

Um estudo sobre a volatilidade do mercado futuro de taxa de juros no Brasil*

EDUARDA CUNHA DE LA ROCQUE**

MÁRCIO G. P. GARCIA***

O mercado futuro de DI (taxas de juros) tornou-se, ao longo dos últimos anos, um dos mais importantes mercados financeiros da economia brasileira, movimentando hoje em dia um volume de aproximadamente R\$ 40 bilhões. A literatura certamente registrará nos próximos anos muitos artigos que usarão os dados do mercado futuro de DI como insumo. Entretanto, dadas as idiosincrasias desse mercado, a abordagem tradicionalmente usada para analisar o comportamento estatístico dos preços futuros não é válida. Mostramos que, devido à acumulação dos juros diários sobre o preço unitário, a série dos preços futuros apresenta uma "heterocedasticidade cíclica" que irá persistir a transformações estabilizadoras de variância (logarítmica ou qualquer outra do tipo Box-Cox) e a diferenciações de qualquer ordem. Apresentam-se formas alternativas de organizar os dados e discutem-se as limitações e vantagens de cada uma delas. Dados o ineditismo e a importância do mercado futuro de DI, este artigo traz uma importante contribuição metodológica à análise empírica em finanças no Brasil.

1 - Introdução

O mercado futuro de taxa de juros do Brasil é representado essencialmente pelos contratos futuros de taxa média de depósitos interfinanceiros (DI) de um dia, já que o de DI prefixado de 30 dias não apresenta muita liquidez. O mercado futuro de DI de um dia opera na Bolsa de Mercadorias & Futuros (BM&F) desde 5/6/91 e, a partir de então, tem ganho crescente importância, com o volume de contratos em aberto crescendo dos US\$ 744 milhões iniciais para US\$ 3 bilhões em janeiro de 1994. É, portanto, um mercado emergente e importante, já que propicia cobertura específica ao risco de oscilação de uma das variáveis mais importantes da economia: a taxa de juros. Sendo assim, é de suma importância entender bem o seu funcionamento, particularmente o fato

* Este artigo faz parte do projeto de pesquisa do Prof. Márcio G. P. Garcia sobre mercados de derivados financeiros no Brasil e contou com o apoio financeiro do programa de pesquisa Paradi (Canadá). Agradecemos o trabalho de assistência à pesquisa de Antônio Carlos Baptista Monteiro e, principalmente, Eugênia Essinger Souto de Oliveira, bem como os comentários de Roberto Berardo sobre o funcionamento do mercado de DI.

** Doutoranda do Departamento de Economia da PUC-RJ.

***Do Departamento de Economia da PUC-RJ e do CNPq.

de que ele opera de forma bastante diversa dos mercados futuros de taxas de juros tradicionais.

Tomemos, por exemplo, o mercado futuro de *Treasury-bills*, existente na bolsa americana (American Stock Exchange) [ver Duffie (1989)]. O objeto de negociação do contrato é um título (a *T-bill*), cujo prazo de maturação é de três meses a partir da data de vencimento do contrato futuro. Sendo assim, o que os participantes estarão tentando "prever" será o preço de uma *T-bill* de três meses na data de vencimento do contrato futuro, ou seja, estarão tentando prever a taxa de juros dos três meses posteriores à data de vencimento do contrato. Já no mercado de DI de um dia, os participantes tentam "prever" qual será a taxa de juros que se acumula sobre o preço unitário (*PU*) desde a data de negociação do contrato até seu vencimento. Sendo assim, estão em questão as taxas do próprio mês em que se negocia o contrato futuro, e não as que irão vigorar após o seu vencimento. Tal diferença tem importantes impactos sobre o funcionamento do mercado e, como se demonstrará ao longo deste artigo, também sobre o modelo econométrico que deve ser usado para estudá-lo.

Duffie (1989, p.165) escreve: "as propriedades estatísticas dos preços futuros são ingredientes essenciais em muitas aplicações, tais como a escolha de posições de *hedge* e a decisão sobre a introdução de um novo contrato futuro". Particular importância para essas e outras aplicações (como determinação de preços de derivativos) repousa sobre o estudo da *volatilidade*.

O objetivo principal deste artigo, em essência um estudo sobre a volatilidade do mercado futuro de DI, é mostrar que o procedimento proposto no Capítulo 6 daquele livro — que doravante denominaremos simplesmente Duffie — sobre como analisar o comportamento estatístico das séries de preços futuros não é válido para o mercado futuro de DI. A razão é que a série proposta pelo autor como relevante, ou seja, diferença dos logs dos preços — que doravante denotaremos genericamente *série L*¹ —, é, no caso do mercado futuro de DI, heterocedástica. E esta heterocedasticidade em nada tem a ver com raízes unitárias ou com variâncias condicionais auto-regressivas (modelos ARCH e seus variantes), sendo essencialmente *cíclica*, por estar relacionada ao *prazo de maturação* do contrato, e que persiste a despeito de qualquer transformação de Box e Cox e de qualquer número de "tiradas de diferenças".

Na seção que se segue a esta introdução, explica-se brevemente como funciona o mercado futuro de DI, deixando claras as suas peculiaridades em relação a um mercado futuro típico. Na Seção 3 desenvolve-se o aparato teórico-econométrico: definem-se as séries relevantes e derivam-se formalmente as propriedades estatísticas da série *L*. Para que se mostre a heterocedasticidade, estaremos obviamente interessados em sua variância, que irá depender de dois fatores: a hipótese sobre como se comporta a taxa de juros ao longo do tempo e o número de dias úteis até a data de vencimento do contrato. Este último fator acabou por se mostrar a variável-chave da idiosincrasia do mercado futuro de DI.

¹ A série "diferença dos logs dos preços" seria a relevante segundo Duffie por atender às "condições de mínimos quadrados ordinários". Como este é o argumento que iremos refutar, toda a nossa análise estará concentrada na série *diferença dos logs dos preços* (série *L*).

A Seção 4 diz respeito à parte empírica e se constitui de três partes: a primeira trata da questão de como devem se organizar os dados de DI-futuro em séries "homogêneas", ou seja, cujos elementos tenham as mesmas propriedades estatísticas; a segunda deriva as propriedades da série L quando se incorpora um componente GARCH no processo da taxa de juros; e na terceira, para se comprovar a existência de heterocedasticidade cíclica na prática, estima-se a "estrutura a termo da volatilidade" da série L, ou seja, a relação entre sua variância e o prazo de maturação do contrato.

A Seção 5 conclui o trabalho mencionando como deve ser o tratamento estatístico empregado para analisar o mercado futuro de DI. Há ainda três apêndices: no primeiro, explicam-se as três formas alternativas de se organizar uma série de futuros mencionadas no texto e alocam-se os gráficos das séries em questão; no segundo, estão os cálculos intermediários de alguns dos resultados derivados no texto; e, finalmente, o terceiro constitui-se numa primeira tentativa de controlar a influência de prováveis mudanças do ambiente macroeconômico sobre a estimativa da estrutura a termo da volatilidade.

2 - O mercado futuro de DI²

O objeto de negociação do mercado é a taxa de juros efetiva dos DIs, definida pela acumulação das taxas médias diárias de DI de um dia (Cetip) entre o dia de operação (inclusive) e o último dia de negociação — o dia útil anterior à data de vencimento do contrato (também inclusive). A cotação é dada pelo *PU*, definido como Cr\$ 100 mil,³ descontado pela taxa de juros descrita acima. Os contratos futuros de DI vencem em todo primeiro dia útil do mês. O limite máximo legal para o número de contratos em aberto é de um ano (12 contratos), mas o número efetivo varia em função do nível de instabilidade da economia: sempre há ao menos dois contratos em aberto, em geral há três, poucas vezes chegando a quatro. Sendo assim, tem-se, por exemplo, que os dados referentes ao contrato de novembro de 1991 foram negociados ao longo dos meses de setembro e outubro, vencendo no primeiro dia útil de novembro, quando o *PU* é exatamente Cr\$ 100 mil.

Ignorando os ajustes diários, ou seja, supondo que o mercado fosse "a termo" ao invés de futuro,⁴ ter-se-ia que na data de vencimento do contrato o comprador de uma unidade do DI-futuro receberia Cr\$ 100 mil, pagando por isto o *PU multiplicado pela taxa acumulada do dia da negociação até o vencimento*. Ou seja, o valor final (*VF*) a ser pago vai "carregando" as taxas *diárias* que vão sendo observadas (o *VF* é *variável*) e, sendo

2 As especificações do contrato de DI e a metodologia para o cálculo da taxa Cetip (Central de Custódia e de Liquidação Financeira de Títulos) podem ser encontradas em boletins da BM&F (1991 e 1992).

3 Uma vez que trabalhamos com os dados fornecidos pela BM&F, de junho de 1991 a março de 1993, manter-se-á, portanto, como referência a unidade de conta nacional do período: o cruzeiro.

4 Embora os mercados sejam em geral futuros e não "a termo", é prática usual da literatura de finanças ignorarem-se os ajustes diários que na realidade existem. Isto porque as diferenças entre mercados futuros e a termo e principalmente suas implicações não são muitas. Para um breve resumo da literatura sobre o tema, ver Garcia (1992, Seção 2).

assim, o *PU* reflete as expectativas sobre todas e cada uma delas; enquanto que em qualquer mercado futuro padrão o valor a ser pago pelo objeto de negociação é *fixo* no momento da negociação, refletindo, portanto, apenas a expectativa sobre o preço da mercadoria na data de vencimento do contrato. O mesmo ocorre no mercado futuro de *T-bills*: na data de negociação do contrato, fixa-se o valor que será pago pelo título (uma *T-bill* de três meses) na data de vencimento do contrato.

Note-se que o *vendedor* de um contrato de DI *ganha com a subida* dos juros (pois é ele na verdade quem de fato "compra os juros", ao apostar na subida deles a partir de um nível predeterminado refletido no *PU*), enquanto o *comprador ganha com a queda*, pois irá ter que pagar um *VF* menor do que os Cr\$ 100 mil, que é a sua receita fixa. Uma forma mnemônica é que o objeto vendido e comprado no mercado futuro de DI é o *PU*, que, como se sabe, sobe quando os juros caem, e vice-versa. Logo, quem compra o *PU*, ganha com a queda dos juros e perde com a subida desses.

3 - Aparato teórico-econométrico

Os termos do contrato de DI explicados na seção anterior se resumem numa única expressão:

$$VF_t = PU_t * I_t * I_{t+1} * \dots * I_{T-1}$$

onde:

VF = valor final;⁵

t = data de negociação;

T = data de vencimento do contrato;

I_t = fator de juros, $I_t = (1 + i_t)$; e

i_t = taxa de juros.

I_t e *i_t* são as "taxas de fechamento" do dia, calculadas, portanto, só quando as negociações daquele dia terminam. Sendo assim, supõe-se que elas não pertençam ao conjunto de informações disponíveis aos agentes que negociam em *t* (denominaremos @_{*t*} - a este conjunto de informação). Para não se sobrecarregarem as notações, denotaremos $E(i_t / @_{t-})$ simplesmente $E_t(i_t)$. E, com isso, devido à especificação do contrato, tem-se aqui a situação em que $E_t(i_t)$ não é necessariamente igual a *i_t*.

⁵ Lembre-se: o *VF_t* é o valor a ser pago em *T* pelo comprador e recebido pelo vendedor do contrato que foi negociado em *t*.

O valor do PU pode ser determinado através do procedimento de "avaliação neutra ao risco" — explicado, por exemplo, em Hull (1993, p. 281) —, com o que se obtém:

$$PU_t = 100.000 * E_t^Q [1 / (I_t * I_{t+1} * \dots * I_{T-1})] \quad (1)$$

PU é nitidamente uma série de preços não-estacionária, pois o valor do PU de um contrato vai aumentando ao longo do seu prazo de maturação devido à peculiar "acumulação de juros" presente no mercado futuro de DI. Na busca por uma série estacionária, o primeiro passo é transformar o PU em VF — o débito do comprador ao final do contrato, que estará sempre em torno dos Cr\$ 100 mil:

$$VF_t = PU_t * I_t * I_{t+1} * \dots * I_{T-1}$$

Substituindo-se PU_t por (1), obtém-se a seguinte expressão:⁶

$$VF_t = 100.000 * I_t * I_{t+1} * \dots * I_{T-1} * E_t^Q [1 / (I_t * I_{t+1} * \dots * I_{T-1})]$$

O diagnóstico de Duffie (p.171) é de que as condições de mínimos quadrados ordinários são mais apropriadas para a *percentagem da taxa de crescimento dos preços* composta continuamente, ou seja, para os incrementos dos logs dos preços. Considere-se então a série L — a *diferença dos logs dos VFs*, não dos PU s — para se ter em conta a acumulação de juros. Esta série tem um significado econômico muito importante: *reflete a mudança de expectativas sobre as taxas de juros "diárias" entre a data de negociação (t) e o último dia de negociação do contrato (T-1)*.

Vejamos. Fazendo a hipótese de que $\{i_t\}$ tenha distribuição normal,⁷ e definindo:

6 Nota-se na expressão que, sob Q (a medida "martingala" equivalente) o valor esperado de VF será maior do que Cr\$ 100 mil, devido à desigualdade de Jensen aplicada à função inversa, $1/x$, que é convexa para $x > 0$. Tal como proposto por Hull (1993, p. 281), um derivativo pode sempre ser avaliado como se o mundo fosse neutro ao risco, desde que se faça o ajuste apropriado para a *taxa de crescimento esperado* (taxa de *drift*) de cada ativo subjacente. A *volatilidade das variáveis e o coeficiente de correlação entre elas não é alterado*. Sendo assim, como o nosso objetivo maior recai sobre as volatilidades, omitiremos o superescrito Q daqui por diante.

7 O modelo gaussiano de taxas de juros é extensivamente estudado na literatura, podendo mostrar que as propriedades de normalidade continuam válidas sob a medida "martingala" equivalente [ver Duffie (1992, p.140)].

$$i_{t,T-1} = \sum_{s=t}^{T-1} i_s; \mu_t = E_t(i_{t,T-1}); \sigma_t^2 = \text{Var}_t(i_{t,T-1}); I_{t,T-1} = \prod_{s=t}^{T-1} I_s \cong \exp(i_{t,T-1})$$

Tem-se que:

a) a distribuição condicionada a t de $i_{t,T-1}$ será $N_t(\mu_t, \sigma_t^2)$;

b) a distribuição condicionada a t de $(-i_{t,T-1})$ será $N_t(-\mu_t, \sigma_t^2)$;⁹ e

c) $(1/I_{t,T-1}) = 1/\exp(i_{t,T-1}) = \exp(-i_{t,T-1})$ terá distribuição lognormal.

Com isto, obtém-se:¹⁰

$$E_t(1/I_{t,T-1}) = \exp[-\mu_t + (\sigma_t^2/2)];^{11} e$$

$$E_{t-1}(1/I_{t-1,T-1}) = \exp[-\mu_{t-1} + (\sigma_{t-1}^2/2)].$$

Chegando-se, portanto, à seguinte expressão:¹²

$$\begin{aligned} L_t &= \ln(VF_t) - \ln(VF_{t-1}) = \\ &= -i_{t-1} + \ln[E_t(1/I_{t,T-1})] - \ln[E_{t-1}(1/I_{t-1,T-1})] = \\ &= -i_{t-1} + \mu_{t-1} - \mu_t + (\sigma_t^2 - \sigma_{t-1}^2)/2 = \end{aligned}$$

⁸ Esta aproximação advém de:

a) $\lim_{i \rightarrow 0} \{ [\ln(1+i)]/i \} = 1$, tendo-se, portanto, para taxas pequenas, $\ln(1+i) \cong i$ e $\exp(i) \cong (1+i) = I$; e

b) $\exp(\sum_{s=t}^{T-1} i_s) = \pi \exp(i_s)$.

De a e b, obtém-se $I_{t,T-1} \cong \exp(i_{t,T-1})$.

⁹ Ver demonstração no Apêndice 2, Parte A.

¹⁰ A partir da função geratriz de momentos obtém-se a seguinte fórmula para a esperança de uma variável (Y) de distribuição lognormal [ver, por exemplo, Ingersoll (1987, Introdução matemática)]:

$X \sim N(\mu, \sigma^2); Y = \exp(X) \rightarrow E(Y) = \exp(\mu + \sigma^2/2)$

¹¹ Usando as mesmas definições, adaptadas a $(t-1)$; μ_{t-1} , por exemplo, é igual a $E_{t-1}(i_{t-1,T-1})$.

¹² Ver nota de rodapé 8.

$$= -i_{t-1} + A + B/2, \text{ com } A = (\mu_{t-1} - \mu_t) \text{ e } B = (\sigma_t^2 - \sigma_{t-1}^2) \quad (2)$$

Para derivar as propriedades estatísticas da série L é preciso fazer uma hipótese mais específica sobre qual é o processo seguido pela taxa de juros Cetip diária $\{i\}$. Para deixar bem claro que a heterocedasticidade da série L não está associada a uma virtual heterocedasticidade da série $\{i\}$ — devido a raízes unitárias ou fatores GARCH — faremos a hipótese mais simples possível, sem perder a generalidade do processo: a de que $\{i\}$ seja um processo estacionário de segunda ordem cujas inovações sejam ruído branco.

Seja $k = T - (t - 1)$, isto é, k é o número de taxas diárias de juros que serão acumuladas sobre PU_{t-1} para determinar o VF_{t-1} . Tem-se então, de acordo com a expressão (2a) abaixo, que:¹³

$$A = \mu_{t-1} - \mu_t = -(a_1 + \dots + a_{k-1}) * e_{t-1} + E_{t-1}(i_{t-1}); \text{ e}$$

$$B = \sigma_t^2 - \sigma_{t-1}^2 = -(1 + a_1 + \dots + a_{k-1})^2 * \sigma^2.$$

E, portanto:

$$L_t = -e_{t-1} * (1 + a_1 + \dots + a_{k-1}) - (1 + a_1 + \dots + a_{k-1})^2 * \sigma^2 / 2 \quad (3)$$

Justifica-se assim o significado de L_t , como sendo, além de uma constante (B), a mudança de expectativas que se dá entre dois dias úteis quanto às taxas de juros que se observarão entre a data de negociação e o vencimento do contrato correspondente. Note que L_t é a diferença entre os logs de t e $t-1$, envolvendo, conseqüentemente, estes dois conjuntos de informação. É, portanto, e_{t-1} que, por pertencer a $@_t$ — sem pertencer a $@_{t-1}$ —, promove a revisão de expectativas, pois é a única informação relevante que se agrega ao primeiro para formar o segundo conjunto de informação. A expressão (3) deixa claro que a variável k é um *elemento crucial* na determinação das propriedades estatísticas da série L , que passará por isso a ser identificada como L_t^k . Resumindo, tem-se que L_t^k depende de três fatores:

- a) e_{t-1} , que é sempre a única inovação que interfere na mudança de expectativas, por ser justamente ela a única informação que se obtém de $t-1$ a t ;
- b) k , que é o número de coeficientes (incluindo o 1) que estão entre parênteses na expressão final; e

¹³ Os cálculos intermediários estão no Apêndice 2, Parte B.

c) do processo seguido por $\{i\}$, que é o que define o valor de cada um dos coeficientes. A variância condicionada a $t-1$ de L_t^k :

$$\text{Var}_{t-1}(L_t^k) = (1 + a_1 + \dots + a_{k-1})^2 *$$

$$* \text{Var}_{t-1}(e_{t-1}) = (1 + a_1 + \dots + a_{k-1})^2 * \sigma^2 \quad (4)$$

depende do processo seguido por i , e, pelo menos *a priori*, de k (não dependerá se, e somente se, i for um ruído branco, caso em que $a_j = 0$, para qualquer j).

A série L_t^k é, portanto, heterocedástica, mesmo quando o processo $\{i\}$ é homocedástico. E, insistimos, isto nada tem a ver com raízes unitárias,¹⁴ nem com modelos de heterocedasticidade condicional auto-regressiva e seus derivados. É uma heterocedasticidade cíclica, no sentido de que tem um padrão de comportamento bem determinado ao longo do tempo, correspondente ao prazo de maturação do contrato (dependente de k).

Esta heterocedasticidade cíclica advém da peculiar acumulação diária de juros que se dá sobre o *PU* no mercado futuro de *DI* e invalida a abordagem, muito utilizada, proposta por Duffie para se analisar o comportamento estatístico dos preços futuros. A derivação formal feita acima reforça a intuição de que a variância tende a ser maior quanto mais longe se estiver do vencimento, porque se está prevendo um número maior de taxas diárias de juros e, por isso, a chegada de novas informações promoveria a revisão de um número maior de expectativas.¹⁵

¹⁴ Quando o processo $\{i\}$ apresenta uma raiz unitária, a influência do "fator k " (número de previsões que estão sendo feitas) torna-se na verdade ainda mais significativa. No caso, por exemplo, em que $\{i\}$ é um "passeio aleatório", $i_t = i_{t-1} + e_t$, onde $e_t \sim WN(0, \sigma^2)$, tem-se que $\text{Var}_{t-1}(L_t^k) = k^2 * \sigma^2$, pois $E_i i_{t+j} = i_{t-1}$, $\forall j \geq 0$, e, portanto, $L_t^k = (i_{t-1} - i_{t-2}) + \dots + (i_{t-1} - i_{t-k}) = k * e_{t-1}$ (já que k é o número de parênteses da expressão anterior).

¹⁵ Note-se entretanto que a fórmula (4) só implica uma função monotonicamente crescente da variância em relação a k se todos os coeficientes da representação *MA* (∞) forem positivos. Isto ocorre, por exemplo, no caso bastante usado na literatura em que $\{i\}$ é auto-regressivo de primeira ordem: $i_t = p i_{t-1} + e_t$; $e_t \sim WN(0, \sigma^2) \rightarrow \text{Var}_{t-1}(L_t^k) = [(1-p^k)/(1-p)]^2 * \sigma^2$. Nota-se que $d\text{Var}(L^k)/dk = [p^k * (-\ln p)]$, que é maior do que zero para qualquer p pertencente a $(0,1)$.

4 - Abordagem empírica

4.1 - A questão da homogeneidade dos dados: como devem eles ser organizados?

As derivações teóricas feitas na seção anterior nos permitiram concluir que a abordagem *time series* "convencional" não é válida para o mercado futuro de DI. Por "abordagem convencional" entende-se a que é proposta em Duffie (Cap. 6):¹⁶ organizar uma série de preços futuros por "contratos a vencer" ao longo do tempo. Para que se obtenham séries contíguas, a cada data de vencimento de um contrato trasladam-se os contratos: o segundo contrato a vencer se transforma no primeiro a vencer, o terceiro no segundo, e assim por diante. A partir de então, para que se obtenham as "condições de mínimos quadrados ordinários" a proposta de Duffie é que se tire a diferença dos logs dos preços. Os incrementos ao longo dos "pontos de junção" não são incluídos nos cálculos estatísticos. Constroem-se, assim, as séries $L1$ (diferença dos logs dos preços do primeiro contrato a vencer), $L2$ (diferença dos logs dos preços do segundo contrato a vencer), e assim por diante. No caso do mercado futuro de DI, para incorporar a peculiar acumulação diária de juros, transformam-se os PU s em VF s, antes de se tirarem as diferenças dos logs.

Esta abordagem *time series* "convencional" não é válida porque não há entre os componentes de cada uma das séries ($L1$ e $L2$) a homogeneidade que se pressupõe existir quando se faz referência a uma "série". Na Seção 3 vimos que a variância de L_t^k depende crucialmente de k . E, ao longo do tempo, as séries $L1$ e $L2$ têm necessariamente diferentes k s (mais especificamente, no que concerne a um mesmo contrato, quando o t é adicionado de 1, o k é subtraído de 1). Uma alternativa para se controlar o "efeito prazo de maturação" (k) seria seccionar os dados da série, ou seja, agregar os elementos de igual k . Neste caso, cada contrato proveria apenas uma observação: o dado referente à negociação que se deu a k dias do vencimento (ver Apêndice 1).

4.2 - Modelos GARCH

O procedimento alternativo proposto acima seria o correto, dadas as hipóteses feitas aqui, mais especificamente as de que o processo de $\{i_t\}$ é homocedástico e estável ao longo do tempo. Entretanto, existe bastante evidência, tanto no Brasil quanto no exterior, de que o processo da taxa de juros $\{i_t\}$ não é homocedástico, contendo GARCH (Generalized

¹⁶ Para entendê-la melhor, no Apêndice 1 faz-se uma esquematização das tabelas que de fato têm que ser trabalhadas numa análise tradicional sobre o mercado de DI, onde se encontram também os gráficos das séries em questão e explicações a respeito das diferentes formas de se abordar uma série de futuros.

Autorregressive Conditional Heteroskedasticity). Neste caso, ao se seccionarem os dados das séries, perde-se informação que pode ser crucial na determinação do comportamento da volatilidade dos dados em estudo.

Vejamus então como a presença de GARCH sobre o processo de inovação de $\{i\}$ altera as derivações feitas na seção anterior. Mais especificamente, faremos a hipótese de que o processo $\{i\}$ seja estacionário de segunda ordem com inovações do tipo GARCH (1,1).¹⁷

$$\text{Var}_t(e_t) = h_t = w + \alpha e_{t-1}^2 + \beta h_{t-1}$$

Com isto, a previsão de variâncias futuras é dada por:

$$\text{Var}_t(e_{t+s}) = \sigma^2 + (\alpha + \beta)^s (h_t - \sigma^2); \quad \sigma^2 = w/(1 - \alpha - \beta)$$

o que altera não apenas a fórmula da variância condicionada de L_t^k dada pela expressão (4), mas também a expressão (3) para o valor de L_t^k . A diferença reside no valor de $B = (\sigma_t^2 - \sigma_{t-1}^2)$, que se transforma em:¹⁸

$$B = -(1 + a_1 + \dots + a_{k-1})^2 h_{t-1} + \alpha u_{t-1} X(\alpha, \beta, k)$$

com:

$$\begin{aligned} X(\alpha, \beta, k) = & [(1 + a_1 + \dots + a_{k-2})^2 + \\ & + (\alpha + \beta)(1 + a_1 + \dots + a_{k-3})^2 + \dots + \\ & + (\alpha + \beta)^{(k-3)}(1 + a_1)^2 + (\alpha + \beta)^{(k-2)}] \end{aligned} \quad (2a')$$

¹⁷ A escolha específica do GARCH (1,1) deveu-se ao fato de este ser um caso suficientemente genérico para ilustrar todo o tipo de alteração que a classe pode trazer e, ao mesmo tempo, suficientemente simples para que as alterações possam ser devidamente identificadas. Além disto, ou talvez justamente por causa disto, este é o modelo mais usado na literatura. As derivações feitas a seguir basearam-se em Hamilton (1994, Cap.21).

¹⁸ u_{t-1} é o ruído branco em que se constitui a inovação do processo ARMA seguido por e_{t-1}^2 . Sem perda de generalidade, supõe-se então que u_t tenha distribuição normal padronizada; e, portanto, que $\text{Var}_{t-1}(u_{t-1})$ seja substituída diretamente por 1 na expressão (4') a seguir.

E, portanto:

$$L_t^k = -e_{t-1} * (1 + a_1 + \dots + a_{k-1}) - (1 + a_1 + \dots + a_{k-1})^2 * h_{t-1} / 2 + \alpha u_{t-1} / 2 * X(\alpha, \beta, k) \quad (3')$$

A variância condicional de L seria então:

$$Var_{t-1}(L_t^k) = (1 + a_1 + \dots + a_{k-1})^2 h_{t-1} + \alpha^2 X^2(\alpha, \beta, k) / 4 \quad (4')$$

Em relação à expressão (4) são duas as principais modificações: a variância condicionada ao tempo passa a ser diferente da não-condicionada; e insere-se mais um elemento de interferência de k sobre a variância. Com isso, reforça-se a tese central do artigo, ou seja, k é uma variável-chave para o comportamento da série L e, portanto, a heterocedasticidade cíclica gerada por ela tem que ser explicitamente incorporada numa análise *time series* autêntica. Mas, por outro lado, a proposta de que esta análise se resumiria a agrupar os elementos de mesmo k de diferentes contratos perde força, pois a variância condicionada de L_t^k passa a depender de *ambos* os fatores: k e t .

4.3 - A estrutura a termo da volatilidade

Não deixa de ser interessante que se analise, entretanto, a "estrutura a termo da volatilidade" da série L_t^k segundo o procedimento alternativo proposto aqui, isto é, seccionar a série e agregar os termos de igual k para se constituírem nas séries cujas variâncias serão calculadas (ver Apêndice 1). Denominamos *estrutura a termo da volatilidade à relação entre a variância da diferença dos logs dos PUs e o seu prazo de maturação*; que, no caso é o número de dias existentes entre a data de negociação e o vencimento do contrato.¹⁹

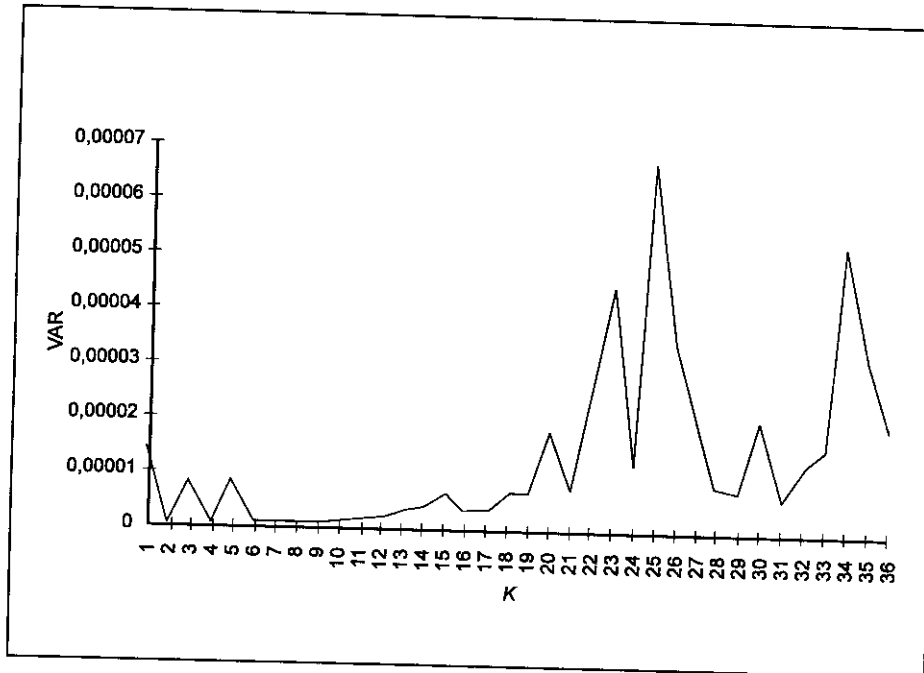
19 Note-se que utilizamos a expressão "estrutura a termo da taxa de juros" num contexto diferente daquele no qual ela surge mais frequentemente na literatura de finanças. A definição empregada aqui diz respeito à relação entre a *volatilidade instantânea* do preço do título e o seu prazo de maturação. Na literatura ela é em geral utilizada em modelos de volatilidade estocástica ou modelos GARCH e suas variantes para descrever a relação entre o *valor esperado* da volatilidade do ativo subjacente numa data futura e o intervalo de tempo entre o "presente" (instante no qual se forma a expectativa) e aquela data futura, ou seja, a relação entre $E(\partial t + T|t)$ e t [ver, por exemplo, Heynen, Kemna e Vorst (1994)].

No caso em que $\{i\}$ apresenta GARCH, a "estrutura a termo da volatilidade" analisada aqui pode ser vista como a "estrutura a termo da variância não-condicionada", que é dada pela relação entre Var e k embutida na seguinte expressão:

$$\text{Var}(L_t^k) = (1 + a_1 + \dots + a_{k-1})^2 \sigma^2 + \alpha^2 X^2(\alpha, \beta, k)/4$$

O comportamento da variância da série L ao longo de k é vista no gráfico a seguir: *não* existe uma tendência bem clara, monotônica, de a variância aumentar em função de k . Mas existe sim uma tendência de crescimento: a estatística t do coeficiente da regressão da variância da série L em k é de 3,39, estatisticamente diferente de zero (apresentando um valor p de 0,175%).

Dois fatos perceptíveis no gráfico despertam especial interesse: a variância relativamente grande de L_t^1 (a maior até $k = 19$), e a "concentração" de volatilidade entre $k = 22$ e $k = 27$. Para explicar o primeiro fato oferecemos duas conjecturas: a falta de liquidez destes contratos às vésperas de seu vencimento²⁰ ou a maior volatilidade da própria taxa



²⁰ Menor liquidez em geral implica *menor* volatilidade, mas, no caso do DI futuro, o que ocorre é que o PU não é ajustado para seu "valor de equilíbrio" nos últimos dias (pois passa a não haver negócios quando se chega a uma situação de hegemonia quanto às expectativas) e, sendo assim, o reajuste se concentra no último dia de negociação.

de juros Cetip que tende a variar muito no último dia útil do mês, já que, por ser (usando o jargão do mercado) $D + 1$, refletirá as expectativas do mercado com relação à taxa de juros do mês seguinte. Esta, por sua vez, tende a variar por pelo menos dois motivos: o primeiro é que o Banco Central sinaliza nos últimos dias de cada mês a taxa de juros do mês porvindo; e o segundo é que, mesmo que a taxa mensal não se altere, a taxa diária se alterará em função do maior ou menor número de dias úteis de cada mês. Esta última conjectura serve para explicar também o segundo fato mencionado (a “concentração” de volatilidade entre $k = 22$ e $k = 27$), pois este período corresponde à virada do mês, quando o Banco Central estará sinalizando as taxas para o próximo mês.

Pelo comportamento não-monotônico da variância da série L , parece ser difícil encontrar um único processo para i_t estável para todo o período que seja adequado aos dados, mesmo que ele contenha GARCH. Há duas possibilidades para esta suposta falta de “estabilidade” do processo do ativo subjacente $\{i\}$: a primeira é, tal como aventado acima, que a variância de i varie ao longo de k para um mesmo contrato (ou seja, que ela não seja constante ao longo do mês); e a segunda é que o processo de i_t não seja estável ao longo do tempo, isto é, ao longo dos meses da amostra, aos quais corresponderiam diferentes ambientes macroeconômicos, originando diferentes variâncias para $\{i\}$ (neste caso, para todos os k de um mesmo contrato a variância de i seria a mesma, mas variaria de contrato para contrato).

Assim, em termos da modelagem da Seção 3, é possível enumerar os problemas que suspeitamos existir quanto à heterogeneidade da série L :

1) quanto à L , dado $\{i\}$ (supondo que este seja um processo estacionário estável, diferente de ruído branco, mas cuja inovação seja ruído branco): a única variável geradora de heterogeneidade é de fato k ; e

2) quanto ao processo de i_t :

a) a inovação pode conter GARCH, como foi o caso contemplado anteriormente e que faria com que o procedimento de seccionar a série não fosse o mais adequado, pois o condicionamento a t torna-se fundamental; dois outros problemas não contemplados podem ainda surgir no que diz respeito a $\{i\}$;

b) este pode mudar ao longo do tempo em função de transformações no ambiente macroeconômico, o que diz respeito à “crítica de Lucas” e que pode invalidar a derivação da variância de L_t^k de pelo menos duas formas: b1) os coeficientes da representação $MA(\infty)$ de i se alteram; e b2) a variância (σ^2) do distúrbio se altera de forma não-previsível, em função dos diferentes regimes econômicos ocorridos no período (note-se que nos modelos GARCH a variância se altera de forma previsível); e

c) este pode ter um comportamento “sazonal” que implique uma relação entre k e o processo de i (o efeito “sinalização da virada do mês” já mencionado).

Acreditamos ser o problema 2 (mais especificamente o 2b) muito relevante na prática, fazendo com que o grau de confiabilidade das estimativas desta seção não seja muito elevado. Os fatores isolados de instabilidade existentes na economia brasileira acabam por tornar pouco perceptíveis empiricamente um fator que do ponto de vista teórico tenha grande importância. Este é o motivo pelo qual se costuma no Brasil analisar separada-

mente os contratos.²¹ E por causa dele é que tentamos, no Apêndice 3, eliminar a influência de t sobre a variância de L_t^k , para ver se assim obter-se-ia uma tendência mais clara da variância da série L em relação a k . A estrutura a termo da volatilidade não foi, porém, significativamente alterada.

5 - Conclusão

O mercado futuro de juros do Brasil tem uma peculiaridade: a acumulação diária de juros que se dá sobre o PU . Mostramos teoricamente que por causa dela surge uma heterocedasticidade inerente à série de preços futuros que persiste quando se tira a diferença dos logs dos preços — transformação mais freqüentemente usada em busca de estacionariedade e que é proposta por Duffie para abordar séries de futuros. Tal heterocedasticidade é essencialmente *cíclica* — está relacionada ao *prazo de maturação* do contrato — e, por isso: *a)* irá persistir a qualquer transformação estabilizadora de variância "tipo Box - Cox" e a diferenciações de qualquer ordem; e *b)* nada tem a ver com o modelo GARCH e, sendo assim, nem mesmo a mais sofisticada das variantes deste modelo é capaz de controlá-la na série de preços futuros.

Propusemos uma forma de se estimar a heterocedasticidade cíclica inerente à série L — diferença dos logs dos preços — através do conceito de "estrutura a termo da volatilidade", e os dados confirmaram, então, sua existência prática. Sendo assim, o *approach* proposto por Duffie para abordar o comportamento estatístico das séries de preços futuros *não* é válido para o mercado futuro de DI. Resta, portanto, a questão de como este mercado deve ser analisado. A chave está em mudar o foco da análise, passando da série de preços futuros para o processo $\{i\}$ — taxas de juros Cetip diárias. O primeiro passo deve ser estimar $\{i\}$, e aí sim os modelos GARCH tornam-se relevantes. O processo de estimação deve incorporar não apenas a metodologia GARCH, mas também outras técnicas econométricas apropriadas para corrigir os demais problemas levantados como provavelmente presentes no processo $\{i\}$ (ver item 2 da enumeração realizada na Subseção 4.3): mudanças de regimes e efeitos cíclicos/sazonais. Deve-se manter atento para todas as peculiaridades do mercado brasileiro, em particular para o fato de o Banco Central atuar ativamente num mercado de juros extremamente afetado pela instabilidade macroeconômica. Depois de estimado o processo de i_t , deve-se *derivar* a fórmula específica da heterocedasticidade do PU associada ao processo $\{i\}$. Tal fórmula tem então que ser explicitamente incorporada em qualquer análise estatística com a série de PU .

21 Garcia (1992), por exemplo, separa os contratos futuros de índice de preço do Brasil (BTN/OTN) por data de vencimento, analisando um contrato (por exemplo, o de *janeiro de 1989*) ao longo de *sua* existência (de seu prazo de maturação).

Apêndice 1

Para fazer uma análise estatística de um mercado futuro, deve-se em primeiro lugar decidir como organizar as séries, já que há vários contratos (com diferentes datas de vencimento) sendo negociados numa mesma data. Neste apêndice explicam-se as três formas alternativas de se organizar uma série de futuros: *a)* proposta por Duffie; *b)* adotada por Garcia (1992); e *c)* proposta neste trabalho para estimar a estrutura da volatilidade.

a) Duffie

Para entender a proposta de Duffie, faz-se a seguir uma esquematização das tabelas que têm que ser trabalhadas numa "análise *time series* convencional" sobre o mercado de DI (supondo que só existem três dias úteis nos meses de setembro e outubro). Os dados referentes ao contrato de novembro encontram-se como primeiro contrato (*PU1*) ao longo de outubro, vencendo no primeiro dia útil de novembro, quando o *PU* é exatamente Cr\$ 100 mil, e como segundo contrato (*PU2*) ao longo de setembro. A partir de então, para dar conta da peculiaridade (acumulação dos juros) do mercado de DI e tornar os dados mais homogêneos, tem-se que transformar os *PU*s em *VF*s. A última tabela constitui-se na diferença dos logs dos *VF*s, que é para Duffie a série "relevante" para a análise — a que atenderia às condições de mínimos quadrados ordinários. A seguir apresentam-se observações sobre a esquematização das tabelas:

- Cr\$ 100 mil é substituído por 100 e os subscritos por vírgulas (por exemplo, *PU1,t* é o *PU* do primeiro contrato a vencer, negociado na data *t*);
- o reposicionamento dos contratos é feito através da repetição do primeiro dia útil do mês, e com isto o segundo contrato a vencer, por exemplo, transforma-se no primeiro — $PU2,4(a) = PU1,4$ — e é diferente de $PU2,4(b)$; na passagem da Tabela *VF* para a Tabela *L*, elimina-se o "segundo primeiro dia útil do mês" para que assim se consiga uma série "homogênea" de "mudanças de expectativas"; e
- apenas para ilustrar o processo, omite-se o elemento $(\sigma_t^2 - \sigma_{t-1}^2) / 2$ da expressão (2) na determinação dos *L*s (é como se ignorássemos a desigualdade de Jensen, com o que o sentido de *L* fica resumido à "mudança de expectativas sobre as taxas de juros diárias entre *t* e *T-1*").

Adiante encontram-se os gráficos das séries relevantes ao longo do período estudado: *VF* do primeiro contrato a vencer (*VF1*), sua diferença de logs (*L1*) e taxa Cetip diária. Neste último, os dois picos observados em 22 e 30 de dezembro de 1992 se deram meramente em função de incorporarem dois dias úteis; normalizando-os, obtêm-se taxas semelhantes às que vinham vigorando ao longo do mês, gerando o Gráfico A.4.

b) Garcia (1992)

Seriam analisados, por exemplo, os dados referentes ao contrato de novembro na esquematização acima: *PU2,1; PU2,2; PU2,3; PU1,4; PU1,5; PU1,6; PU1,7 = 100*.

TABELA 1

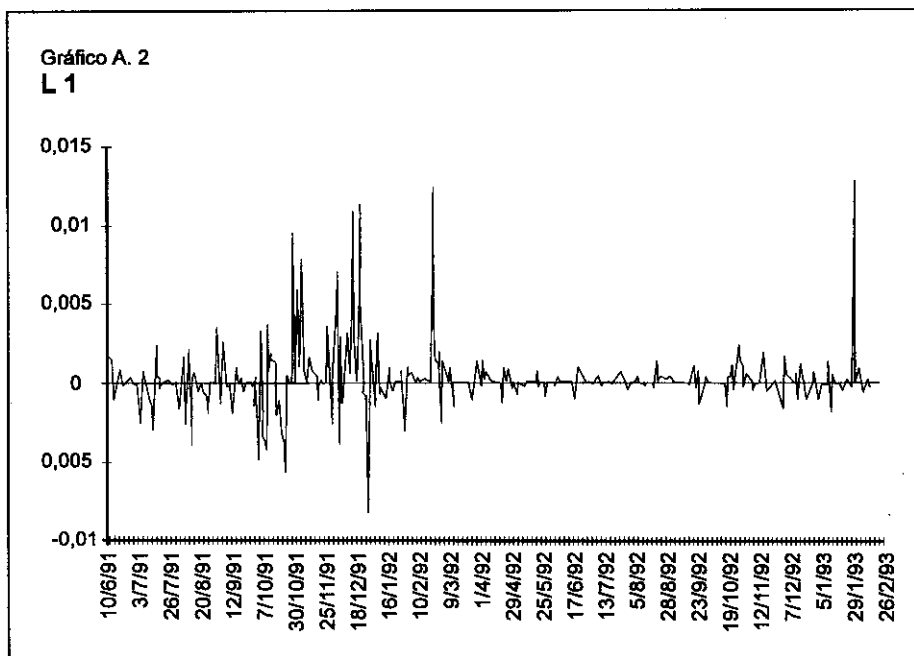
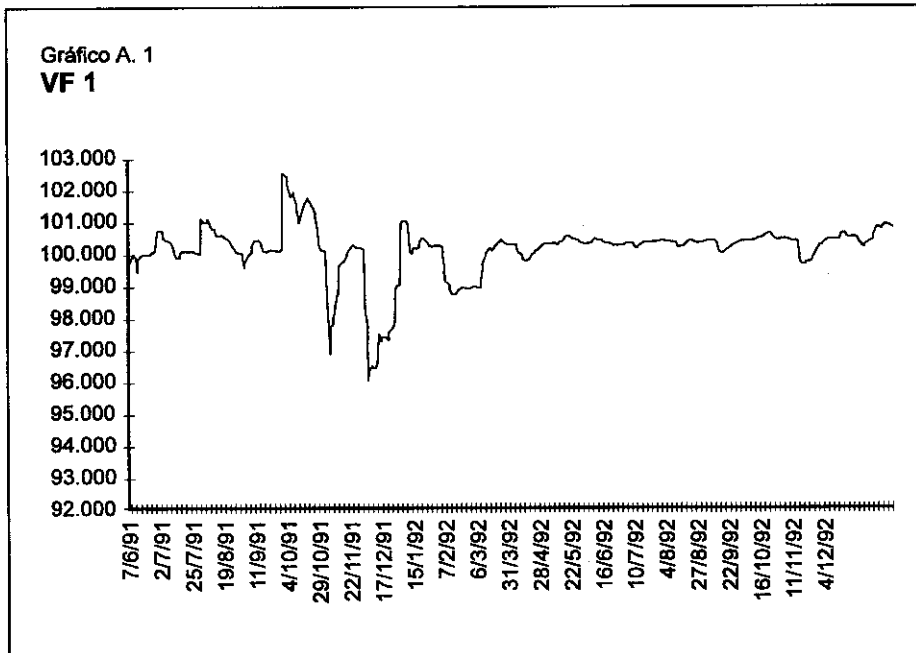
Dias úteis	Datas	Taxas Cetip	Taxa acumulada	PU1	PU2	VP1	VP2	VF1	VF2
1	1 Setembro	I1	I1	PU1,1	PU2,1	PU1,1	PU2,1	PU1,1*(I1I2I3)	PU2,1*(I1...I6)
2	2 Setembro	I2	I1I2	PU1,2	PU2,2	PU1,2/I1	PU2,2/I1	PU1,2*(I2I3)	PU2,2*(I2...I6)
3	3 Setembro	I3	I1I2I3	PU1,3	PU2,3	PU1,3/I1I2	PU2,3/I1I2	PU1,3*(I3)	PU2,3*(I3...I6)
4	1 Outubro	-	1	100	PU2,4 (a)	100/I1I2I3	PU2,4 (a)/I1I2I3	100	PU2,4(a)*(I4I5I6)
4	1 Outubro	I4	I4	PU1,4	PU2,4 (b)	PU1,4	PU2,4 (b)	-	PU2,4(b)*(I4...I9)
5	2 Outubro	I5	I4I5	PU1,5	PU2,5	-	-	-	-
6	3 Outubro	I6	I4I5I6	PU1,6	PU2,6	-	-	-	-
7	1 Novembro	-	1	100	PU2,7 (a)	-	-	-	-

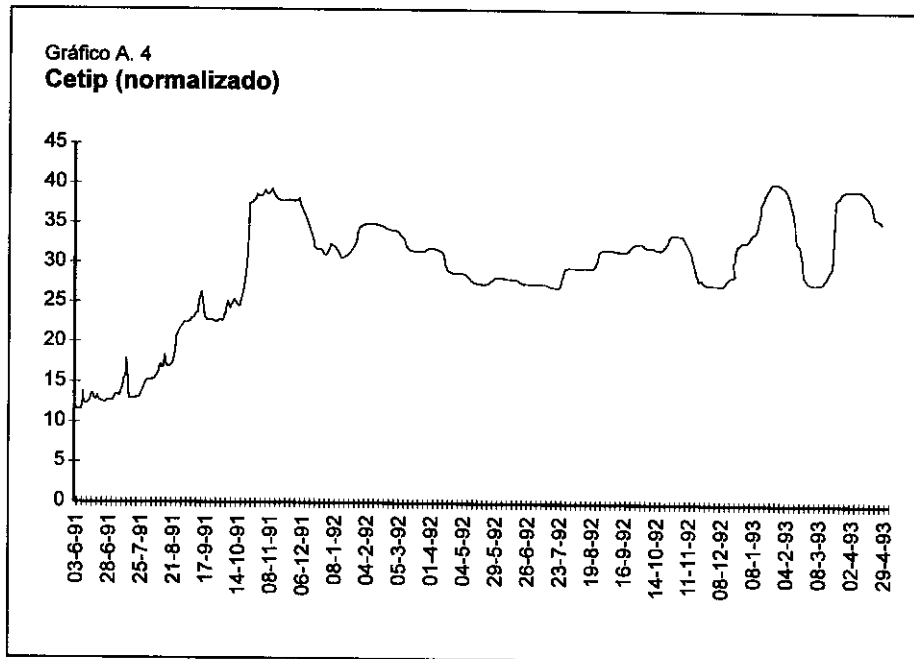
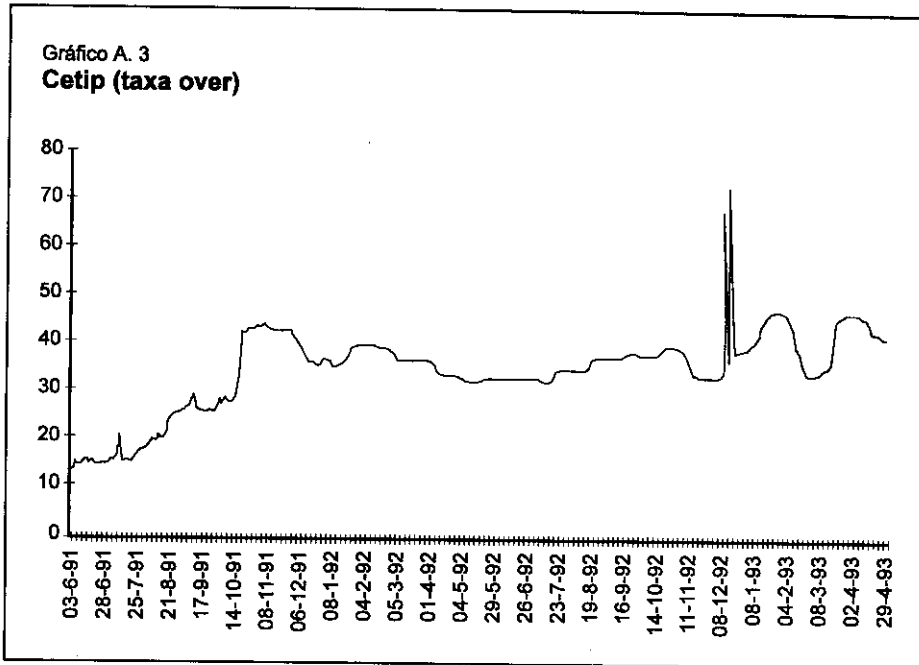
TABELA VF

Dias úteis	VF1	VF2
1	$100*(I1I2I3)/E1$ (I1I2I3)	$100*(I1I2I3I4I5I6)/E1$ (I1...I6)
2	$100*(I2I3)/E2$ (I2I3)	$100*(I2I3I4I5I6)/E2$ (I2...I6)
3	$100*I3/E3I3$	$100*(I3I4I5I6)/E3$ (I3...I6)
4	100	$100*(I4I5I6)/E4$ (I4...I6)
4	$100*(I4I5I6)/E4$ (I4I5I6)	$100*(I4I5I6I7I8I9)/E4$ (I4...I9)
5	-	-
6	-	-
7	-	-

TABELA L

Dias úteis	L1	L2
1	-	-
2	$(E1I1-I1)+(E1I2-E2I2)+(E1I3-E2I3)$	$(E1I1-I1)+...+(E1I4-E2I4)+...+(E1I6-E2I6)$
3	$(E2I2-I2)+(E2I3-E3I3)$	-
4	$(E3I3-I3)$	$(E3I3-I3)+(E3I4-E4I4)+...+(E3I6-E4I6)$
5	$(E4I4-I4)+(E4I5-E5I5)+(E4I6-E5I6)$	$(E4I4-I4)+...+(E4I9-E5I9)$
6	-	-
7	-	-





c) Estrutura a termo da volatilidade

O que está-se propondo no texto é que se seccionem os dados. Sendo s_1 o número de dias úteis do mês seguinte ao da data t e s_2 o equivalente para o "segundo mês seguinte", ter-se-ia que, ao invés de se estimar, por exemplo, a variância das séries

$$L1_t^k, L1_{t+1}^{k-1}, L1_{t+2}^{k-2} \dots \text{ e } L2_t^{k+s_1}, L2_{t+1}^{k-1+s_1}, L2_{t+2}^{k-2+s_1} \dots,$$

estimar-se-ia a variância das séries que tenham um k comum: $L_t^k, L_{t+s_1}^k, L_{t+s_1+s_2}^k \dots$

Por exemplo, em termos da Tabela L , ao invés de se estimar a variância das séries $L1$ e $L2$, que é a proposta de Duffie ($L2,1, L3,1, L4,1, L5,1, L6,1, L7,1$ e $L2,2, L3,2, L4,2, L5,2, L6,2, L7,2$), estimar-se-ia a variância de seis séries (respectivamente, $k = 1, 2, \dots, 6$), no caso de dois elementos cada: $L4,1$ e $L7,1; L3,1$ e $L6,1; L2,1$ e $L5,1; L4,2$ e $L7,2; L3,2$ e $L6,2; e L2,2$ e $L5,2$.

Do ponto de vista prático, para se obter, a partir da Tabela L , uma outra em que as colunas indicam o k , o que se faz é uma "transposição" de vetores, ou seja:

	L1	L2		k =:	6	5	4	3	2	1
2									--a--	
3	a	c								
4							--c--	--b--		
5										
6	b	d	para						--d--	
7										

Apêndice 2

Parte A: Demonstração de que, se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, então $Y = (-X) \sim N(-\mu, \sigma^2)$:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P((-X) \leq y) = P(X \geq (-y))$$

Faça-se $x = -y - \mu \rightarrow -y = \mu + x$. Sabe-se que a distribuição normal é simétrica, ou seja:

$$P(X \geq \mu + x) = P(X \leq \mu - x), \text{ mas } -y = \mu + x \rightarrow \mu - x = y + 2\mu$$

Logo:

$$F_Y(y) = P(X \leq (y + 2\mu)) = \int_{-\infty}^{y+2\mu} f_X(x) dx$$

Fazendo $t = x - 2\mu$, obtém-se:

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^y f_x(t + 2\mu) dt \rightarrow^{22} g(y) = f_x(y + 2\mu)$$

que é a densidade de $Y \rightarrow Y \sim N(-\mu, \sigma^2)$.

cqd

Parte B: Nesta parte indica-se como calcular os valores de A e B , definidos na expressão (2) e que se fazem explícitos nas expressões (2a) e (2a') do texto. Os cálculos baseiam-se na representação $MA(\infty)$ para i_t (pelo teorema de Wold [ver, por exemplo, Priestley (1981)] qualquer processo estacionário de segunda ordem admite uma representação $MA(\infty)$):

$$i_t = e_t + a_1 e_{t-1} + a_2 e_{t-2} + \dots$$

$$A = \mu_{t-1} - \mu_t = E_{t-1}(i_{t-1}) - \{[E_t - E_{t-1}](i_{t,T-1})\}$$

$$[E_t - E_{t-1}](i_{t,T-1}) = (a_1 + \dots + a_{k-1}) e_{t-1}$$

pois:

$$[E_t - E_{t-1}] i_t = [E_t - E_{t-1}](e_t + a_1 e_{t-1} + a_2 e_{t-2} + \dots) = a_1 e_{t-1}$$

$$[E_t - E_{t-1}](e_{t+1} + a_1 e_t + a_2 e_{t-1} + \dots) = a_2 e_{t-1}$$

...

$$[E_t - E_{t-1}](e_{T-1} + a_1 e_{T-2} + \dots + a_{k-2} e_t + a_{k-1} e_{t-1} + \dots) = a_{k-1} e_{t-1}$$

22 Pela definição de variável aleatória absolutamente contínua e de função densidade [ver James (1981)].

Logo:

$$A = E_{t-1}(i_{t-1}) - (a_1 + \dots + a_{k-1})e_{t-1}$$

*

$$B = (\sigma_t^2 - \sigma_{t-1}^2)$$

$$i_{t,T-1} = e_t + a_1 e_{t-1} + a_2 e_{t-2} + \dots + e_{t+1} + a_1 e_t + a_2 e_{t-1} + \dots + (\dots) \\ + e_{T-1} + a_1 e_{T-2} + \dots + a_{k-2} e_t + a_{k-1} e_{t-1} + \dots$$

Agrupando os elementos do mesmo instante e considerando que $\text{Var}_t e_{t-x} = 0$ para qualquer $x > 0$, e que $\text{Cov}(e_t, e_s) = 0$ (no caso de GARCH [ver Bollerslev (1986)]), tem-se que:

$$\sigma_t^2 = \{ [(1 + a_1 + \dots + a_{k-2})^2 \text{Var}_t(e_t)] + \\ + [(1 + a_1 + \dots + a_{k-3})^2 \text{Var}_t(e_{t+1})] + \dots + \\ + [(1 + a_1)^2 \text{Var}_t(e_{T-2})] + [\text{Var}_t(e_{T-2})] \} \\ \sigma_{t-1}^2 = [(1 + a_1 + \dots + a_{k-1})^2 \text{Var}_{t-1}(e_{t-1})] + \\ + [(1 + a_1 + \dots + a_{k-2})^2 \text{Var}_{t-1}(e_t)] + \dots + \\ + [(1 + a_1)^2 \text{Var}_{t-1}(e_{T-2})] + [\text{Var}_{t-1}(e_{T-1})]$$

O valor de B depende da hipótese que se faz sobre a variância condicionada das inovações; no caso em que elas são independentes e identicamente distribuídas com variância σ^2 , obtém-se trivialmente o B da expressão (2a), já que, se ao fazer $\sigma_t^2 - \sigma_{t-1}^2$, todos os termos de σ_{t-1}^2 , exceto o primeiro, se anulam:

$$B = -(1 + a_1 + \dots + a_{k-1})^2 * \sigma^2$$

No caso do modelo GARCH (1,1), tem-se que:²³

$$\text{Var}_t(e_{t+s}) - \text{Var}_{t-1}(e_{t+s}) = (\alpha + \beta)^s \alpha u_{t-1}$$

E, portanto, obtém-se (2a'):

$$B = -(1 + a_1 + \dots + a_{k-1})^2 h_{t-1} + \alpha u_{t-1} [(1 + a_1 + \dots + a_{k-2})^2 + (\alpha + \beta)(1 + a_1 + \dots + a_{k-3})^2 + \dots + (\alpha + \beta)^{(k-3)}(1 + a_1)^2 + (\alpha + \beta)^{(k-2)}]$$

Apêndice 3

Vimos que a variância da série L_t^k depende de t e de k ; ao longo da nossa análise realçamos a importância do fator k , sem considerar a importância de t . Este apêndice constitui-se numa primeira tentativa de controlar a influência do fator t — "mudança do ambiente macroeconômico" — sobre a estrutura a termo da volatilidade. Mais especificamente, objetiva-se eliminar a influência de t sobre a variância de L_t^k para tentar assim obter uma tendência mais clara da variância da série L em relação a k .

A forma mais imediatista de fazê-lo é estimar a variância de L_t^k x k depois de se ponderar a série L pelo desvio padrão do respectivo contrato, que serviria como *proxy* para identificar um "ambiente macro" de maior *versus* menor instabilidade. Este procedimento é intuitivo, mas vai contra tudo o que se propõe neste trabalho, ou seja, que não se deve fazer uma análise estatística tradicional (*time series*) ao longo de um contrato.

Uma forma alternativa, mais justificável do ponto de vista teórico, seria concentrar-se no problema 2b2 da enumeração proposta na Subseção 4.3, ou seja, supor que o processo seguido por i_t é fixo ao longo do tempo, exceto pela variância do distúrbio. Com isto, ele poderia ser representado por:

²³ $\text{Var}_t(e_{t+s}) = \sigma^2 + (\alpha + \beta)^s (h_t - \sigma^2)$ e $\text{Var}_{t-1}(e_{t+s}) = \sigma^2 + (\alpha + \beta)^{s+1} (h_{t-1} - \sigma^2)$. Logo:
 $\text{Var}_t(e_{t+s}) - \text{Var}_{t-1}(e_{t+s}) = (\alpha + \beta)^s \{ h_t - [\sigma^2 + (\alpha + \beta)(h_{t-1} - \sigma^2)] \}$
 Porém, $\sigma^2 = w/(1 - \alpha - \beta)$. Então:
 $\sigma^2 + (\alpha + \beta)(h_{t-1} - \sigma^2) = w + (\alpha + \beta) h_{t-1}$
 Porém, $h_t = w + \alpha e_{t-1} + \beta h_{t-1}$. Logo:
 $\{ h_t - [\sigma^2 + (\alpha + \beta)(h_{t-1} - \sigma^2)] \} = \alpha(e_{t-1}^2 - h_{t-1}) = \alpha u_{t-1}$

$$i_t = e_t + a_1 e_{t-1} + a_2 e_{t-2} + \dots$$

onde $e_t \sim WN(0, \sigma_t^2)$. Sendo assim, a variância da série L seria dada por:

$$\text{Var}_{t-1}(L_t^k) = (1 + a_1 + \dots + a_{k-1})^2 * \text{Var}_{t-1}(e_{t-1})$$

Ter-se-ia, então, que estimar $\text{Var}_{t-1}(e_{t-1})$ para isolar seu efeito sobre $\text{Var}_{t-1}(L_t^k)$ e, assim, identificar a influência de k sobre a variância da série L_t^k . Como fazê-lo? O procedimento correto seria estimar o processo seguido por i ao longo do período de análise (julho de 1991 a março de 1993) e, com ele, estimar também a variância do distúrbio (permitindo que esta se modifique ao longo do tempo). Mas isto constituir-se-ia em tema para um artigo em si. O que alternativamente vale fazer é usar a estimativa da variância ao longo do mês do próprio i_t (DI — taxa CDI de juros) como *proxy* (exceto por uma constante irrelevante) para a variância do distúrbio naquele mês (implicitamente, está-se supondo que a variância do distúrbio é constante ao longo de um mês, podendo variar entre os diferentes meses).

O passo seguinte seria dividir L_t^k pelo desvio padrão do DI ($dp(DI)$) do mês correspondente, construindo-se a série $L_t^k / dp(DI)$. Na verdade, deve-se dividir a série $L1$ (primeiro contrato a vencer) pelo $dp(DI)$ do mês ao longo do qual foi negociado (por exemplo, dividir as diferenças dos logs dos $VF1$ s do contrato de abril de 1992 pelo desvio padrão do DI ao longo de março de 1992). Já a série $L2$ deveria ser dividida por uma *ponderação* dos desvios padrão dos meses ao longo dos quais foi negociada. Entretanto, como acreditamos que tal ponderação não alteraria muito os resultados, o que fizemos foi simplesmente dividir todos os L s referentes, por exemplo, ao contrato de maio pelo desvio padrão do DI em abril, e assim por diante.

Em função do que foi dito nos parágrafos anteriores, temos então três formas distintas para abordar a heterocedasticidade da série L_t^k através do cálculo da sua variância em função de k : a primeira é $\text{Var}[L_t^k] \times k$, que foi feito na Seção 4 (ver Gráfico A.5); e duas formas alternativas de se controlar o fator t , desenvolvidas neste apêndice, gerando as outras possibilidades de abordagem: $\text{Var}[L_t^k / dp(\text{contrato})] \times k$ (Gráfico A.6) e $\text{Var}[L_t^k / dp(DI)] \times k$ (Gráfico A.7). Neste último percebe-se algo que já se havia identificado na Seção 4: a variância de L_t^1 é excessivamente alta (relativamente aos outros dias no último mês de negociação), mostrando que o último dia de negociação tem peculiaridades que devem ser estudadas. Para perceber melhor a tendência ao longo do último mês de negociação, fez-se o Gráfico A.8, ainda referente a $\text{Var}[L_t^k / dp(DI)]$, mas que inclui apenas os k s de 2 a 20.

Gráfico A.5
 $\text{Var}[L_t^k] \times \kappa$

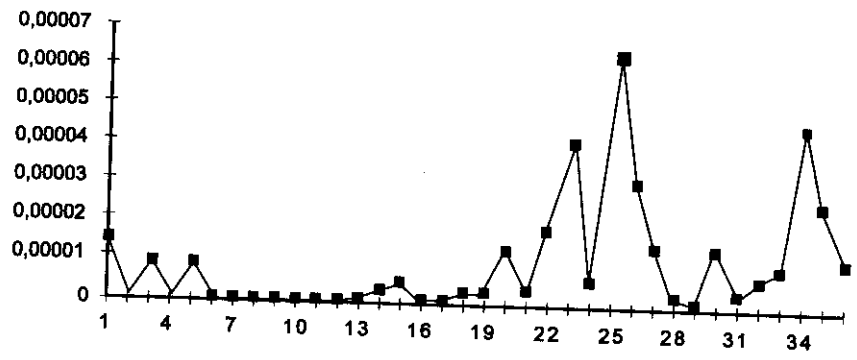


Gráfico A.6
 $\text{Var}[L_t^k / dp(\text{contrato})] \times \kappa$

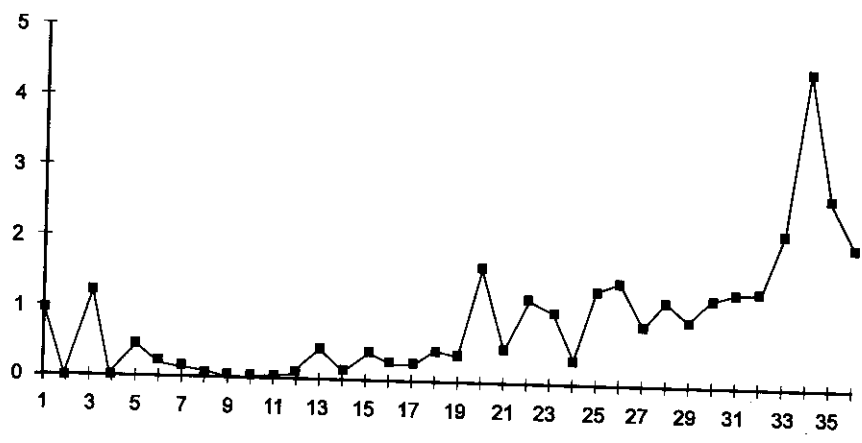


Gráfico A.7
 $\text{Var}[L^{\zeta}/dp(DI)] \times \kappa$

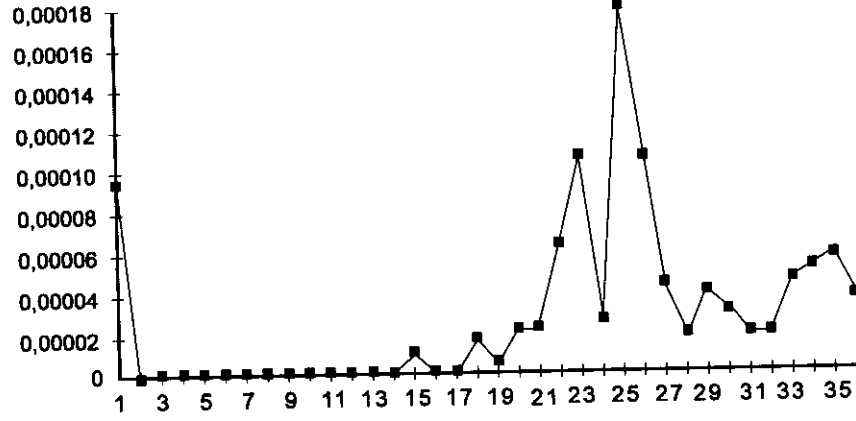
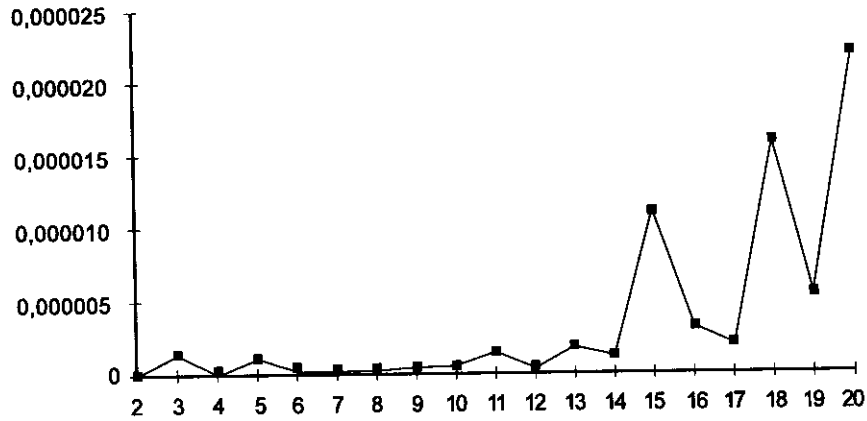


Gráfico A.8
 $\text{Var}[L^{\zeta}/dp(DI)] \times \kappa$



Além da análise gráfica, fizemos regressões das respectivas variâncias em função de k (incluímos também um intercepto). Os resultados estão resumidos na tabela abaixo, onde se nota que em todas elas k é estatisticamente significativo:

Coefficiente de regressão	Estatística t	Valor de p (%)	R^2
$Var[L_t^k] \times k$	3,39	1,75	0,23
$Var[L_t^k / dp(\text{contrato})] \times k$	6,66	1,1e-7	0,55
$Var[L_t^k / dp(DP)] \times k$	2,52	1,67	0,13
0) Excluindo $k = 1$	3,59	1,04	0,26
2) Excluindo $k = 1$	3,49	1,37	0,25

Tal como mencionado anteriormente, este apêndice foi apenas uma *primeira* tentativa de incorporar o fator t — "mudança do ambiente macroeconômico" — à forma sugerida no trabalho para se estimar a estrutura a termo da volatilidade. Os procedimentos adotados, embora lógicos, ainda estão longe de ser corretos do ponto de vista estatístico. Entretanto, servem como reforço à indicação de que o problema de heterocedasticidade cíclica é de fato relevante para as séries de DI, persistindo mesmo quando se tira a diferença dos logs destas séries.

Abstract

The interest rate futures market (DI contract) became the most important futures market in Brazil, with an open interest of more than US\$ 40 billion. Therefore, data from this market are bound to become one of the most used dates in empirical finance applied to Brazilian financial markets. However, the DI futures market is quite different from usual interest rate futures market, for which most econometric methodologies have been developed. We demonstrate that, given the daily interest compounding on the PU (unitary price), the DI futures price series shows a "cyclical heteroskedasticity" that is immune to variance stabilising transformations (logarithmic or any other of Box-Cox type) and to differentiation of any order. We present different ways to organise the dataset, discussing the pros and cons of each one. Since the literature has not yet approach this very important Brazilian futures market, this paper brings an important methodological contribution to empirical finance in Brazil.

Bibliografia

- BM&F. Taxa média ajustada CDI/Cetip: metodologia de cálculo. *Revista Resenha*, n. 70, 1991.
- . Especificação do contrato futuro de taxa média de depósito interfinanceiro de um dia. 1992 (Ofício Circular 019-A/92-SG).
- BOLLERSLEV, T. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, v. 31, p. 307-327, 1986.
- DUFFIE, D. D. *Future markets*. Prentice Hall, Inc., 1989.
- . *Dynamic asset pricing theory*. Princeton University Press, 1992.
- FULLER, W. A. *Introduction to statistical time series*. John Wiley & Sons, Inc., 1976.
- GARCIA, M. P. Política monetária e formação das expectativas de inflação: quem acertou mais, o governo ou o mercado futuro? *Pesquisa e Planejamento Econômico*, Rio de Janeiro, v. 22, n. 3, p. 475-500, dez. 1992.
- . The formation of inflation expectations in Brazil: a study of the futures markets for the price level. *Revista Brasileira de Economia*, jan.-mar. 1994.
- HAMILTON, J. *Time series analysis*, Princeton University Press, 1994.
- HEYDEN, R., KEMNA, A., VORST, T. Analysis of the term structure of implied volatilities. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, v. 29, n. 1, p. 31-56, 1994.
- HULL, J. *Options, futures and other derivative securities*. 2ª ed., Prentice Hall, 1993.
- INGERSOLL, J. *Theory of financial decision making*. Rowman & Littlefield, 1987.
- JAMES, B. R. *Probabilidade: um curso em nível intermediário*. Impa, 1981.
- PRIESTLEY, M. B. *Spectral analysis and time series*. Academic Press, 1981.

(Originais recebidos em agosto de 1995. Revistos em junho de 1996.)