994). O problema geral de adicionar estratégia para uma carteira preexistente de risco através de uma carteira de fundos de risco correlacionados com a carteira preexistente e correlacionados entre si é resolvido e mostra-se que o problema de rebalanceamento de carteira do investidor pode ser representado por um processo em dois estágios.

No primeiro estágio, o investidor irá demandar a carteira de *hedge* de co-variância θ que, quando é adicionada aos seus investimentos originais, deixa a combinação total não-correlacionada com o universo de *swaps* de investimentos zero. No segundo estágio, o investidor irá adicionar um montante adequado da carteira de *swaps* de investimento zero que oferece o máximo Índice de Sharpe.

A relevância do Índice de Sharpe no problema geral de adicionar estratégia, que era considerado pouco claro por Sharpe (1994), parece agora bastante claro. Após adquirir a carteira que diversifica o risco de co-variância com o universo de *swaps*, qualquer investidor irá prosseguir para selecionar a carteira de *swaps* de investimento zero oferecendo o máximo Índice de Sharpe.

Apêndice

A matemática do lugar geométrico de posições alavancadas no *swap X*

Este Apêndice irá discutir o lugar geométrico de posições alavancadas no *swap X*. A combinação total associada com o investimento nocional de NA_x do *swap X* é:

$$\tilde{r}_t = \tilde{r}_o + p_x \tilde{d}_x$$

que oferece um retorno terminal esperado e variância dados por:

$$E_t = E_o + p_x \bar{d}_x$$

e:

$$\sigma_t^2 = \sigma_o^2 + 2p_x C_{ox} + p_x^2 \sigma_{dx}^2 = \sigma_o^2 + 2p_x \rho_x \sigma_o \sigma_{dx} + p_x^2 \sigma_{dx}^2$$

Variando p_x pode ser obtido o lugar geométrico das combinações no espaço média variância e o lugar geométrico de posições alavancadas no *swap X*.

Definindo-se os portfólios P_1 e P_2^x como:

P_1 = carteira de investimentos originais oferecendo $\tilde{r}_o$; e

P_2^x = carteira de investimentos originais mais o *swap X* oferecendo $\tilde{r}_o + \tilde{d}_x$.

Mais ainda, definindo-se a combinação convexa k de P_1 e P_2^x como:

$$P_k^x = (1-k) P_1 + k P_2^x$$

então, o retorno $\tilde{r}_k$ oferecido por P_k^x pode ser expresso por:

$$\tilde{r}_k = (1-k)\tilde{r}_o + k(\tilde{r}_o + \tilde{d}_x) = \tilde{r}_o + k\tilde{d}_x \qquad \text{(A.1)}$$

Decorre da equação (A.1) que a combinação com alavancagem p_x no *swap* pode ser representada por uma combinação convexa k dos portfólios P_1 e P_2^x, em que $p_x = k$.

Da matemática de teoria de carteiras decorre que o lugar geométrico de posições alavancadas no *swap* X é uma hipérbole no espaço $E - \sigma$ com um eixo paralelo ao eixo de σ, como apresentado no gráfico a seguir.

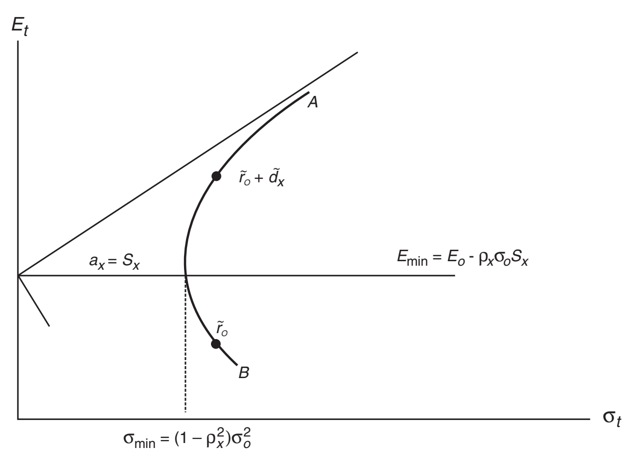
Observe-se que no gráfico o segmento $\tilde{r}_o A$ envolve posições longas crescentemente alavancadas no *swap* X e o segmento $\tilde{r}_o B$ envolve posições curtas crescentemente alavancadas no *swap* X ou, alternativamente, ele envolve posições longas alavancadas no *swap* reverso. Se posições curtas no *swap* X e posições longas no *swap* reverso não são viáveis, então o segmento $\tilde{r}_o B$ não seria viável.

Decorre de Merton (1972) e da matemática da teoria de portfólios que:

a) A tangente no lugar geométrico para uma determinada combinação convexa p_x em $E_t - \sigma_t$ é:

$$SL_{px} = \frac{\bar{d}_x \sigma_t}{(\rho_x \sigma_o \sigma_{dx} + p_x \sigma_{dx}^2)} \tag{A.2}$$

Lugar geométrico de posições alavancadas no *swap* de investimento zero *X*



b) As assíntotas $\pm a_x$ são definidas por:

$$a_x = \pm \left| \frac{\bar{d}_x}{\sigma_{dx}} \right| = \pm \text{Índice de Sharpe do } \textit{swap } X \tag{A.3}$$

c) A combinação de mínima variância MV_x é obtida por:

$$p_x = -\rho_x \frac{\sigma_o}{\sigma_{dx}} \tag{A.4}$$

e sua média e variância são obtidas por:

$$E_{\min} = E_o - \rho_x \frac{\sigma_o}{\sigma_{dx}} \bar{d}_x = E_o - \rho_x \sigma_o S_x \tag{A.5}$$

e:

$$\sigma_{\min} = (1 - \rho_x^2)\sigma_o^2 \tag{A.6}$$

Recordando que uma hipérbole é completamente determinada por suas assíntotas e por sua combinação de mínima variância, pode-se afirmar que o lugar geométrico é definido pelo Índice de Sharpe S_x e pela correlação ρ_x. O Índice de Sharpe S_x define as assíntotas e S_x e ρ_x definem a combinação de mínima variância no eixo da hipérbole.

As equações (A.2) a (A.6) têm diversas implicações interessantes:

a) se $\rho_x = C_{ox} = 0$, então os investimentos associados à carteira original com risco e retorno (E_o, σ_o) representam a combinação mínima variância — isso decorre das equações (A.5) e (A.6); e

b) a tangente do lugar geométrico na combinação dos investimentos originais E_o, σ_o é a relação S_x / ρ_x — isso decorre de (A.2) com $p_x = 0$ e $\sigma_t = \sigma_o$ — e implica que o gradiente de mudanças locais em E_o e σ_o é definido pela relação entre o Índice de Sharpe e a correlação.

Mais ainda, substituindo-se σ_t em (A.2) pode ser obtida uma solução direta para o nível de alavancagem p_x associado a uma determinada tangente:

$$SL_{px} = \frac{\bar{d}_x(\sigma_o^2 + 2p_x\rho_x\sigma_o\sigma_{dx} + p_x^2\sigma_{dx}^2)}{\rho_x\sigma_o\sigma_{dx} + p_x\sigma_{dx}^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{d}_x p_x^2 + (2\rho_x S_x\sigma_o - SL_{px})p_x + (S_x\sigma_o - SL_{px}\rho_x)\frac{\sigma_o}{\sigma_{dx}} = 0 \qquad \text{(A.7)}$$

A solução de (A.7) associada com o trecho dominante do lugar geométrico é o nível de alavancagem p_x associado com o nível SL_{px} da tangente. No caso de preferências lineares nos espaços E e σ, a equação (A.7) pode ser utilizada para se obter o nível ótimo de alavancagem.

Abstract

The relevance of the Sharpe Ratio for portfolio selection has been examined in the context of "adding strategy" considering an investor with an existing portfolio who wants to rebalance his or her portfolio by adding zero investment swaps. The relevance of the Sharpe Ratio in special cases of adding strategy has been shown but its relevance in the general adding strategy problem — adding a portfolio of zero investment swaps correlated among themselves and correlated with the existing portfolio — remains unclear because the ratio does not include information about the correlation of its return with that of the existing portfolio. This paper will solve the general adding strategy problem. The relevance of the Sharpe Ratio in the general case is then formally shown.

Bibliografia

MERTON, R. An analytical derivation of the efficient portfolio frontier. *Journal of Finance and Quantitative Analysis*, Sep. 1972.

SHARPE, W. F. Capital asset prices: a theory of market equilibrium under conditions of risk. *The Journal of Finance*, p. 425-441, Sep. 1964.

——————. The Sharpe Ratio. *Journal of Portfolio Management*, Fall 1994.

(Originais recebidos em janeiro de 2001. Revistos em abril de 2001.)