

A demanda por moeda em processos de inflação elevada*

OCTÁVIO A. F. TOURINHO**

Este artigo propõe e testa uma equação para a demanda por saldos reais de moeda em processos de inflação elevada que estende e generaliza o celebrado modelo de Cagan para as hiperinflações. Ela é derivada a partir de um modelo teórico de programação dinâmica estocástica para a escolha de portfólio dos agentes e a sua solução sugere a adoção de uma relação inversa entre os saldos monetários e a inflação esperada. Ele também mostra a necessidade de introdução da variância da taxa de inflação como uma das variáveis explicativas, além da taxa de juros real, de uma variável para captar os efeitos do progresso técnico e de um fator sazonal. Para completar a especificação, adota-se um mecanismo adaptativo de formação de expectativas para a taxa de inflação, a sua variância, e para a renda. O modelo foi testado aplicando-o aos dados da hiperinflação alemã e à análise da experiência inflacionária do Brasil nas duas últimas décadas, fazendo uso da forma funcional flexível de Box-Cox. Conclui-se em geral pela sua validade e determina-se que, para a demanda por saldos reais de moeda no Brasil no período 1974/92, a forma funcional semilogarítmica de Cagan não é apropriada. Mostra-se também que tanto o nível como a variância esperados da inflação são variáveis explicativas significativas, não se podendo rejeitar a hipótese de que seus coeficientes são iguais em valor absoluto, como previsto pela teoria.

1 - Introdução

O comportamento das variáveis monetárias em situações de inflação extrema ainda é tópico de interesse e pesquisa intensa em economia. Exemplos recentes disto são as análises de episódios de alta inflação em vários países, encontradas em Dornbusch e Fischer (1986), Bruno e outros (1988) e Dornbusch, Sturzenegger e Wolf (1990), além do interesse de vários outros analistas pelo estudo das hiperinflações. A principal razão deste interesse é, acredito, a mesma apontada por Cagan (1956) no seu seminal, e agora

* Esta é uma versão revisada do artigo "The demand for money in high inflation processes", de setembro de 1994, distribuído como Texto para Discussão nº 349 do Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada (IPEA), que recebeu o prêmio Haralambos Simeonidis de 1994, categoria artigos, conferido pela Associação Nacional dos Centros de Pós-Graduação em Economia (Anpec). Gostaria de agradecer os comentários dos participantes de seminários na Pontifícia Universidade Católica e na Fundação Getúlio Vargas, no Rio de Janeiro, de José W. Rossi e de outros colegas do IPEA. Como de praxe, o autor é o único responsável pelas eventuais deficiências deste trabalho.

** Do Banco Nacional do Desenvolvimento Econômico e Social (BNDES) e da Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ). Este artigo foi escrito quando o autor estava cedido à Diretoria de Pesquisa do Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada (IPEA), no âmbito de convênio celebrado com o BNDES, para estudos e pesquisas.

clássico, estudo sobre hiperinflações: estes processos oferecem uma oportunidade única para estudar fenômenos monetários.

Nas hiperinflações, os aumentos astronômicos de preços e moeda superam amplamente as variações na renda real e outros fatores, permitindo o estudo das relações entre as variáveis monetárias em quase completo isolamento do resto da economia. Em processos de alta inflação, uma situação similar ocorre quando as elevadas taxas de variação das variáveis nominais enfatizam as relações entre a moeda e os preços.

A esta altura é útil ser mais específico sobre o significado da expressão “alta inflação”. Podemos recordar que Cagan (1956, p. 25) definiu hiperinflação como um processo que gera taxas de elevação de preços — calculadas com capitalização contínua — de mais de 50% ao mês,¹ enquanto Dornbusch, Sturzenegger e Wolf (1990, p. 2) definiram inflação extrema como aquela que apresenta taxas acima de 15 ou 20% ao mês. Dornbusch (1992, p. 17) considera inflação elevada como um estágio intermediário em um processo que caminha em direção à inflação extrema, demonstrando que países que experimentam taxas de inflação de 10 a 15% ao mês² por algum tempo estão se dirigindo para a hiperinflação.³ Conceitualmente, inflação elevada é um processo que, uma vez começado, tende a produzir hiperinflação, a menos que seja abortado por uma estabilização. Ele também produz mudanças na reação dos agentes à inflação e leva à criação de mecanismos para compensar os efeitos inflacionários, como, por exemplo, a indexação.

O estudo dos fenômenos monetários através da análise de processos de inflação elevada tem algumas vantagens quando comparado à análise da dinâmica hiperinflacionária. Processos de inflação elevada oferecem uma oportunidade para o estudo dos efeitos na demanda por moeda de fatores que não são relevantes em hiperinflações, mas são interessantes e importantes, como o impacto das variáveis reais no setor monetário e os detalhes mais sutis da interação entre as variáveis monetárias. Adicionalmente, episódios de inflação elevada oferecem uma base de dados maior e mais completa sobre a qual se podem conduzir estudos empíricos, pois sua ocorrência é mais comum do que as hiperinflações, que são um fenômeno raro. A maior dificuldade em modelar a demanda por moeda em episódios de inflação elevada é que esta tarefa deve ser feita em um ambiente mais complexo e ruidoso, quando comparado com as hiperinflações, porque aquela situação se assemelha menos a um experimento controlado. Na estimação do modelo, torna-se necessário controlar estatisticamente as outras variáveis que afetam a demanda por moeda e tratar de um resíduo maior e menos bem-comportado. Finalmente, comparada com os estudos de demanda por moeda sob baixa inflação, a análise sob alta inflação pode se beneficiar da maior variância apresentada pelas variáveis explicativas, permitindo uma identificação mais nítida dos fatores econômicos relevantes na dinâmica monetária.

1 Para ser preciso, Cagan (1956) definiu o processo de hiperinflações como começando no mês em que a taxa de crescimento dos preços supera 50% e terminando no mês anterior àquele em que a taxa de crescimento dos preços cai abaixo daquele valor e se mantém neste nível por pelo menos um ano.

2 Todas as taxas de inflação deste artigo são calculadas como taxas mensais com capitalização contínua.

3 A definição de alta inflação é arbitrária, mas possivelmente é razoável estabelecer a taxa limítrofe em cerca de 3% ao mês. A definição precisa não é crítica para os propósitos deste artigo.

Este artigo se preocupa com a especificação e estimação da demanda por moeda em episódios de inflação elevada e propõe um modelo que pode ser considerado, sob certos aspectos, como uma extensão daquele desenvolvido em Cagan (1956) para a dinâmica monetária das hiperinflações. A principal contribuição deste autor foi a ênfase nos encaixes reais como a variável dependente relevante e o uso da inflação esperada como a principal variável explicativa da demanda por moeda, aspectos que desde então se tornaram parte da formulação padrão da demanda por moeda [ver Goldfeld e Sichel (1990)]. Seu modelo é um ponto de partida adequado para o estudo dos processos de inflação elevada porque se comporta com robustez quando aplicado ao tipo de processo que ele estudou. Apesar de diversos artigos terem analisado vários aspectos do modelo de Cagan para hiperinflações, como a identificação dos parâmetros da equação, as hipóteses com relação à formação de expectativas, a forma funcional da demanda por moeda, o papel da taxa de câmbio e o procedimento de estimação, poucos deles conseguiram rejeitar o modelo original de Cagan [ver, respectivamente, Barro (1970), Sargent e Wallace (1973), Frankel (1975), Sargent (1977), Frankel (1977), Friedman (1978), Frankel (1979), Salemi (1979), Abel *et alii* (1979) e Hansen e Sargent (1983)]. Só em raras circunstâncias eles obtiveram intervalos de confiança para o parâmetro-chave — a semi-elasticidade da demanda por moeda com relação à inflação — que excluía a estimativa original de Cagan. O modelo tem sido de modo geral corroborado por artigos recentes que tiraram partido do desenvolvimento de testes de co-integração para estimar a demanda por moeda nas hiperinflações clássicas com requisitos menos estritos com relação à formação de expectativas [ver Casella (1989), Taylor (1991) e Engsted (1993)].

Entretanto, apesar de todo o trabalho já feito no modelo de Cagan, algumas de suas possíveis extensões ainda não foram completamente exploradas na literatura. Algumas são indicadas no seu artigo original, como, por exemplo, a possibilidade de que a forma funcional que ele utilizou era excessivamente limitada, e que em certas circunstâncias deveriam ser incluídas na equação variáveis do setor real da economia, como renda e taxas de juros, enquanto outras, como o uso de uma variável para refletir o risco inflacionário, são fruto do pensamento econômico mais recente. Estas extensões são elaboradas aqui, no contexto de processos de inflação elevada. Espera-se também que a aplicação do modelo estendido às hiperinflações possa contribuir para o teste destes melhoramentos.

Apesar de serem relatados aqui apenas os resultados da estimação do modelo para os dados da hiperinflação alemã, e para o episódio de inflação alta e extrema observado no Brasil nas duas últimas décadas, acredito que ele tem uma aplicação muito mais ampla. Isto ocorre porque as características da equação de demanda aqui proposta não foram obtidas de uma maneira *ad hoc* para se ajustar àqueles dados, mas são derivadas de considerações teóricas e empíricas de uma natureza geral sobre a demanda por moeda sob inflação elevada, como se verá adiante.

A aplicação do modelo à experiência brasileira é de interesse em si própria, pois a análise empírica da demanda por moeda em processos de inflação elevada não é encontrada com frequência na literatura. Montiel (1989) usa a especificação convencional para a demanda por moeda, mas substitui a inflação esperada pela observada, e obtém equações que não são muito satisfatórias. A análise de co-integração de moeda e preços foi também estendida para processos de inflação elevada [ver, por exemplo, Engsted

(1991), Phylaktis e Taylor (1992) e Rossi (1994)], mas usualmente sem incluir variáveis explicativas adicionais na equação.

O restante do artigo é dividido em cinco seções. A próxima deriva e apresenta um modelo da demanda por moeda que enfatiza a discussão da forma funcional da equação e o papel da incerteza. A terceira seção discute a especificação empírica do modelo, com referência especial à formação de expectativas. A Seção 4 apresenta a estimação do modelo para os dados da hiperinflação alemã, enquanto a Seção 5 discute a estimação do modelo com dados brasileiros para as duas últimas décadas. A Seção 6 resume os principais resultados do modelo, enquanto a discussão do procedimento de estimação e a descrição dos dados são apresentadas nos apêndices.

2 - A demanda por encaixes reais

Na análise da demanda por moeda em processos de inflação elevada é necessário considerar tanto os efeitos de mudanças na taxa esperada de inflação como os das mudanças na variabilidade da inflação. O nível de inflação é importante porque os agentes econômicos, ao decidirem sobre o nível desejado dos saldos de moeda, levam em consideração o fato de que retê-la traz um retorno real negativo. Isto fará com que eles tendam a reduzir sua demanda por moeda em resposta a aumentos na taxa esperada de inflação para minimizar a perda esperada no valor real de seus encaixes monetários. Entretanto, a possibilidade de economizar em saldos de moeda tem limites, porque existe algum nível de encaixes reais a partir do qual os benefícios em utilizar a moeda como um meio de trocas podem superar o custo inflacionário e induzir os agentes a reterem moeda em situações em que as taxas de inflação são tão elevadas que uma análise casual sugeriria uma total fuga da moeda, como, por exemplo, nas hiperinflações.

A variabilidade da inflação é também importante, pois, mesmo que a taxa esperada seja constante, os agentes ajustarão seus saldos monetários para compensar os efeitos de variações no risco inflacionário, uma vez que existirá um componente da demanda por moeda derivado do fato de ter que tomar decisões em um ambiente em que a taxa de inflação é estocástica. Isto pode ser justificado discutindo dois tipos de efeitos que um aumento no risco inflacionário pode gerar em modelos da demanda por moeda.

Em um modelo baseado na teoria de estoques, em que há uma penalidade caso os encaixes reais se situem abaixo de um determinado nível, ou no qual há um retorno de conveniência por reter moeda, os agentes econômicos manterão saldos de moeda que serão maiores que aqueles retidos na situação não-estocástica com a mesma taxa de inflação esperada. Este comportamento protege contra a possibilidade que o agente representativo terá de se encontrar em uma situação em que seus encaixes reais são insuficientes para suas transações, devido à incerteza da taxa de inflação. A demanda por moeda será maior, à custa de uma redução de consumo, quanto maior for a probabilidade de que ocorra um dado desvio entre a taxa efetiva e a taxa esperada de inflação. Portanto, estes encaixes tendem a crescer com a variância de inflação, como em Barro (1970), que

desenvolve um modelo similar ao modelo de demanda precaucional por moeda em Miller e Orr (1966).⁴

Por outro lado, em um modelo de escolha de *portfolio* com investidores avessos ao risco, surge um motivo especulativo para reter moeda que, na margem, induz os agentes a reduzir sua demanda por saldos reais em resposta a um aumento na incerteza da inflação, na medida em que eles tentam reduzir seus estoques de um ativo que se tornou mais arriscado. Portanto, o efeito do risco inflacionário na demanda especulativa por saldos monetários reais tem o mesmo sentido do da inflação esperada, que é contrário àquele da demanda precaucional.

Se admitirmos que os dois efeitos estão em operação, o sinal do coeficiente da variância da inflação na demanda por moeda é ambíguo. Este é o caso em Liviatan e Levhari (1976 e 1977), em um modelo de demanda por moeda com dois períodos, uma função de utilidade que depende do fluxo de consumo e dos saldos reais de moeda, uma função de utilidade para a riqueza terminal e um espaço de escolha que inclui um bem de consumo e três ativos financeiros: moeda, títulos indexados e títulos nominais. A ambigüidade no sinal do coeficiente da variável risco está presente também em Fischer (1975), que supõe que os preços dos bens e os retornos dos títulos indexados, títulos nominais e ações são governados por processos estocásticos de Wiener e soluciona o problema de programação dinâmica estocástica para computar as demandas pelos ativos. O que será argumentado a seguir é que em situações de inflação elevada esta ambigüidade pode ser resolvida, pois é provável que um destes efeitos predomine.

2.1 - A demanda por moeda em um modelo de escolha de *portfolio* em tempo contínuo

As questões discutidas anteriormente podem ser tratadas de um modo mais preciso no seguinte modelo de demanda por moeda, que tenta ilustrar como a incerteza na taxa de inflação pode afetar as decisões de composição de carteira de um consumidor representativo, em situações de inflação elevada. Ele é estruturado do mesmo modo que a classe de modelos que se origina com o modelo de consumo e escolha de *portfolio* de Merton (1969), que foi estendido para economias com inflação por Fischer (1975). Nenhum deles, entretanto, trata de demanda por moeda.

O modelo aqui apresentado atribui um retorno de conveniência à moeda e a considera como um dos ativos na economia. Ele também captura o fato de que em processos de inflação elevada a principal alternativa a reter moeda é conservar ativos substitutos que ofereçam indexação contra a inflação, o que justifica e exige que eles sejam incluídos na escolha de *portfolio*. Em muitos casos, este ativo é uma moeda estrangeira, enquanto em

⁴ Este efeito pode ser obtido considerando no modelo deles a componente da demanda por moeda que não pode ser explicada por outros fatores além da incerteza do fluxo de caixa e supondo que o componente estocástico do fluxo de caixa real é devido à variabilidade da inflação.

outros o setor privado pode criar este ativo alternativo indexando títulos ao preço de certas mercadorias, como, por exemplo, os *notgueld* na Alemanha durante a hiperinflação. Houve também casos em que o próprio governo criou estes ativos substitutos para proteger sua receita tributária da inflação (o *pengő* fiscal na Hungria depois da Segunda Grande Guerra é um exemplo clássico) ou para aumentar ou manter seu próprio endividamento (títulos indexados no Brasil, Argentina e Israel). Em alguns casos, estes ativos são denominados "moeda indexada", se eles adquirem alta liquidez à medida que seu uso se expande pela economia.⁵

Vamos admitir que os preços do único bem de consumo seguem um processo estocástico de difusão de Itô, dado pela equação (1), onde dz é o incremento do processo estocástico de Wiener⁶ z e os parâmetros π e σ são conhecidos pelo agente e são fixos:

$$\frac{dP}{P} = \pi dt + \sigma dz \quad (1)$$

O modelo é especificado em termos das variáveis reais, que são iguais à variável nominal correspondente dividida pelo nível de preços, em cada ponto do tempo. O agente possui inicialmente uma riqueza real $w(0) = w_0$, e em cada momento ele decide sobre o seu fluxo real de consumo (c) e distribui sua riqueza real (w) entre moeda e títulos indexados (reais) em proporções η e $(1 - \eta)$, respectivamente. Por simplicidade, é admitido que não há renda do trabalho.

O título indexado, que não tem risco na economia real, é o único ativo além da moeda⁷ e possui um retorno não-estocástico de $r dt$, com o retorno nominal sendo igual a este retorno real mais a taxa de inflação. A equação (2) apresenta o processo estocástico seguido por Q_b , o valor nominal destes títulos:

$$\frac{dQ_b}{Q_b} = r dt + \frac{dP}{P} = (r + \pi) dt + \sigma dz \quad (2)$$

A moeda tem um retorno nominal nulo, pois seu preço é igual à unidade. O retorno real ao reter moeda ($q_m = 1/P$) é estocástico, pois a desvalorização dos saldos reais

5 O controle estrito da oferta de moeda pode ser muito difícil quando existem ativos indexados com liquidez elevada, pois transferências de riqueza de e para estes ativos podem produzir grandes variações nos saldos monetários. Nesta situação, a autoridade monetária poderá ser capaz de controlar apenas o agregado mais amplo: base monetária mais moeda indexada. Este problema, no entanto, não será analisado neste trabalho.

6 Ver, por exemplo, Merton (1971) ou Fischer (1975) para uma introdução ao uso dos métodos de programação dinâmica com processos de Itô em problemas de seleção de *portfolios*.

7 Isto não envolve qualquer perda de generalidade, pois Fischer (1975, p. 520) mostrou, em um modelo similar que permite a existência de títulos nominais, que seu preço será precisamente aquele que garante que em equilíbrio nenhum deles exista, desde que as expectativas sejam homogêneas.

depende da variação de preços e pode ser calculada pelo lema de Itô, produzindo a equação (3):

$$\frac{dq_m}{q_m} = (-\pi + \sigma^2) dt - \sigma dz \quad (3)$$

Entretanto, admite-se também que a moeda tem um retorno de conveniência, pois ela permite que o agente economize no custo das transações requeridas para implementar seus planos ótimos de consumo e de administração de *portfolio*. Não se tenta derivar aqui esta propriedade da moeda a partir de considerações mais básicas, mas é claro que, se este retorno não existisse, a moeda seria um ativo financeiro dominado nesta economia, e não retido em valores positivos no *portfolio* do agente.⁸ A utilidade da moeda é modelada aqui introduzindo na equação de equilíbrio orçamentário do agente representativo uma despesa que reflete o custo de oportunidade, em recursos reais, de reter uma fração de sua riqueza no título indexado. Quando multiplicado pela utilidade marginal da riqueza, este custo pode ser interpretado como o retorno de conveniência da moeda ao qual o agente renunciou ao manter aquele volume de recursos no título indexado.

Admite-se que este custo por unidade de tempo (δ) é uma função decrescente da proporção da riqueza do agente que é retida sob a forma de moeda (η), que ele é nulo quando toda sua riqueza é completamente líquida ($\eta = 1$) e que ele é infinitamente elevado quando a fração de encaixes reais no seu *portfolio* se aproxima de zero ($\eta \rightarrow 0$). Considera-se que ele possa ser adequadamente aproximado por uma função logarítmica negativa no intervalo $0 < \eta < 1$, como mostrado na equação (4), onde $\kappa > 0$ é o parâmetro cuja unidade é aquela do bem de consumo real. Valores mais elevados de κ são associados com maior utilidade da moeda em facilitar transações relativamente aos títulos indexados e, portanto, com um maior retorno de conveniência. À medida que κ aumenta, o custo associado com a manutenção de uma certa fração da riqueza em títulos indexados se eleva, efeito que corresponde a um decréscimo na sua liquidez:

$$\delta = -\kappa \log(\eta) \quad \kappa > 0 \quad (4)$$

Admite-se que a utilidade (U) depende somente do fluxo de consumo e que os estoques de moeda retidos afetam a utilidade devido ao seu efeito sobre a riqueza, que ocorre através da componente de custo (δ). O problema de controle ótimo a ser resolvido pelo agente representativo é o de maximizar o valor esperado da utilidade descontada (a uma taxa contínua ρ) do fluxo de consumo — equação (5) —, sujeito a uma restrição

⁸ Um exemplo de modelo em que a demanda por moeda depende do custo esperado por unidade de tempo de atender às transações requeridas, que por sua vez é uma função da variabilidade da taxa de inflação, pode ser encontrado em Barro (1970, equação 54).

orçamentária (de fluxo) — equação (6). Há uma condição inicial sobre a riqueza, e a solução tem que satisfazer à condição de transversalidade mostrada na equação (7), onde $V(w)$ representa a função de utilidade indireta da riqueza, para que o problema seja bem definido. A variável de estado é a riqueza (w), e os controles são o consumo e a quantidade relativa de moeda retida (c e η):

$$\max_{c, \eta} E_0 \int_0^{\infty} e^{-\rho t} U(c(t)) dt \quad (5)$$

sujeito a:

$$dw = (1 - \eta) w r dt + \eta w [(-\pi + \sigma^2) dt - \sigma dz] + \kappa \log(\eta) dt - c dt \quad (6)$$

$$w(0) = w \quad e \quad \lim_{t \rightarrow \infty} E [e^{-\rho t} V(w(t))] = 0 \quad (7)$$

A equação básica do problema de controle ótimo estocástico enunciado acima, derivado do princípio de programação dinâmica estocástica, é apresentada na equação (8):

$$\begin{aligned} \rho V(w) = \max_{c, \eta} \{ & U(c) + [(1 - \eta) r w + \eta (-\pi + \sigma^2) w + \\ & + \kappa \log(\eta) - c] V'(w) + (1/2) \eta^2 \sigma^2 w^2 V''(w) \} \end{aligned} \quad (8)$$

Obtendo as condições de primeira ordem para o problema de maximização dentro dos colchetes em (8), pode-se derivar as equações (9) e (10):

$$U'(c) = -V'(w) \quad (9)$$

$$\kappa + (-\pi + \sigma^2 - r) w \eta + w^2 \sigma^2 \frac{V''(w)}{V'(w)} \eta^2 = 0 \quad (10)$$

A equação (10) é quadrática em η e pode ser reescrita como $\kappa + b \eta + a \eta^2 = 0$, se a e b são definidos para representar os termos correspondentes em (10). A solução geral desta equação é $\eta = (1/2a) (-b \pm \sqrt{b^2 - 4a\kappa})$, mas, se $4a\kappa \ll b^2$, uma expansão de Taylor da raiz quadrada na vizinhança de b^2 , seguida das simplificações apropriadas,

produzirá raízes $\eta_1 = -\kappa/b$ e $\eta_2 = -b/a + \kappa/b$. Como no nosso caso $a < 0$ e $b < 0$, a raiz positiva é η_1 . Usando a expressão para b , esta solução para a equação (10) é mostrada na equação (11):

$$\eta = \frac{\kappa}{w(\pi - \sigma^2 + r)} \quad (11)$$

Na análise da demanda por moeda em processos de inflação elevada, a utilização da aproximação antes mencionada é justificada, pois nestes casos, a condição para que ela seja válida é provavelmente satisfeita, isto é, $(-\pi + \sigma^2 - r)^2 \gg 4\kappa\sigma^2(V''/V')$. Para mostrar isto, primeiro use-se (11) para aproximar κ como $\eta w(\pi - \sigma^2 + r)$ e denote-se o coeficiente de aversão relativa ao risco por $A = wV''(w)/V'(w)$, de modo que (12) é equivalente a esta última condição. Argumenta-se, adiante, que é provável que (12) seja satisfeita em processos de inflação elevada, pois para valores razoáveis dos parâmetros envolvidos a ordem de magnitude do lado esquerdo será maior do que a do lado direito da desigualdade:

$$(\pi - \sigma^2 + r) \gg 4\eta\sigma^2 A \quad (12)$$

Defina-se $\vartheta(X)$, a ordem de magnitude de qualquer variável X , como o inteiro n tal que $10^{n-1} < E(X) < 10^n$. Lembremo-nos que, em processos de inflação elevada, $\pi > 0,1$ (em bases mensais), de modo que $\vartheta(\pi) \geq 0$, e notemos também que, para processos de preços que não são excessivamente erráticos, é provável que $\vartheta(\sigma^2) \leq -1$. Se as taxas reais de juros não são absurdas, $\vartheta(r) \leq -1$. Portanto, $\vartheta(\pi - \sigma^2 + r) \geq 0$. Agora, note-se que κ não pode ser tão grande (relativamente à riqueza total) que faça com que reter moeda seja tão desejável que η se afaste significativamente de zero,⁹ pois uma das características dos processos de inflação elevada é precisamente esta fuga da moeda, que corresponde a uma pequena participação da moeda no *portfolio* do agente, o que implica $\vartheta(\eta) = -1$. Para colocar limites no coeficiente de aversão relativa ao risco, podemos usar os resultados de Chechetti, Lam e Mark (1994), que estimam um valor para A de aproximadamente 6 usando dados anuais de retorno sobre ações e títulos nos Estados Unidos na última década, de aproximadamente 2 para dados mensais de preços de ações e títulos do Tesouro norte-americano, um valor de 20 para dados mensais da estrutura a termo dos títulos do Tesouro norte-americano e de 15 para dados de retorno em aplicações em cinco moedas estrangeiras, de modo que, se os agentes não são excessivamente avessos ao risco, é provavelmente razoável tomar $\vartheta(A) = 1$. Portanto,

⁹ Note-se que a solução para η mostrada na equação (11) é também a solução de uma equação (10) modificada, em que o termo quadrático é ignorado. Esta simplificação seria razoável se $\eta \approx 0$.

$\partial (4 \eta \sigma^2 A) = -1$. Em conclusão, a comparação das ordens de magnitude dos lados esquerdo e direito de (12) mostra que a aproximação usada para derivar (11) pode ser utilizada, desde que a variância do processo estocástico dos preços não seja muito grande, que a moeda não seja tão indispensável que sua participação no *portfolio* do agente seja elevada e que os agentes não sejam excessivamente avessos ao risco.

Esta última observação é importante para entender, do ponto de vista econômico, a resposta desta solução aproximada do problema de programação estocástica (5)-(7) a um aumento do risco inflacionário. À medida que a variância da taxa de inflação aumenta, há um *aumento* na demanda por encaixes reais para proteger o agente contra a possibilidade de ter que conduzir seus negócios com estoques insuficientes de moeda e ter que abrir mão dos elevados retornos de conveniência de moeda. Este é o efeito capturado pela equação (11). Pode também existir outro efeito, que tende a *reduzir* a demanda por moeda: a elevação na variância da taxa de inflação aumentaria o risco de variações na riqueza devido à retenção de estoques de moeda e induziria agentes avessos ao risco a reduzir seus estoques de moeda para reduzir o risco de seu *portfolio* total. Este efeito não está presente na nossa equação de demanda por moeda porque só é importante se o grau de aversão ao risco é suficientemente elevado para produzir ajustamentos significativos no montante de moeda retido pelo agente. Ele somente será importante se os benefícios de evitar o risco adicional são grandes o suficiente para justificar incorrer em custos mais altos de conduzir os negócios com estoques significativamente menores de moeda. Este motivo para reter moeda, associado ao efeito de recomposição da carteira de ativos, é considerado implicitamente como sendo uma ordem de magnitude menor do que o motivo transacional. Daí deriva a necessidade de que o coeficiente de aversão ao risco não seja muito elevado, para que a aproximação seja válida.

Como estamos basicamente interessados na demanda por saldos reais de moeda, que é igual a ηw e já está especificada em termos dos parâmetros em (11), não é necessário continuar com a solução do problema de controle ótimo, na medida em que se possa considerar que uma solução exista. Normalmente não ocorre o caso de se poder parar tão cedo no processo de solução, pois as condições de primeira ordem normalmente envolvem a função de utilidade indireta da riqueza V , que tem de ser encontrada solucionando (8).

A análise da equação para a demanda real por moeda obtida anteriormente mostra que ela tem os sinais esperados para as derivadas parciais: positivo para a variância da taxa de inflação e para o retorno de conveniência da moeda e negativo para a taxa esperada de inflação e para a taxa de juros real. É também interessante notar que, se o parâmetro da função que permite calcular o retorno de conveniência da moeda (κ) for reduzido, por exemplo, pela criação de novos ativos indexados, ou pelo decréscimo da liquidez dos ativos existentes, a demanda por moeda é reduzida na mesma proporção.

A forma funcional de (11) equivale à especificação log-log usualmente empregada na análise empírica da demanda por moeda e é bastante diferente, especialmente em termos de implicações, da forma funcional log-linear empregada por Cagan.¹⁰ A questão de qual a forma funcional correta a utilizar para a função de demanda por moeda é discutida na

10 A forma funcional derivada no texto é também diferente da forma exponencial obtida por Barro (1970).

próxima seção, em um contexto que permite a consideração simultânea destas duas formas funcionais.

2.2 - A forma funcional da função de demanda por moeda

Cagan (1956) especificou o seu modelo na forma log-linear, mas considerou a possibilidade de que outras formas funcionais poderiam ter sido mais apropriadas, ao explorar as razões pelas quais suas regressões não se ajustavam bem às observações próximas ao fim das hiperinflações. Para estes pontos, a demanda efetiva era maior que aquela explicada por sua equação. Segundo o autor, sua regressão se ajustaria melhor aos dados se apresentasse uma curvatura para cima, à esquerda de seu gráfico (para saldos reais pequenos e inflação elevada). Isto o induziu a desconsiderar os dados para os últimos poucos meses de várias hiperinflações e a oferecer duas explicações possíveis: que a expectativa da reforma monetária poderia justificar a retenção destes estoques maiores, ou que a demanda por saldos reais de moeda não se comportava de acordo com sua equação.

A primeira explicação já foi explorada por Flood e Garber (1980), cujos resultados não parecem ser conclusivos, como se pode depreender da natureza da afirmação que resume os resultados da incorporação da probabilidade de reforma à equação de Cagan: “(...) parece que a instabilidade da função de demanda por moeda ao final da hiperinflação é *reduzida um pouco* se a probabilidade de reforma é considerada” [Flood e Garber (1980, Apêndice F, tradução e ênfases nossas)]. A segunda explicação, relacionada ao uso de formas funcionais alternativas para a demanda por saldos reais nas hiperinflações, parece ser eliminada por Cagan com base em um raciocínio heurístico e tem sido apenas raramente explorada na literatura. Frankel (1977) testa uma equação para a hiperinflação alemã em que a variável *independente* é transformada pelo procedimento Box-Cox, com resultados insatisfatórios. Entretanto, a transformação da variável *dependente* parece mais em linha com o que Cagan se referia como formas funcionais alternativas.

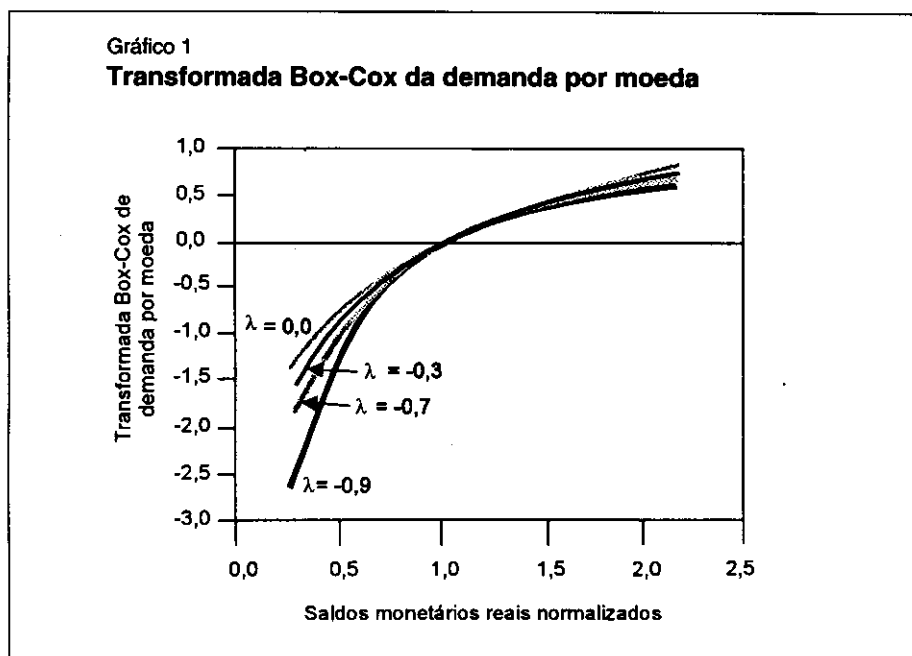
Aqui se pode argumentar que, para modelar a demanda por moeda sob inflação elevada, é preferível utilizar como variável dependente a transformada Box-Cox¹¹ [ver Box e Cox (1964)] dos saldos reais normalizados, mantendo ao mesmo tempo a especificação linear para as variáveis independentes. O uso da transformada Box-Cox dos saldos monetários e de todas as variáveis explicativas na estimação de funções de demanda por moeda foi proposto por Zarembka (1968) e aplicado à estimação da demanda por moeda nos Estados Unidos de 1870 a 1963. White (1972) e Spitzer (1976) também empregaram esta forma funcional generalizada para estimar a demanda por moeda. O mesmo enfoque proposto por Zarembka foi também utilizado por Prado (1978) para estimar a demanda por moeda no Brasil antes de 1970 — um período de baixas taxas de inflação —, obtendo o que parece ser uma discriminação muito fraca entre as diferentes formas funcionais. Aqui propõe-se que somente a variável dependente seja transformada, pelas razões que são explicadas a seguir.

11 A vantagem desta transformação sobre a transformação potência z^λ é que ela é contínua em $\lambda = 0$.

Deixando z representar a variável dependente transformada, calculada dividindo os valores observados de M/P pela sua média geométrica no período da amostra,¹² esta transformação é mostrada na equação (13) e ilustrada no Gráfico 1:

$$\Phi(z, \lambda) = \begin{cases} \frac{z^\lambda - 1}{\lambda} & \lambda \neq 0 \\ \log(z) & \lambda = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} \Phi(z, \lambda) = \log(z) \quad (13)$$

Agora, suponha-se que a transformada Box-Cox da variável dependente é escrita como uma função linear da taxa de inflação, como na equação (15). É fácil ver que esta forma funcional flexível é capaz de representar as duas principais formulações de interesse para nós: a forma funcional inversa obtida na seção anterior e a especificação log-linear empregada por Cagan. Para demonstrar a primeira afirmação, lembremo-nos de que o parâmetro da função do retorno de conveniência (κ) é positivo e note-se que na equação (14), obtida aplicando a transformada Box-Cox com $\lambda = -1$ a ambos os lados



¹² Esta normalização é conveniente no que se segue e para a estimação de λ , como veremos na próxima seção.

da função de demanda $m = \eta w$ derivada de (11), a variável dependente se torna uma função linear das variáveis explicativas. Os sinais das derivadas parciais, discutidas na última seção, são preservados, pois a transformação tem uma inclinação positiva. Também é possível testar se a forma funcional inversa da equação (11) se ajusta bem aos dados verificando se -1 está contido no intervalo de confiança para λ . Se admitirmos que todas as outras hipóteses do modelo estão corretas, este acaba sendo um teste das hipóteses utilizadas para justificar a aproximação empregada para derivar a nossa equação de demanda:

$$\Phi(z, -1) = 1 - z^{-1} = 1 - (\pi - \sigma^2 + r) \kappa^{-1} \quad (14)$$

A demonstração da segunda afirmativa é direta, pois o logaritmo natural é o caso especial de (13) quando o parâmetro de forma é nulo. Este fato nos permite verificar a adequação das hipóteses de Cagan com relação à forma funcional da demanda real por moeda, testando para $\lambda = 0$ na equação de demanda linear estimada com a forma funcional generalizada de Box-Cox.

O raciocínio anterior, com relação ao teste da forma funcional da equação de demanda com base no valor de λ , é válido enquanto κ é constante, como foi admitido na derivação acima. Se a equação (11) é estimada para um período em que a inflação está acelerando, e se o parâmetro da função para o retorno de conveniência da moeda declina no processo, à medida que, por exemplo, os títulos indexados adquirem maior liquidez, o efeito composto de um aumento de π e um decréscimo em κ na equação de demanda por moeda distorcerá a relação inversa entre os saldos reais de moeda e inflação, mesmo que a equação (11) seja válida.¹³ Esta observação terá conseqüências importantes para a interpretação dos resultados nas seções empíricas deste artigo e para o estudo dos processos de inflação elevada em geral, pois os aumentos da taxa de inflação tendem a induzir ao aparecimento de ativos indexados mais líquidos.¹⁴

Mesmo que o desenvolvimento da seção anterior não seja utilizado para derivar a demanda por moeda e, portanto, para fornecer uma indicação para a forma funcional da equação a ser estimada, ainda assim é desejável utilizar a transformada Box-Cox dos saldos monetários normalizados como a variável dependente na estimação da equação de demanda por moeda. Isto é argumentado na análise a seguir, que mostra que esta forma funcional preserva as propriedades desejáveis da função de demanda por moeda, se aquela variável é definida como uma função linear da taxa de crescimento dos preços, e algumas restrições são impostas a λ . Esta função de comportamento é indicada na equação (15), que se obtém quando todas as outras variáveis que afetam a demanda por encaixes reais são mantidas constantes, e seu efeito total é representado por γ . Como a

13 É difícil avaliar se o parâmetro da forma funcional muda devido apenas a variações de κ ou não, porque o retorno de conveniência de moeda não é diretamente observável.

14 Ver também mais discussão desta questão em conexão com o cálculo da elasticidade na equação (19).

transformada Box-Cox tem uma inclinação positiva, a teoria econômica exigirá que α seja negativo, como se demonstrará adiante:

$$\Phi(z, \lambda) = \gamma + \alpha \pi \quad (15)$$

As implicações desta especificação para as propriedades da equação de demanda por moeda podem ser exploradas em mais detalhe através do exame da equação (16), obtida usando (15) em (13) e resolvendo para o valor dos saldos de moeda (z), para diferentes valores da taxa de inflação (π):

$$z = \begin{cases} [(1 + \lambda \gamma) + \alpha \lambda \pi]^{1/\lambda} & \lambda \neq 0 \\ \exp(\alpha \pi + \gamma) & \lambda = 0 \end{cases} \quad (16)$$

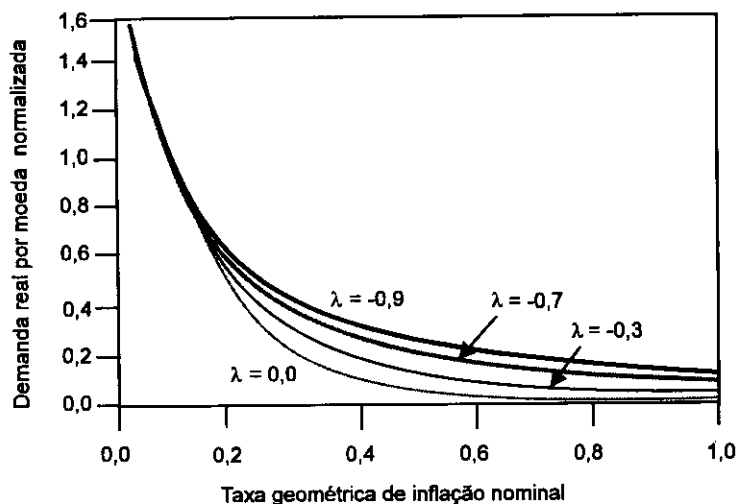
É necessário impor restrições aos valores dos parâmetros da equação (16), de modo a forçá-la a satisfazer às propriedades globais requeridas de uma função de demanda satisfatória. Esta preocupação com as características da função em todo o seu domínio é justificada pela necessidade de a equação ter o comportamento esperado tanto a baixas quanto a altas taxas de inflação, para poder traçar adequadamente o processo de aceleração da inflação.

O valor normalizado dos saldos reais de moeda deve ser bem definido para qualquer taxa de inflação, e isto demonstra que o termo em colchetes em (16) deve ser positivo. Usando esta condição, e exigindo que a inclinação da demanda por moeda seja negativa, é fácil mostrar que $\alpha < 0$. A condição que $\lambda \leq 0$ pode então ser derivada requerendo que no limite, quando a inflação aumenta, a demanda por saldos monetários dada pela equação (16) se aproxima do eixo horizontal vinda de cima. Restringindo nossa atenção ao caso $\lambda < 0$, exigindo que o termo entre parênteses em (16) seja positivo para qualquer π (e, em particular, para $\pi = 0$) e usando o fato de que α e λ são ambos negativos, pode-se mostrar que $\gamma < (-1/\lambda)$. Adicionalmente, quando a inflação é nula, z tem que ser maior que a unidade, pois a função de demanda por moeda é decrescente e a média geométrica de z é 1. Portanto, a inspeção de (16) para $\pi = 0$ mostra que devemos exigir que $(1 + \lambda \gamma)^{1/\lambda} > 1$, o que implica $\lambda \gamma < 0$, pois $\lambda < 0$. Isto, por sua vez, implica $\gamma > 0$. O caso onde $\lambda = 0$ só exige que $\gamma > 0$. As inequações em (17) resumiriam a discussão precedente e explicitam as condições exigidas para que o funcional linear Box-Cox da inflação seja uma equação razoável para a demanda por saldos reais de moeda em processos de inflação elevada:

$$\alpha < 0, \lambda \leq 0 \quad e \quad 0 < \gamma < -1/\lambda \quad (17)$$

Como ilustrado no Gráfico 2, se α e γ são mantidos constantes enquanto λ varia, os saldos monetários calculados a partir da equação com a transformada Box-Cox com

Gráfico 2
Inflação e demanda real por moeda Box-Cox



$\lambda < 0$ serão maiores do que aqueles calculados a partir da equação com a transformação logarítmica ($\lambda = 0$). Os saldos mais elevados são obtidos para a função inversa ($\lambda = -1$). Para mostrar isto, note-se primeiramente que as várias funções nesta família se encontram para a taxa $\pi = -\gamma/\alpha$, pois a substituição deste valor em (16) produz $z = 1$. Isto significa que estas curvas são de fato comparáveis, pois todas elas produzem o mesmo valor para a taxa de inflação associada com o estoque médio de moeda. Para taxas de inflação diferentes daquela que caracteriza a interseção das curvas, valores absolutos de λ mais elevados correspondem a saldos monetários maiores. Isto pode ser mostrado notando, primeiramente, que a inclinação destas curvas na sua interseção é igual a α e, portanto, independe de λ . Estas funções de demanda têm a propriedade “alto contato” naquele ponto.¹⁵

15 Para comparar a *performance* das funções em (16) na estimação da função de demanda para uma dada base de dados, poder-se-ia preferir que a variação dos parâmetros λ e γ ficasse restrita de tal modo que forçasse todas as funções a produzir o mesmo valor para a demanda por saldos reais de moeda quando não há inflação. Se $z(0) = z_0$, isto implicaria $\gamma = (z_0 - 1)/\lambda$. Neste caso, (16) se torna $z = (z_0 + \alpha\lambda\pi)^{1/\lambda}$, que se cruzam para $\pi_1 = (z_0 - 1)/\alpha\lambda$. Distintamente do caso em que só λ é variado, estas curvas não têm a mesma inclinação na sua interseção, e para $\pi < \pi_1$, maiores $|\lambda|$ produzem *menores* saldos reais de moeda, enquanto para $\pi > \pi_1$ maiores $|\lambda|$ produzem maiores saldos reais de moeda. É possível derivar, nesta estrutura alternativa, resultados análogos àqueles do texto, relativos à convexidade, ao comportamento da elasticidade e à maximização da receita inflacionária.

$$\frac{d^2 z}{d \pi^2} = \alpha^2 (1 - \lambda) [1 + \lambda \gamma + \alpha \lambda \pi]^{(1/\lambda) - 2} \quad (18)$$

Como a segunda derivada de (16) é dada por (18), e é positiva para todo π , conclui-se que todas as funções desta família são convexas. A curvatura destas curvas de demanda para $\pi = -\gamma/\alpha$ é uma função decrescente de λ , pois naquele caso a expressão do lado direito de (18) reduz-se ao termo fora dos parênteses, em que o coeficiente de λ é negativo. A taxa de variação da inclinação de z é, portanto, uma função crescente de $|\lambda|$, o que significa que as curvas de demanda que correspondem a maiores valores absolutos do parâmetro Box-Cox são menos (mais) inclinadas imediatamente à direita (esquerda) de $\pi = -\gamma/\alpha$. Esta diferença de inclinação produz a ordenação anteriormente descrita nos saldos monetários na vizinhança de $z = 1$. Esta ordenação com relação a λ dos valores das demandas reais por moeda se estende para todos os outros pontos do domínio das funções, porque elas formam uma família contínua de funções e se encontram apenas para $z = 1$, como se pode ver por inspeção de (16). Isto completa a demonstração das afirmativas relativas à ordenação do efeito de λ no formato e na posição das curvas de demanda.

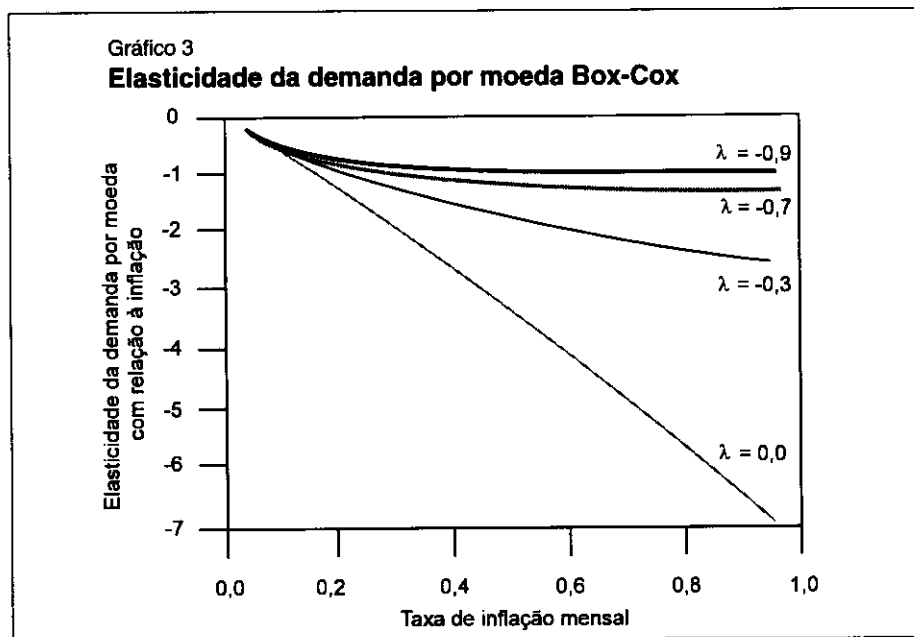
Quando se analisa o comportamento da elasticidade dos saldos monetários com relação à inflação (aqui denotada por ϕ) para taxas elevadas de inflação, surge uma diferença crucial entre as duas possibilidades da equação (16). Para ver isto, pode-se analisar as propriedades da função elasticidade, que é dada pela equação (19):

$$\phi = \frac{\alpha \pi}{1 + \lambda \gamma + \lambda \alpha \pi} \quad (19)$$

Pode-se verificar imediatamente que, quando $\lambda = 0$ e Φ é a transformada logarítmica, a equação (19) reduz-se a $\phi = \alpha \pi$, que é a expressão para esta elasticidade derivada por Cagan (1956). Esta função, entretanto, aumenta em valor absoluto sem limite, quando a inflação aumenta, forçando os saldos monetários estimados a se aproximarem de zero muito rapidamente quando a inflação aumenta e forçando a demanda real por moeda a se aproximar de zero muito rapidamente à medida que a hiperinflação se desenvolve, pois para qualquer α a sua redução proporcional devida a um aumento da inflação é muito grande e sempre crescente.

Alternativamente, se $\lambda < 0$, o denominador da equação (19) limita o crescimento da elasticidade quando π aumenta, suavizando o colapso dos saldos monetários, como ilustrado no Gráfico 3. Mais importante, a elasticidade da demanda real por moeda com relação à inflação converge para o inverso do parâmetro λ da transformada Box-Cox quando a hiperinflação se estabelece, como pode ser visto em (20), que é obtida aplicando a regra de L'Hospital a (19):

$$\lim_{\pi \rightarrow \infty} \phi = \frac{1}{\lambda} \quad (20)$$



A equação (20) mostra que, quando a taxa de inflação aumenta indefinidamente, a elasticidade limite no caso da transformada Box-Cox com $\lambda < 0$ é finita, contrariamente ao valor infinito obtido para o caso $\lambda = 0$. Isto é consistente com a visão de que no primeiro caso a velocidade com que os agentes reduzem seus estoques de moeda nas hiperinflações é limitada, na margem, o que faz com que os saldos reais declinem mais lentamente neste caso. Esta é a razão pela qual acreditamos que a dificuldade encontrada por Cagan ao explicar a demanda real por moeda próximo ao fim das hiperinflações com o modelo log-linear pode ser remediada parcialmente pelo uso do enfoque proposto aqui.

No outro caso extremo, quando a demanda por moeda tem a forma funcional inversa, como na equação (11), isto é, quando $\lambda = -1$, a elasticidade limite é igual a $e - 1$. Isto é verdade enquanto o parâmetro da função que caracteriza o retorno de conveniência da moeda (κ) é constante. Agora considere-se a possibilidade de que κ possa ser uma função da taxa de inflação, com uma inclinação negativa ($\kappa' < 0$). A elasticidade limite da demanda por saldos reais em (11) pode ser facilmente calculada como $-1 + \zeta$, onde $\zeta = \lim (\pi \kappa' / \kappa)$ é a elasticidade limite do parâmetro κ quando a inflação aumenta indefinidamente.¹⁶ Comparando esta expressão com a elasticidade limite em (20),

¹⁶ Formalmente, esta extensão do modelo pode ser tratada como feito no texto (tomando a demanda por moeda como dada) apenas se for considerado que os agentes econômicos ignoram a dependência do retorno de conveniência da moeda com relação à taxa de inflação e tomam a estimativa do valor esperado de κ como dado em cada instante de tempo, ao resolver o problema de programação dinâmica das equações (5)-(7). Se a função $\kappa(\pi)$ fosse conhecida *ex-ante* para o agente representativo, ela deveria ter sido incluída no cálculo da demanda ótima por saldos monetários.

pode-se verificar que é possível produzir na formulação generalizada do modelo Box-Cox da equação (16) a elasticidade limite do modelo da equação (11) generalizado (para κ variável), escolhendo o parâmetro λ da forma indicada na equação (21):

$$\lambda = 1/(\zeta - 1) \quad (21)$$

Se a estimativa empírica de λ no modelo Box-Cox responde principalmente ao valor da elasticidade limite da demanda por moeda a taxas de inflação elevadas — como será o caso se ele for útil para captar os saldos monetários observados maiores do que os esperados a partir da formulação de Cagan nas hiperinflações —, então é possível que o seu valor esteja realmente refletindo o comportamento do parâmetro de escala da função que caracteriza o retorno de conveniência da moeda. Reduções no valor absoluto do parâmetro de forma da formulação Box-Cox, que poderão ocorrer ao estimar a equação para os vários estágios do processo hiperinflacionário, podem ser devidas a aumentos no valor absoluto da elasticidade de κ , que são a consequência do aparecimento de substitutos para a moeda. Neste caso, portanto, pode ser difícil distinguir entre duas possibilidades para a natureza dos parâmetros do modelo:¹⁷ λ flexível e κ fixo — equação (16) —, ou λ fixo e κ flexível — equação (11) estendida.

A forma funcional Box-Cox pode também ser instrumental para resolver ainda mais uma questão colocada pelo artigo de Cagan: as economias por ele analisadas pareciam inflacionar a taxas mais elevadas do que aquelas que maximizariam o imposto inflacionário. Como visto anteriormente, para uma dada taxa de inflação, a transformação Box-Cox com $\lambda < 0$ produzirá uma demanda por saldos reais de moeda maiores do que aquela encontrada no caso da transformada logarítmica ($\lambda = 0$) e também produzirá taxas ótimas de inflação maiores, para maximização do imposto inflacionário, como ilustrado no Gráfico 4. Para provar isto, note-se primeiramente que, se a demanda por saldos monetários reais é dada pela equação (16), a taxa de inflação constante que maximiza a receita do imposto inflacionário, que é igual a $\Pi = z\pi$, é dada por π^* na equação (22):

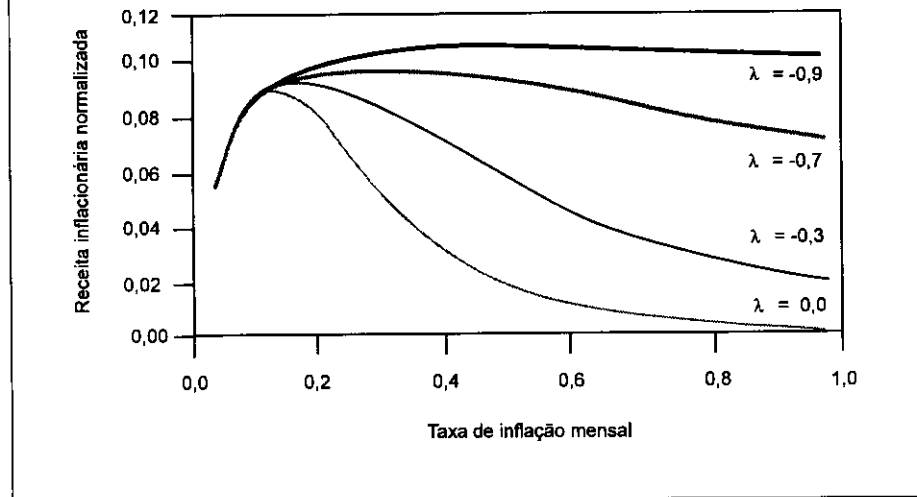
$$\pi^* = \frac{1 + \lambda \gamma}{-\alpha(1 + \lambda)} \quad (22)$$

Como esperado, quando $\lambda = 0$ a equação (22) reduz-se à familiar expressão $-1/\alpha$ derivada por Cagan para a taxa de inflação ótima (para coletar imposto inflacionário). Note-se também que, para a função inversa da equação (11) ($\lambda \rightarrow -1$), a taxa de inflação ótima tende para infinito. Portanto, o valor de λ é o parâmetro crucial para determinar o

¹⁷ Para distinguir entre estas possibilidades, poder-se-ia tentar obter dados indiretos sobre o retorno de conveniência da moeda.

Gráfico 4

Receita inflacionária na função de demanda por moeda Box-Cox



comportamento da taxa de inflação ótima e tem o potencial para resolver a aparente divergência encontrada por Cagan entre a taxa de inflação média durante as hiperinflações e a taxa ótima calculada no modelo log-linear.

Note-se também no Gráfico 4 que a curva de receita para a formulação Box-Cox é mais plana que aquela da especificação logarítmica, o que significa que os erros eventualmente cometidos ao superestimar a taxa ótima de inflação produziram, na equação Box-Cox, perdas de receita significativamente menores do que na especificação logarítmica. Devido à natureza destas curvas de receita, que ficam mais alongadas à direita à medida que $\lambda \rightarrow -1$, a consequência de um dado erro absoluto, ao estabelecer a taxa de inflação, é menos séria se ele for feito na direção de inflar “demais” do que na direção de não inflar “suficientemente”. Isto pode induzir os responsáveis por decisões na política monetária e fiscal que são avessos ao risco a errar na direção de superestimar a taxa de inflação necessária para obter uma dada receita inflacionária, o que os induziria a coletar mais senhoriagem do que a necessária para absorver um dado volume de recursos reais. Pode-se apenas conjecturar se este fato contribuirá, em uma dada situação, para o aprofundamento do processo hiperinflacionário.

A análise da equação (22) também nos permite restringir ainda mais os valores aceitáveis do parâmetro de forma da especificação Box-Cox, pois para π^* ser positivo temos que exigir que $\lambda \geq -1$. Apesar de esta condição sobre λ não ser uma implicação das propriedades básicas da função de demanda por moeda, é desejável que ela seja satisfeita, pois é necessário que a taxa ótima de inflação para a arrecadação máxima do imposto inflacionário seja bem definida a fim de que a explicação de Cagan para a razão

da expansão dos saldos monetários seja aceitável. Agregando a isto as restrições sobre o parâmetro Box-Cox já derivadas anteriormente, obtém-se a inequação (23), que pode ser testada para verificar se a forma funcional adotada é uma representação adequada da demanda por saldos reais de moeda.

$$-1 \leq \lambda \leq 0 \quad (23)$$

A condição de segunda ordem para um máximo local em π^* , para a receita do imposto inflacionário, é também satisfeita, desde que as condições já derivadas para λ e γ sejam satisfeitas. Para mostrar isto, verifique-se que o sinal da segunda derivada de Π , que é dado por (24), é negativo no ponto π^* definido por (22):

$$\frac{d^2\Pi}{d\pi^2} = \alpha(1 + \lambda\gamma + \alpha\lambda\pi)^{1/\lambda-1} \left[2 + \frac{\alpha(1-\lambda)\pi}{1 + \lambda\gamma + \alpha\lambda\pi} \right] \quad (24)$$

Note-se que como o termo fora dos colchetes em (24) é negativo, temos de mostrar que o termo dentro dos colchetes é positivo, em π^* . Depois de alguma álgebra, é fácil ver que para provar isto basta mostrar que (25) é sempre satisfeita:

$$\alpha\pi^*(1-\lambda) > -2(1+\lambda\gamma) \quad (25)$$

Substituindo π^* definido em (22) e lembrando que (17) implica $1 + \lambda\gamma > 0$, (25) reduz-se à expressão $1 < 2$, que é identicamente verdadeira. Isto completa a demonstração de que Π é côncava em π^* . Ocorre que este é o único extremo desta função e, portanto, é também o máximo global.

Se o comportamento deste máximo é explorado quando λ varia, é fácil ver que $\pi^* > -1/\alpha$, desde que $\gamma < 1$. Esta última condição é uma consequência de exigir que $\gamma < (-1/\lambda)$ — de (17) — seja satisfeita para $\lambda = -1$, que é a situação mais restritiva em (23). Isto significa que a equação de demanda por moeda obtida com a transformada Box-Cox com $\lambda < 0$ vai gerar taxas de inflação que maximizam o imposto inflacionário maiores do que aquelas obtidas com a transformada logarítmica utilizada por Cagan, como desejávamos mostrar. É também fácil ver, por inspeção de (26), que, se $\gamma < 1$, a taxa de inflação que maximiza o imposto inflacionário é uma função crescente do valor absoluto de λ :

$$\frac{d\pi^*}{d|\lambda|} = \frac{\gamma-1}{\alpha(1+\lambda)^2} \quad (26)$$

Tomadas como um todo, as propriedades mostradas nesta seção sugerem que a forma funcional Box-Cox pode ser muito útil para analisar dados das hiperinflações clássicas, se o parâmetro λ for estimado apropriadamente. Ela é adotada aqui para estimar a demanda por moeda em processos de alta inflação porque é provável que ela apresente um bom desempenho quando a inflação elevada degenera em hiperinflação. Ela também é interessante porque é uma forma funcional flexível, capaz de produzir a transformada logarítmica, ou a função inversa desta seção, qualquer que seja de fato a forma correta a utilizar.¹⁸

3 - Especificação empírica

Aqui adota-se a abordagem usual ao estudo da demanda por moeda, analisando-a isoladamente e utilizando técnicas econométricas adequadas ao tratamento de equações individuais, deixando de lado, portanto, as questões de identificação e de viés das equações simultâneas. O tratamento destas questões mais amplas teria exigido uma descrição cuidadosa do processo de oferta de moeda, que está fora do escopo deste artigo. A oferta de moeda pode também ser específica ao país e episódio que está sendo analisado, e sua modelagem pode não ser suscetível ao tratamento mais geral empregado a seguir.¹⁹

Considera-se também que os saldos monetários efetivos e desejados são iguais. Em consequência, não se aplica o raciocínio fornecido pelo modelo de ajustamento parcial para justificar o uso da variável dependente defasada como uma variável explicativa. O comportamento passado das variáveis influencia a equação para o período corrente apenas através do mecanismo de expectativas adaptativas operando sobre as variáveis independentes, como descrito adiante. A ausência da variável dependente defasada da parte direita da equação de demanda por moeda é uma diferença importante entre a especificação aqui proposta e a convencional, como definida por Goldfeld e Sichel (1990, Seções 2 e 4). Possivelmente, esta é uma vantagem importante desta especificação, pois evita os problemas econométricos envolvidos na estimação de uma equação que usa a variável dependente defasada como uma variável explicativa, na presença de erros autocorrelacionados. Além disto, como apontado inicialmente por Cagan (1956), o uso simultâneo das hipóteses de expectativas adaptativas e de ajustamento parcial dos saldos monetários efetivos aos desejados pode gerar sérios problemas de identificação.

18 Esta formulação é também capaz de produzir a função linear se $\lambda = 1$, mas esta forma funcional pode ser eliminada *ex-ante* porque ela geraria saldos monetários negativos para taxas de inflação suficientemente elevadas.

19 Uma abordagem alternativa, que é o uso da técnica de estimação por máxima verossimilhança de informação completa, proposta por Sargent (1977) para eliminar o viés assintótico que potencialmente pode ocorrer na estimação da equação de Cagan, devido à existência de equações simultâneas na especificação correta do equilíbrio de mercado para a moeda, não é muito encorajadora. Ela produziu estimativas "frouxas" para o parâmetro de inclinação da curva de demanda por moeda, quando aplicada aos dados das hiperinflações clássicas.

3.1 - Formação de expectativas

Supõe-se aqui que as expectativas com relação aos aumentos futuros de preços são formadas de modo adaptativo, como proposto por Cagan (1956) para as hiperinflações. Em seu estudo, o exame apenas superficial das séries de tempo envolvidas foi suficiente para estabelecer que, em qualquer momento, a taxa de crescimento dos preços efetivamente observada não era suficiente para explicar satisfatoriamente os saldos monetários no mesmo instante de tempo. A demanda por estoques reais de moeda parecia depender também das taxas de variação de preços no passado, o que fez com que ele postulasse que ela dependia das taxas esperadas de inflação, que por sua vez podiam ser calculadas como uma média ponderada das taxas de variação de preços passadas, com pesos dados por uma função exponencial negativa. Este enfoque se tornou a formulação usual para a formação de expectativas para processos de inflação elevada, de acordo com Dornbusch (1992, p. 24), o qual destaca que parece haver uma lentidão significativa no ajustamento dos estoques reais de moeda nas fases iniciais do processo, como também parece ocorrer uma aceleração subsequente, o que sugere exatamente este mecanismo de formação de expectativas.

A hipótese de expectativas adaptativas afirma que a taxa esperada de variação dos preços deve ser revisada a cada período de tempo proporcionalmente à diferença entre as taxas de inflação verificada e esperada. Deixando C_t representar a taxa instantânea efetiva de crescimento exponencial dos preços no instante de tempo t , isto é, ela é a amostra discreta do processo estocástico contínuo $d \log P$, e fazendo E_t representar a taxa de inflação logarítmica esperada no mesmo momento do tempo,²⁰ a hipótese de expectativas adaptativas significa que E_t pode ser calculada aproximadamente pela equação (27):²¹

$$E_t(\beta_e) = \frac{1 - \exp(-\beta_e)}{\exp(\beta_e t)} \sum_{x=-T}^t C_x \exp(\beta_e x) \quad \beta_e \geq 0 \quad (27)$$

O parâmetro β_e , coeficiente que caracteriza a formação de expectativas e mede a velocidade de ajustamento das expectativas inflacionárias, é positivo, sendo sua unidade

20 Apesar de o modelo ter sido especificado em tempo contínuo, ele é estimado a partir de uma série de observações que é obtida de uma amostragem do processo contínuo em intervalos discretos (um mês). Para enfatizar isto, a nova notação é introduzida. Hansen e Sargent (1983) exploraram a possibilidade de que esta agregação no tempo pudesse viesar significativamente a estimação do modelo de Cagan e concluíram que para valores de β menores que a unidade, na faixa de valores obtidos para as hiperinflações que ele estudou, há no máximo um viés assintótico muito pequeno no estimador de β proposto por Cagan.

21 Como Cagan especificou o seu modelo em tempo contínuo, a fórmula exata para a inflação esperada é uma integral análoga à somatória no texto, que não é reproduzida aqui. Para a aproximação discreta ser válida, o período T tem que ser escolhido de modo a assegurar que a aproximação é suficientemente precisa. Cagan mostra que para que o erro seja inferior a 0,05%, T tem que ser calculado como na expressão seguinte: $T = (-1/\beta_e) \ln((1 - \exp(-\beta_e))/0,00005)$.

o inverso da unidade de tempo (por mês, se C e E são medidos em bases mensais). Um valor elevado para β_e , implica ajustamento rápido e produz pesos exponenciais cujo valor declina rapidamente à medida que valores de inflação efetiva mais distantes no passado são incluídos no cálculo da média ponderada. Um β_e pequeno implica um ajustamento mais lento e pesos menores para os valores de inflação efetiva do passado recente do que no caso anterior. Quanto menor for o coeficiente de expectativas, mais a inflação esperada demora a responder a choques inflacionários. As mudanças nas expectativas se atrasam com relação às variações efetivas de preços por um tempo médio que é medido por $1/\beta_e$. A sua unidade é a mesma que a do tempo e indica a posição do centro de gravidade do padrão de pesos exponenciais.²² Na equação (27), o primeiro termo depois do sinal de igualdade é o fator de normalização, que é igual à soma infinita dos pesos naquela soma contida na equação.

Uma objeção ao uso do mecanismo de correção de erros das expectativas adaptativas é que ele pode implicar um grau de "irracionalidade" dos agentes econômicos, na medida em que eles não mudam seu método de formação de expectativas apesar de observarem erros sistemáticos nas projeções. Entretanto, como mostraram Sargent e Wallace (1973), expectativas adaptativas podem ser racionais no sentido de Muth (1961), se as expectativas com relação ao crescimento futuro da oferta de moeda são formadas sob a hipótese de que o governo está financiando uma parcela aproximadamente fixa de seus gastos reais através da criação de moeda. Na sua análise empírica, Sargent e Wallace (1973, p. 342, tradução minha) concluem: "Nossa explicação para a realimentação de X para m (inflação para moeda) tende a confirmar a sabedoria da decisão de Cagan no sentido de modelar as expectativas por uma extrapolação das taxas passadas de inflação. Este método de formação de expectativas parece ter sido racional." Por outro lado, Friedman (1978) argumentou que as hipóteses utilizadas por Sargent e Wallace eram equivalentes a exigir que a inflação seguisse um processo de passeio aleatório, com tendência nula e ruído, e concluiu que a evidência empírica revela que aquele processo estocástico não é plausível para descrever as hiperinflações que Cagan estudou.

Uma versão da especificação de Cagan sob expectativas racionais, sem impor expectativas adaptativas, mas com choques aleatórios na velocidade da moeda, é rejeitada formalmente em testes feitos para a hiperinflação alemã por Engsted (1993), o qual argumenta, entretanto, que existe um elemento de verdade no modelo, na medida em que os desvios com relação a ele são transitórios. Isto sugere que o efeito de abrandamento das expectativas adaptativas pode estar em operação, apesar de as expectativas não serem racionais. Taylor (1991, p.338) também interpreta seus resultados como sendo de rejeição do modelo de expectativas racionais para a hiperinflação, para os casos estudados por Cagan. Entretanto, o modelo é suportado em vários casos quando, mesmo sem exigir expectativas racionais, ele atende apenas à propriedade de que os erros de projeção são estacionários, que é satisfeita por expectativas adaptativas se o processo para a taxa

22 Se os dados forem em bases mensais, $1/\beta$ mede a defasagem média, em meses. Por exemplo, se $\beta = 0,2$, a amplitude média do padrão de pesos é de cinco meses, isto é, a soma dos pesos normalizados entre os períodos $t-5$ e t é igual a 0,5. Além disto, naquele caso, aproximadamente 90% do peso estão contidos nos últimos 12 meses.

de inflação é integrado de primeira ordem. Portanto, estes estudos sugerem que a hipótese de expectativas adaptativas — mas não necessariamente racionais — pode ser razoável para modelos de demanda por moeda sob inflação elevada.

Expectativas racionais são equivalentes, no caso determinístico, à previsão perfeita míope. Neste caso, as taxas de inflação efetiva e esperada são iguais e se evitam os erros sistemáticos de projeção. Previsão perfeita pode ser vista como um caso especial da hipótese de expectativas adaptativas, como se verifica tomando o limite na equação (27) quando β_e aumenta. Portanto, não se perde muito considerando que as expectativas são adaptativas, estimando em seguida o intervalo de confiança para β_e , testando finalmente a hipótese de previsão perfeita examinando se ele inclui valores elevados²³ para β_e . Além disto, do ponto de vista empírico, provavelmente o desempenho da equação da demanda por moeda não será melhorado admitindo que a variável relevante é a inflação verificada. O seu uso pode reduzir o seu poder explicativo, quando comparado à formulação com expectativas adaptativas, porque se perde um grau de liberdade supondo *ex-ante* que β_e é grande.

Testes para avaliar a *performance* relativa de expectativas racionais e adaptativas em modelos de valor presente feitos por Chow (1989) também mostraram que aqueles com expectativas adaptativas se ajustavam melhor aos seus dados. Ele também ilustra o fato bem conhecido de que impor incorretamente a propriedade de expectativas racionais a um modelo que de outro modo estaria correto pode levar a estimativas insatisfatórias de parâmetros importantes e argumenta, em conclusão, que expectativas adaptativas podem ser uma hipótese de trabalho útil na prática econométrica. Aqui, sigo o seu conselho e não imponho racionalidade ao modelo de expectativas adaptativas para a demanda por saldos reais de moeda.

Outra linha de raciocínio que pode ser perseguida é aceitar modelos que não atendem ao requisito de expectativas racionais, mas adotam um mecanismo de expectativas adaptativas melhorado. Evans e Yarrow (1981) estendem a regra de ajustamento do modelo básico para incluir um termo de segunda ordem a fim de corrigir o erro na estimativa da derivada no tempo da taxa de inflação. Eles alegam que com o seu mecanismo de correção de erros existem equilíbrios estáveis e que eles têm propriedades de estática comparativa “normais”, em contraposição ao equilíbrio de expectativas racionais com previsão perfeita, que no seu modelo tem um comportamento “perverso”. Frankel (1975) propõe um modelo em que se considera que os agentes formam expectativas sobre toda a trajetória do nível de preços (e, portanto, sobre a taxa média de inflação no longo prazo), assim como sobre a taxa de inflação no curto prazo, e argumenta que ele produz um comportamento de curto prazo mais consistente com a evidência. O argumento, entretanto, não é empírico, mas sim baseado em simulações da resposta dinâmica do modelo a choques. Para justificar seu tratamento das expectativas, ele argumenta que, quando a informação é custosa, pode ser “racional” para os agentes usar

23 Empiricamente, se os dados são mensais, um valor igual a cinco para o parâmetro de expectativas implica uma amplitude média do padrão de pesos de 0,5 mês e uma concentração de 99% do peso no valor para o período t .

um mecanismo relativamente simples para formar expectativas, ao invés de tentar computar (a um custo elevado) trajetórias de expectativas racionais. Para qualquer dos dois modelos anteriores, torna-se uma questão empírica determinar se uma destas formulações mais elaboradas das expectativas adaptativas se ajustaria melhor aos dados. Por outro lado, meramente melhorar a hipótese de expectativas adaptativas para forçar a taxa de inflação esperada acompanhar mais de perto a taxa de inflação verificada pode não levar a uma equação com melhor ajustamento, porque no limite teríamos a hipótese de previsão perfeita que, como já foi visto, não leva a um modelo superior.

Aqui, uso um enfoque similar ao anterior, estendendo o modelo com expectativas adaptativas para permitir que ele trate a incerteza produzida pela variabilidade da inflação de modo mais preciso. Entretanto, a natureza da extensão é de certo modo diferente, pois ao invés de alterar o mecanismo de expectativas para melhorá-lo, mantendo o valor esperado da inflação como a única ligação com a demanda por moeda, o risco implícito no uso de projeções de inflação obtidas da hipótese de expectativas adaptativas é explicitamente levado em conta na especificação da equação da demanda por moeda. Para atingir este objetivo, é natural que se inclua nela um termo proporcional ao erro quadrático esperado ao projetar a inflação de modo adaptativo, e que ele também seja estimado de modo adaptativo a partir dos erros observados no passado.

Como a estratégia descrita no último parágrafo é equivalente a incluir a variância da inflação na equação de demanda por moeda,²⁴ chegamos, através de uma rota diferente, ao mesmo resultado derivado na Seção 2, isto é, que uma estimativa da variância do processo estocástico dos preços deve ser incluída na equação de demanda por moeda. Como o valor de σ^2 não é conhecido *ex-ante* e pode variar com o tempo, ele pode ser estimado em cada ponto do tempo com base nos desvios quadráticos passados da taxa verificada de crescimento dos preços (dP/P) do seu valor esperado (π), ao invés da diferença com relação à média de todo o período, como seria o caso de um processo estacionário. Se admitirmos que a formação de expectativas em relação ao valor da variância é também adaptativa, por consistência com a formação de expectativas em relação à própria taxa de inflação, e considerando a possibilidade de que neste caso o parâmetro para a formação de expectativas possa ser diferente (β_v), a expressão na equação (28) é obtida:

$$V_t(\beta_e, \beta_v) = \frac{1 - \exp(-\beta_v)}{\exp(\beta_v t)} \sum_{x=-T}^t (C_x - E_x)^2 \exp(\beta_v x) \quad \beta_d \geq 0 \quad (28)$$

24 Ao usar esta variável na equação, entretanto, é útil estar ciente do fato estilizado notado por Barro (1970): a variância da taxa de inflação geralmente aumenta com o nível da inflação. O efeito direto de um aumento da inflação esperada é reduzir os saldos monetários reais, mas um efeito indireto pode também ocorrer, devido ao efeito do nível da inflação na sua variância. Este segundo efeito, entretanto, não é levado em conta aqui, pois se admite que as variáveis explanatórias são independentes.

Na aplicação empírica do modelo desenvolvido nas Seções 4 e 5 foi considerado que o parâmetro para a formação de expectativas para a inflação (β_e) e o parâmetro para a variância da inflação (β_v) são iguais — e representados por β_i —, pois não parece existir uma razão convincente para esperar que estes dois parâmetros sejam significativamente diferentes entre si nestes casos. Esta é uma hipótese que aumenta a estabilidade da rotina não-linear utilizada para ajustar o modelo e não viesia a estimação, como se verificou deixando estes parâmetros diferirem em algumas rodadas de teste.

É importante notar que E_t é uma estimativa do valor esperado da tendência do processo estocástico para $\log(P)$, que é igual a $\pi - \sigma^2/2$, como se pode verificar facilmente aplicando o lema de Itô ao processo de Wiener da equação (1). Portanto, a estimativa de π , que é o termo que aparece na equação de demanda (11), pode ser obtida adicionando a E_t metade da estimativa da variância ($V_t/2$), como especificado na equação (30). A estimativa de σ^2 pode ser obtida da diferença quadrática do processo para o logaritmo dos preços (V_t), como na equação (28), porque sua variância é igual àquela do processo incremental dos preços.

3.2 - Outras variáveis explicativas

A equação (30) generaliza o modelo de Cagan incluindo o produto esperado e a taxa real de juros como variáveis explicativas para captar os efeitos do setor real da economia. Eles são importantes nos episódios de inflação elevada porque estes processos tendem a perdurar por vários anos, invalidando a hipótese usualmente feita nos estudos das hiperinflações de que estes efeitos são desprezíveis, devido ao período de tempo envolvido e ao tamanho do impacto dos outros fatores.

O produto esperado é medido como uma média ponderada de índices de renda passados, com pesos declinando exponencialmente, seguindo uma sugestão feita em primeiro lugar por Friedman (1956, p. 19) com relação à especificação da demanda por moeda.²⁵ Isto é mostrado na equação (29), onde I_x é o índice de produto real verificado no período x :

$$Y_t(\beta_y) = \frac{1 - \exp(-\beta_y)}{\exp(\beta_y t)} \sum_{x=-T}^t I_x \exp(\beta_y x) \quad \beta_y \geq 0 \quad (29)$$

²⁵ O autor também usou este índice de renda, entre outros, como uma medida da renda permanente no seu estudo da função consumo [ver Friedman (1957, p. 142)].

A taxa de juros real aparece na especificação empírica, como indicado na equação (11). Isto ocorre em contraste com outros estudos de demanda por moeda sob inflação elevada que usam a taxa de juros nominal para representar o retorno nos ativos alternativos.²⁶ Apenas uma taxa de juros é listada em (30) por simplicidade, mas em geral dever-se-ia incluir o retorno real em cada ativo alternativo no qual a riqueza pode ser mantida. Por último, mas não menos importante, o uso da taxa real de juros tem a vantagem de evitar a multicolinearidade da taxa nominal de juros com a taxa de inflação.

Para resumir, a equação (30) sintetiza a especificação geral da equação de demanda por moeda que tem as características derivadas nas Seções 2 e 3. Nela as variáveis, datadas através do subscrito t , são representadas por letras maiúsculas, os parâmetros por letras gregas, e ϵ é o erro:

$$\begin{aligned} \Phi(M_t/P_t, \lambda) = & \Gamma + \alpha_\pi (E_t(\beta_e) + V_t(\beta_e, \beta_v)/2) + \alpha_v V_t(\beta_e, \beta_v) + \\ & + \alpha_r R_t + \alpha_y Y_t(\beta_y) + \alpha_s S_t + \alpha_t t + \epsilon_t \end{aligned} \quad (30)$$

No estudo das hiperinflações tem sido sugerido que a taxa de câmbio pode representar um papel importante na demanda por moeda naqueles episódios. A equação (30) poderia incluir o prêmio para liquidação futura do contrato de câmbio, como uma variável explicativa adicional, para medir a importância da moeda estrangeira como um substituto da moeda doméstica,²⁷ como sugerido por Abel *et alii* (1979). Alternativamente, a taxa de retorno real na retenção de moeda estrangeira poderia ser usada, como recomendado pela prática padrão de incluir na equação o retorno em todos os ativos alternativos. Entretanto, se a taxa de câmbio for incluída em termos nominais, será necessário cuidado para controlar uma possível multicolinearidade com a taxa de inflação esperada. É uma questão empírica verificar se a variável taxa de câmbio será significativa em um dado processo de alta inflação, na presença das outras variáveis da equação (30).

Uma tendência temporal também faz parte da especificação sugerida porque o episódio de inflação elevada pode durar vários anos, e é necessário captar o efeito na demanda por saldos reais de moeda do progresso técnico representado pelo uso generalizado de computadores e de transações eletrônicas. Evidentemente, aplicam-se neste caso os cuidados usuais, necessários quando da utilização de uma tendência temporal para modelar estes efeitos. Finalmente, a equação também inclui uma variável para levar em conta os fatores sazonais (S_t) que possam estar presentes.

26 Se a hipótese de Fischer for verdadeira, o uso da soma da taxa de juros real com a taxa de inflação como variável explicativa na equação pode ser racionalizado na especificação empírica convencional como sendo aproximadamente equivalente à inclusão da taxa nominal de juros na equação. Phylaktis e Blake (1993) encontram evidências fortes em favor da validade daquela hipótese para três países latino-americanos que sofreram episódios de alta inflação, o que é um fato que poderia suportar esta equivalência na aplicação do modelo ao Brasil, na Seção 5.

27 O prêmio nas operações com moeda estrangeira para liquidação futura pode também ser usado como uma medida indireta da inflação esperada, como proposto por Frankel (1977 e 1979).

As principais implicações empíricas deste artigo podem ser resumidas nas seguintes sugestões relativas ao uso da estrutura proposta por Cagan para modelar a demanda por saldos reais de moeda em processos de inflação elevada: *a)* o funcional linear da transformada Box-Cox deveria ser utilizado, ao invés da forma log-linear; *b)* a hipótese de expectativas adaptativas para a taxa de inflação deveria ser preservada, evitando o uso da taxa de inflação verificada diretamente na equação; *c)* a variância da taxa de inflação, estimada de modo adaptativo a partir dos desvios quadráticos da taxa de inflação esperada da verificada, deve ser incluída como uma variável explicativa; e *d)* a taxa de retorno nos ativos alternativos deve também ser incluída e medida em termos reais. Adicionalmente a estas observações de natureza geral, três implicações empíricas testáveis — derivadas da equação (11) — podem ser obtidas do modelo da Seção 2, as quais se referem aos parâmetros da equação (30) e são resumidas nas equações (31) e (32) a seguir:

$$\lambda = -1 \quad (31)$$

$$\alpha_{\pi} = -\alpha_v = \alpha_r = \frac{-1}{\kappa} \quad (32)$$

Nas próximas duas seções, a *performance* do modelo discutido anteriormente é avaliada aplicando-o, respectivamente, aos dados da hiperinflação alemã e à análise do episódio de inflação elevada que ocorreu no Brasil nas duas últimas décadas.

4 - A demanda por moeda na hiperinflação alemã

O modelo das Seções 2 e 3 foi desenvolvido com base em várias considerações, algumas das quais relativas ao comportamento da demanda por saldos reais de moeda nas hiperinflações. Um teste natural dele é, portanto, estimá-lo para os dados da hiperinflação alemã²⁸ de 1923, utilizando a inflação esperada e o risco inflacionário como as únicas variáveis explicativas, para verificar se ele tem um desempenho significativamente melhor que o do modelo proposto por Cagan.²⁹ Isto é feito nas seguintes seções, em dois estágios: o primeiro avalia a melhora produzida pela utilização de uma forma funcional mais flexível, enquanto o segundo mostra o impacto de incluir a variável que mede o risco inflacionário.

28 Os dados originais são de Cagan (1956), e as variáveis transformadas foram definidas na última seção.

29 O modelo foi também testado para as outras hiperinflações analisadas por Cagan (1956), mas os resultados não são reportados aqui por falta de espaço.

4.1 - Equações sem a variável de risco inflacionário

Para isolar os benefícios de utilizar a forma funcional Box-Cox, o modelo foi estimado sem incluir a variância da inflação como uma das variáveis explicativas.³⁰ Os coeficientes de quatro equações, que diferem com relação ao período da amostra, são mostrados na Tabela 1: a equação G1 usa o mesmo período utilizado por Cagan (setembro de 1920 a julho de 1923), enquanto as equações G2, G3 e G4 excluem da amostra as observações para as quais a taxa de inflação era pequena, e até negativa (de setembro de 1920 a agosto de 1921). As equações G2 e G3 diferem quanto à data terminal da amostra: a primeira delas usa a mesma de Cagan, enquanto a segunda estende a amostra até o último mês completo da hiperinflação, incluindo na amostra as observações que foram excluídas por Cagan porque sua equação não se ajustava bem a elas, como descrito anteriormente. A equação G4 é mostrada apenas para comparação, pois ela utiliza a formulação log-linear para o período estendido até outubro de 1923, e mostra a natureza da dificuldade encontrada por Cagan para ajustar o modelo às observações nos períodos próximos ao final da hiperinflação.

Todas as equações foram estimadas com o procedimento descrito no Apêndice A e corrigidas para heterocedasticidade e autocorrelação dos resíduos. A única exceção é G4, que não foi ajustada para a correlação serial porque o procedimento Cochrane-Orcutt não produziu resultados satisfatórios. Os saldos reais de moeda foram normalizados de tal modo que para a média geométrica do período 1920:8/1923:7 seja igual à unidade, enquanto a taxa de inflação é normalizada de tal modo que seja igual à unidade para a média aritmética do período 1921:8/1923:11.

Na equação G1 a estimativa pontual do parâmetro de forma da função Box-Cox ($\lambda = -0,2$) é muito similar ao valor admitido implicitamente por Cagan, e o valor nulo para λ — que corresponde à forma funcional logarítmica — pertence ao intervalo de confiança de 95% para aquele parâmetro. Caso não detalhássemos mais a análise, isto pareceria mostrar que ele estava correto ao assumir *ex-ante* a forma funcional log-linear. Adicionalmente, os valores do parâmetro para a formação de expectativas ($\beta = 0,20$) e para a semi-elasticidade da demanda por moeda com relação à inflação ($\alpha_\pi = -5,3$) coincidem quase exatamente com aqueles que ele obteve.

Entretanto, excluindo da amostra as observações anteriores a agosto de 1921 e estimando a equação G2, surge um valor bastante diferente para o parâmetro de forma: $\lambda = -0,7$. O intervalo de confiança para aquele parâmetro mostra que a formulação logarítmica pode ser rejeitada e que a forma funcional inversa da equação (11) não pode ser rejeitada, ambas ao nível de significância de 5%.

Não está clara a razão que induziu Cagan a incluir estes dados na sua amostra, pois não se esperaria que uma teoria de demanda por moeda em hiperinflações pudesse ser capaz de explicar a demanda por saldos reais de moeda em períodos de inflação muito

³⁰ Naturalmente, na medida em que a especificação correta do modelo inclui a variância da inflação, as equações da Tabela 1 estão sujeitas à crítica devido à omissão de uma variável relevante.

TABELA 1

Estimativas da demanda por saldos reais de moeda na hiperinflação alemã^a

(Equações sem a variável de risco inflacionário)

Código da equação	G1	G2	G3	G4
Data inicial	1920:9	1921:9	1921:9	1921:8
Data final	1923:7	1923:7	1923:10	1923:10
Graus de liberdade	31	20	23	23
R^2	0,9978	0,9876	0,9464	0,8740
Soma quadrática dos resíduos	0,6867	0,7483	5,6775	11,7677
Erro padrão da estimativa	0,1488	0,1934	0,4968	0,6860
Durbin-Watson	1,1848	1,6999	1,4304	0,2683
Parâmetro da forma funcional	-0,2	-0,7	-0,6	0
Box-Cox (λ)	(-0,42, -0,04)	(-1,16, -0,35)	(-1,13, -0,32)	(predeterminado) ^b
Parâmetro para a formação de expectativas adaptativas (β)	0,198 (0,167, 0,231)	0,249 (0,215, 0,285)	0,150 (0,089, 0,215)	0,061 (-0,036, 0,168) ^c
Intercepto (Γ)	0,834 (0,054)	1,085 (0,071)	0,994 (0,131)	1,183 (0,089) ^c
Coefficiente da tendência do processo para os preços (π)	-5,269 (0,310)	-4,375 (0,245)	-4,336 (0,421)	-6,180 (0,543) ^c
Coefficiente de correlação dos resíduos (ρ)	0,923 (0,061)	0,632 (0,199)	0,535 (0,269)	- -

^aOs valores entre parênteses abaixo das estimativas dos coeficientes de Γ e π são os desvios padrões do respectivo parâmetro. O par de valores abaixo da estimativa de β é o seu intervalo de confiança de 95%. As estimativas para todos os parâmetros, e seus intervalos de confiança e erros padrões, são condicionais em λ . O valor para λ e para seu intervalo de confiança são estimativas irrestritas de máxima verossimilhança. Todas as equações, exceto G4, foram estimadas com correções para heteroceticidade e correlação serial dos resíduos, para produzir estimativas não viesadas dos desvios padrões e dos intervalos de confiança. As estatísticas para o ajustamento da equação na parte superior da tabela referem-se à equação corrigida. Ver o Apêndice A para os detalhes sobre o procedimento de estimação.

^bA forma funcional desta equação foi restrita a ser long-linear, para reproduzir o modelo de Cagan.

^cOs intervalos de confiança estimados e os desvios padrões destes coeficientes são provavelmente viesados, devido à alta autocorrelação dos resíduos, que o procedimento Cochrane-Orcutt foi incapaz de corrigir.

baixa, sem possivelmente introduzir distorções na estimação. A exclusão destas observações da amostra é importante porque elas parecem viesar a estimação da forma funcional em favor da formulação log-linear, e este fato tem implicações importantes para a maneira como os saldos reais de moeda respondem a aumentos de taxa de inflação, como foi discutido na Subseção 2.2.

Na equação G2 o parâmetro para a formação de expectativas é maior ($\beta = 0,25$), e o valor do coeficiente para a inflação esperada é, em valor absoluto, 20% menor do que aquele encontrado na equação G1. O desvio padrão e o intervalo de confiança para os parâmetros são mais estreitos do que os de Cagan, o que é uma indicação de que a forma funcional mais flexível permitiu uma identificação mais nítida dos parâmetros. Adicionalmente, as estatísticas Cochrane-Orcutt e Box-Pierce não indicam rejeição da hipótese de ausência de autocorrelação dos resíduos ao nível de 5%, contrariamente à equação de Cagan, que apresenta forte correlação serial dos resíduos, fato que já havia sido notado por Barro (1970).

A elasticidade dos saldos monetários à taxa de inflação que caracteriza o início da hiperinflação ($\pi = 0,5$) pode ser calculada dos coeficientes de G2 utilizando a equação (20), e é igual a $-1,27$, que é menos da metade de $-3,18$, valor produzido pelo modelo log-linear da equação G4 para a mesma taxa de inflação. Dos coeficientes da equação G2, usando (22), é simples calcular que a taxa mensal de inflação, com capitalização contínua, para a maximização da receita do imposto inflacionário³¹ é igual a $\pi^* = 14\%$. Portanto, olhando apenas para a estimativa pontual, pareceria que o modelo não explica a divergência entre a taxa ótima e as taxas efetivas observada por Cagan,³² quando comparando sua taxa ótima de 18% com a taxa média no período da hiperinflação, que é igual a 322%. Entretanto, esta diferença pode ser colocada sob melhor perspectiva levando-se em consideração o fato de que a taxa ótima aumenta muito rapidamente quando o parâmetro de forma se aproxima de -1 , como ilustrado no Gráfico 4. Isto coloca uma importante dificuldade para se estimar a taxa ótima de inflação para o financiamento inflacionário com um grau razoável de precisão, em situações como da equação G2, em que o intervalo de confiança para λ inclui um conjunto de valores na vizinhança de -1 . Neste caso, a taxa ótima de inflação poderá ser muito mais alta do que aquela calculada a partir da estimativa pontual do parâmetro de forma, se o valor verdadeiro for menor do que o estimado. Nesta situação, a única afirmação que se pode fazer de modo preciso é

31 O fato de que a taxa ótima de inflação é menor do que na equação G2, onde $\lambda = -0,7$, quando comparada ao valor calculado por Cagan (para $\lambda = 0$), não é inconsistente com as derivações da Subseção 2.2 porque há outros parâmetros que foram considerados constantes, o que não é o caso aqui.

32 A taxa ótima constante de inflação para a arrecadação máxima do imposto inflacionário pode também ser comparada com a taxa média mensal de inflação para o período no qual a equação é estimada, que é igual a 23,2%. Neste caso, a diferença entre a taxa ótima de inflação e a taxa efetiva não é tão grande quanto aquela no texto. A discussão de qual seja o parâmetro relevante para a comparação se centra em dois aspectos: a) o que se considera com relação à ocasião em que começa a prática de financiamento inflacionário: quando a inflação começou a aumentar, ou apenas depois que a hiperinflação se estabeleceu; e b) o que se admite com relação à ocasião do fim do período no qual a taxa de inflação é racionalmente determinada pela tentativa de coletar senhorigem: até o fim do período amostral para o qual a equação de demanda por moeda é válida, ou até o fim do processo hiperinflacionário. Se a primeira alternativa é tomada como sendo a resposta a estas duas perguntas, e julho de 1923 é tomado como sendo a data final do período amostral, a divergência entre a taxa ótima e a taxa média de inflação é pequena.

que a hipótese de que a taxa ótima de inflação é de fato infinitamente elevada não pode ser rejeitada ao nível de 5% de significância.

Quando o modelo é estimado para o período que se estende até outubro de 1923 (equação G3), pode-se ver que a estimativa do parâmetro de forma é estável, pois sua estimativa pontual e seu intervalo de confiança são quase idênticos àqueles obtidos na equação G2. Além disto, o valor estimado para o coeficiente α é o mesmo nestas duas equações, o que demonstra que o retorno de conveniência da moeda (κ) é também estável. Há algumas diferenças nas estimativas de β , que decresce de 0,25 para 0,15, fato que pode ser uma reflexão de alguns dos outros problemas de especificação que levaram Cagan a terminar seu período de estimação em julho de 1923. Finalmente, pode-se notar que o erro padrão da equação G3 é significativamente maior que o da equação G2, o que sugere que a forma funcional flexível não é suficiente para explicar completamente a *performance* pobre da equação de Cagan próximo ao fim da hiperinflação alemã. Entretanto, a comparação das equações G3 e G4 mostra que ela foi bastante útil para reduzir o erro de especificação de sua equação.

4.2 - O modelo com a variável para o risco inflacionário

O segundo passo para a avaliação do modelo apresentado aqui é incluir a variância da taxa de inflação como uma variável explicativa. O teste de sua significância indicará se sua omissão foi uma importante falha na formulação de Cagan. As equações G5 e G6 da Tabela 2 mostram os resultados deste exercício para períodos amostrais começando em 1921:8 e terminando, respectivamente, em 1923:7 e 1923:10.³³ A amostra para a equação G7, que começa em 1922:8 e termina em 1923:7, visa avaliar o efeito de restringir a estimação à hiperinflação propriamente dita, evitando ao mesmo tempo as distorções que podem ser introduzidas pela consideração dos dados no final do processo.

Todas as equações foram estimadas com o procedimento descrito no Apêndice A e são corrigidas para heterocedasticidade e autocorrelação dos resíduos. A única exceção é G7, em que o ajustamento para correlação serial não foi necessário. Os saldos reais e a taxa de inflação foram normalizados do mesmo modo que na última seção.

A interpretação do valor estimado para o parâmetro de forma (λ) depende do que é considerado com relação ao comportamento do retorno de conveniência da moeda (κ) à medida que a hiperinflação se desenvolve. Há duas possibilidades, como discutido no contexto da equação (20): ou ele é constante, ou decresce quando a inflação aumenta. Estas possibilidades são analisadas em seguida.

³³ Como foi destacado na última seção, é prudente evitar que se comece o período amostral na data inicial utilizada por Cagan, devido ao viés que isto pode introduzir na estimação do parâmetro de forma da equação de demanda por moeda do tipo Box-Cox.

TABELA 2

Estimativas da demanda por saldos reais de moeda na hiperinflação alemã^a

(Equações com a variável de risco inflacionário)

Código da equação	G5	G6	G7
Data inicial	1921:9	1921:9	1922:8
Data final	1923:7	1923:10	1923:7
Graus de liberdade	19	22	9
R^2	0,9937	0,9857	0,9797
Soma dos resíduos quadráticos	0,3740	1,1286	0,1277
Erro padrão da estimativa	0,1403	0,2265	0,1191
Durbin-Watson	1,7232	1,6009	2,0231
Parâmetro da forma funcional	-0,5	-0,2	-0,8
Box-Cox(λ)	(-0,79, -0,18)	(-0,49, +0,10)	(-1,76, +0,10)
Parâmetro para a formação de expectativas adaptativas (β)	0,191 (0,164, 0,219)	0,160 (0,129, 0,192)	0,263 (0,232, 0,294)
Intercepto (Γ)	1,158 (0,071)	1,184 (0,109)	1,397 (0,095)
Coefficiente da tendência do processo para os preços (π)	-5,519 (0,358)	-5,103 (0,473)	-5,433 (0,218)
Coefficiente da variância da inflação (σ^2)	6,252 (1,199)	4,632 (0,549)	4,091 (0,573)
Coefficiente de correlação dos resíduos (ρ)	0,753 (0,185)	0,717 (0,159)	-

^aOs valores entre parênteses abaixo das estimativas dos coeficientes de Γ , π e σ são os desvios padrões do respectivo parâmetro. O par de valores abaixo da estimativa de β é o seu intervalo de confiança de 95%. As estimativas para todos os parâmetros, e seus intervalos de confiança e erros padrões, são *condicionais* em λ . O valor para λ e para seu intervalo de confiança são estimativas irrestritas de máxima verossimilhança. Todas as equações, exceto G7, foram estimadas com correções para heterocedasticidade e correlação serial dos resíduos, para produzir estimativas não viesadas dos desvios padrões e dos intervalos de confiança. As estatísticas para o ajustamento da equação na parte superior da tabela referem-se à equação corrigida. Ver o Apêndice A para os detalhes sobre a estimação.

No primeiro caso (κ constante), é possível testar a hipótese de que a forma funcional verdadeira da demanda por saldos reais de moeda é a especificação log-linear de Cagan ou a função inversa da Seção 2, testando (respectivamente) para $\lambda = 0$ e $\lambda = -1$. Para o período 1921:9/1923:7 (equação G5), o valor estimado de λ é $-0,5$, que é similar a $-0,7$, valor encontrado na equação G2. Agora, entretanto, com a variância da inflação na equação, as hipóteses de que a forma funcional é o logaritmo ou a função inversa podem ambas ser rejeitadas ao nível de 5% de significância.

Para a amostra que inclui apenas as observações para a hiperinflação (equação G7), o valor estimado do parâmetro de forma é $-0,8$, e nenhuma das duas formas funcionais extremas pode ser rejeitada ao nível de 5%, devido ao intervalo de confiança muito largo. Ao nível de 10%, entretanto, a hipótese de que $\lambda = 0$ pode ser rejeitada, mas não $\lambda = -1$, mesmo ao nível de confiança de 25%. Isto revela que para esta última equação a função inversa é provavelmente muito próxima da forma funcional verdadeira.

É também fácil calcular a partir de (20) que o valor limite para a elasticidade dos saldos reais de moeda (ϕ) quando a taxa de inflação aumenta sem limite é igual a $-1,25$ e $-2,0$ em G7 e G5, respectivamente, que parecem muito mais razoáveis do que o valor $-\infty$ implícito na especificação log-linear.

Na equação G6, em que a amostra vai de 1921:9 a 1923:10 e, portanto, inclui as observações excluídas por Cagan, a forma estimada da função de demanda por moeda se aproxima da função logarítmica ($\lambda = -0,2$) e se afasta significativamente daquela encontrada na equação ($\lambda = -0,6$) para o mesmo período. Se o parâmetro da função que descreve a conveniência da moeda (κ) é constante, a hipótese de que a forma funcional é a função inversa pode ser rejeitada, mas a hipótese de que ela é logarítmica não pode. Deve ser destacado que a inclusão da variância da inflação melhora significativamente a equação G3, pois a equação G6 se ajusta aos dados muito melhor. Agora considere-se a segunda possibilidade³⁴ para a interpretação do valor estimado para λ em G6, que é admitir que a função de demanda tem a forma funcional inversa e, ao mesmo tempo, permitir que o parâmetro da função de conveniência da moeda (κ) decresça à medida que a taxa de inflação explode ao final da hiperinflação. Se a estimativa do parâmetro de forma é dominada pelo comportamento de ζ (a elasticidade de κ com relação à inflação às taxas de inflação muito altas do final da hiperinflação), então pela equação (21) o valor estimado de λ em G6 implicaria $\zeta = -4,0$. Isto poderia explicar o aumento no valor estimado de λ na equação G6, quando a amostra é estendida além de 1923:7, de modo compatível com a hipótese de que a verdadeira forma funcional é dada pelo parâmetro encontrado nas equações anteriores (aproximadamente $-0,7$).

34 O valor estimado para o parâmetro de expectativas na equação G6, que é relativamente baixo, sugere uma terceira possível explicação para o baixo valor absoluto de λ obtido para aquela equação: o erro quadrático esperado na taxa de inflação projetada, que estima a variância no modelo, pode também estar corrigindo para a redução do valor estimado para o parâmetro de expectativas que se observa quando as equações G2 e G3, ou G5 e G6, são comparadas. Infelizmente, esta interação peculiar pode distorcer a estimativa de λ para este período amostral, o que revela que seu valor em G6 deve ser visto com algumas reservas.

O valor estimado para o parâmetro de expectativas (β) decresce de cinco meses em G5 para quatro em G7, refletindo o padrão já observado e explicado por Cagan (1956, p. 58-63), quando examinou as hiperinflações clássicas: a defasagem média nas expectativas diminui quando o nível médio de inflação aumenta. Esta maior sensibilidade das expectativas aos choques, quando a inflação aumenta, acontece porque o custo para os agentes de não ajustar suas expectativas suficientemente rápido cresce velozmente à medida que o processo inflacionário acelera e isto induz os agentes a reduzir sua defasagem média nas expectativas. O limite superior para os intervalos de confiança para β nas equações G5 e G7 é 0,26, o que mostra claramente que a inflação corrente não pode substituir a inflação esperada na equação de demanda por moeda, pois a igualdade aproximada destas duas taxas somente ocorreria para valores do parâmetro de expectativas da ordem de 10. Isto também sugere que a utilização da hipótese de expectativas adaptativas para modelar este episódio hiperinflacionário foi justificada.

Os coeficientes estimados para a parte linear das equações da Tabela 2 são todos diferentes de zero ao nível de significância de 5%, o que mostra que a omissão da variável que reflete o risco inflacionário pode ser um problema sério de especificação ao analisar os dados para a hiperinflação alemã. O valor absoluto dos coeficientes do valor esperado e o da variância da inflação são similares (ao redor de 5), e o sinal deste último é positivo, como esperado da discussão da Subseção 2.1. Além disto, a hipótese de que a soma dos coeficientes dos valores esperados para o nível e a variância da inflação é nula não pode ser rejeitada ao nível de 5% para nenhuma das equações.

Para resumir os resultados das Subseções 4.1 e 4.2, pode-se argumentar que, como um todo, eles mostraram que a especificação aqui proposta é capaz de se ajustar melhor aos dados da hiperinflação alemã do que aquela proposta por Cagan.³⁵ Vimos também que a hipótese da equação (31) é de certo modo satisfeita, enquanto a hipótese (32) é fortemente suportada, em geral oferecendo evidência em favor do modelo da equação (11), com $\kappa \cong 0,2$.

5 - A demanda por moeda no Brasil: 1974/92

A estratégia de modelagem aqui proposta foi também aplicada a dados brasileiros para o período que vai de janeiro de 1974 a novembro de 1992, quando a taxa de inflação mensal, capitalizada continuamente, variou de cerca de 3% até próximo de 60%. Naquele período houve, depois de 1986, cinco choques monetários e de rendas que causaram mudanças muito grandes na taxa de inflação em curtos espaços de tempo, gerando episódios de violenta aceleração e desaceleração de preços. A demanda real por moeda nos meses de inflação muito alta é cerca de 1/6 daquela nos períodos de baixa inflação (ver Gráfico 5).

³⁵ Esta comparação com o modelo de Cagan pode não ser inteiramente justa, pois o modelo proposto aqui tem uma variável explicativa a mais, e a forma funcional Bóx-Cox é mais geral e permite um grau de liberdade a mais do que a especificação log-linear.

A estimação de uma função de demanda por saldos monetários reais para o período completo especificado anteriormente acaba sendo um exercício desafiador, principalmente devido aos choques, pois não foi excluída da estimação nenhuma observação. A inclusão de um período de inflação relativamente baixa na estimação³⁶ exige que a equação tenha um bom desempenho naquelas situações e permite analisar as mudanças que ocorrem no comportamento dos agentes nas fases iniciais da hiperinflação. Por outro lado, os vários choques que ocorreram na parte final do período, apesar de ocasionarem dificuldades para o ajustamento da equação, tendem a trazer à tona as características essenciais da demanda por moeda nesta economia.

Modelos econométricos lineares da demanda por moeda para o Brasil que incluem dados após 1974, e que usam a taxa de inflação como uma das variáveis explicativas, podem ser encontrados nos seguintes estudos: Cardoso (1983) utiliza dados trimestrais para o período 1966-I/1979-IV, em um modelo log-log, e discute a importância relativa da taxa de juros nominal e da taxa de inflação para explicar a demanda por moeda; a inclusão dos saldos monetários defasados como uma variável explicativa na equação foi criticada por Gerlach e De Simone (1985), que estimam um modelo auto-regressivo de defasagens distribuídas com as mesmas variáveis, mas com fatores sazonais, e mostram que a taxa de inflação é estatisticamente mais significativa do que os juros nominais na sua equação, contrapondo-se aos resultados de Cardoso, e estimam em $-0,08$ a elasticidade de longo prazo dos saldos reais de moeda com relação à inflação; Darrat (1985), que também critica a especificação de Cardoso pela mesma razão, usa uma defasagem de Almon para o logaritmo de, respectivamente, renda, taxa de juros nominal e inflação, para resolver a aparente instabilidade da equação de Cardoso, e verifica que a taxa de inflação é a principal variável explicativa na sua equação de demanda, estimando em $-0,20$ a elasticidade de longo prazo correspondente; e Rossi (1988), que estende os dados e equações de Cardoso para o período 1980-I/1985-IV e argumenta que o deslocamento para baixo da equação ocorreu em torno de 1980, também usa a forma funcional log-log e conclui que a equação é instável após 1980. Nenhum destes modelos trata explicitamente do problema de formação de expectativas, ou usa formas funcionais alternativas além da especificação log-log, ou tenta incluir na equação uma variável para captar o risco inflacionário.

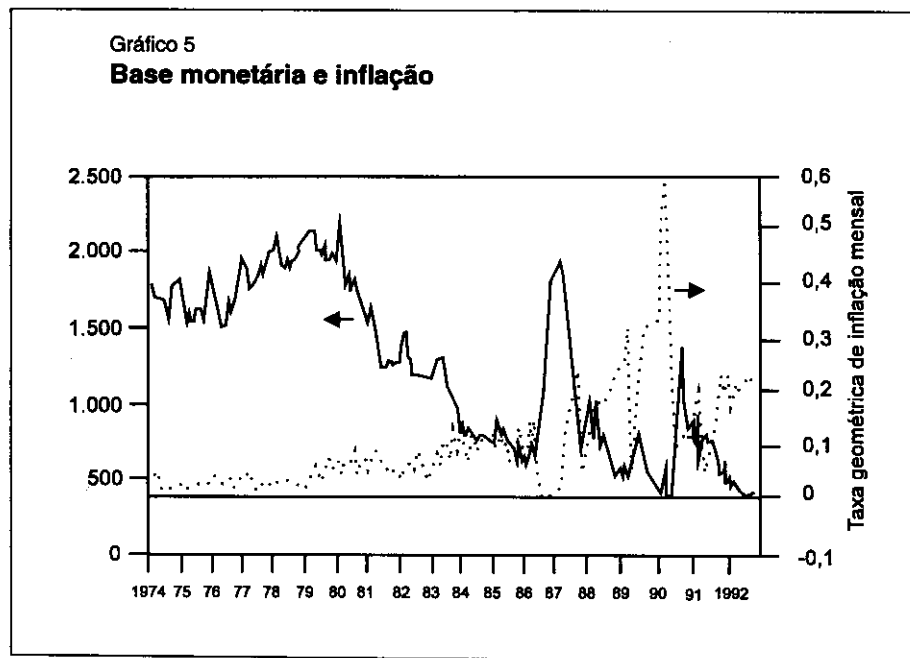
Rossi (1994), que aplica a metodologia proposta por Phylaktis e Taylor (1992) e por Engsted (1993) para testar a co-integração de moeda e preços, com dados mensais, para o período 1980-I/1993-12, é o único estudo a incluir na análise os choques impostos à economia para tentar a estabilização após 1985, e encontra co-integração para o período completo, mas não para nenhum dos subperíodos nos quais ele divide sua amostra. Na sua formulação log-linear, Rossi estima que a semi-elasticidade da demanda por moeda com relação à inflação se situa entre -5 e -8 para períodos de alta inflação e que é de cerca do dobro destes valores para períodos de inflação moderada.

36 De 1974 a 1983 a taxa de crescimento dos preços esteve abaixo de 10% ao mês.

5.1 - Estimação

Ao aplicar o modelo da Seção 3 para o Brasil, o ajustamento sazonal que se supõe necessário é a inclusão de uma variável *dummy* para os períodos correspondentes aos meses de dezembro, necessária devido aos picos observados na demanda por moeda em tais meses, e que são claramente visíveis no Gráfico 5. Esta demanda extraordinária provavelmente se deve sobretudo ao pagamento do décimo terceiro salário naquele mês. A variável *dummy* entra na equação (30) multiplicada pela taxa esperada de inflação, produzindo um deslocamento na inclinação da função naquele mês, ao invés de um deslocamento do intercepto. Isto reflete aproximadamente um aumento proporcional constante, ao invés de um aumento absoluto constante, da demanda por saldos reais de moeda em dezembro, que parece ser o resultado esperado do aumento nas rendas nominais que ocorre naquele mês. A tendência tecnológica é representada por uma variável de deslocamento no tempo igual ao número de meses entre a data inicial e o período t .

O modelo é estimado para o período 1974:2/1992:11 com os dados mensais que são apresentados no Apêndice B. No Gráfico 5 são mostrados os saldos reais de moeda e a taxa de inflação. Dois conceitos diferentes de moeda foram utilizados: a base monetária (BM), igual ao saldo líquido de moeda emitida mais reservas bancárias (no último dia do mês), e M1, que inclui o saldo dos depósitos bancários à vista (também no último dia do mês). Só são apresentados aqui os coeficientes estimados para o conceito mais restrito,



pois os resultados são similares para os dois agregados e as conclusões da análise empírica não dependem muito de qual conceito é preferido.³⁷

Os coeficientes para três equações, que diferem quanto ao período de estimação, são mostrados na Tabela 3: a equação B1 refere-se ao período completo, enquanto B2 e B3 referem-se, respectivamente, aos subperíodos antes e depois de 1985:1. Todas foram estimadas para avaliar a estabilidade estrutural do modelo e tentar identificar as mudanças de comportamento que podem ocorrer na rota para a hiperinflação. O primeiro subperíodo corresponde à fase inicial do episódio de inflação elevada, quando a taxa exponencial mensal estava abaixo de 12% (exceto por alguns meses em 1983), enquanto o segundo é o de inflação extrema, que começa com uma aceleração da inflação ao longo de 1985, que levou à primeira tentativa de estabilização em fevereiro de 1986. Cinco outras tentativas subseqüentes de estabilização também falharam.

5.2 - O formato da função de demanda por moeda e a formação de expectativas

Os valores estimados para λ nas equações B1, B2 e B3 são, respectivamente, $-0,9$, $-0,7$ e $-1,2$, o que demonstra que a forma da curva de demanda real por moeda é bastante similar àquela da função inversa ($\lambda = -1$), como se poderia esperar que fosse ocorrer, devido à natureza da equação (11). A condição (23), que resume as restrições teóricas sobre o valor do parâmetro de forma da transformada Box-Cox, é respeitada pela estimativa pontual de λ nas equações B1 e B2, mas não em B3, em que o limite inferior da inequação é violado. Neste último caso, entretanto, o intervalo de confiança estimado para λ ao nível de 95% inclui uma faixa de valores que satisfaz à restrição, o que revela que as várias hipóteses feitas na Subseção 2.2 para derivar aquela condição não podem ser rejeitadas ao nível de 5% para nenhuma das três equações. Os intervalos de confiança para λ também mostram que a hipótese de que a verdadeira forma funcional da curva de demanda por saldos reais de moeda é a função inversa não pode ser rejeitada para a equação B2, que corresponde à fase de baixa inflação,³⁸ enquanto a forma log-linear de Cagan ($\lambda = 0$) pode ser rejeitada em todas as três equações. Ao nível de 1% a forma log-linear pode ainda ser rejeitada, mas a forma funcional inversa não pode sê-la.

A análise precedente é estritamente válida apenas se κ , o parâmetro da função de retorno de conveniência da moeda da Seção 2, é constante. Entretanto, a comparação do coeficiente da taxa de inflação, que é igual a $-1/\kappa$ se a forma funcional verdadeira é a função inversa — equação (14) —, nas três equações mostra que o parâmetro do retorno de conveniência não varia significativamente à medida que a taxa de inflação mensal

37 O coeficiente de determinação das equações para M1 é marginalmente maior, mas elas também têm autocorrelação dos resíduos mais elevada e estatística de Durbin-Watson piores.

38 A baixa significância da variância da inflação na equação B2 não é inconsistente com o desenvolvimento da Seção 2 porque a equação (11), que mostra que ela deve ser uma variável significativa na demanda por saldos reais de moeda, foi derivada para taxas *elevadas* de inflação.

TABELA 3

Estimativas da demanda por saldos reais de moeda: 1974/92^a

Código da equação	B1	B2	B3
Data inicial	1974:3	1974:3	1985:2
Data final	1992:11	1985:1	1992:11
Observações	225	131	93
Graus de liberdade	217	123	85
R^2	0,9809	0,9892	0,9356
Soma dos resíduos quadráticos	16,5177	2,9765	15,4304
Erro padrão da estimativa	0,2759	0,1555	0,4261
Durbin-Watson	2,1973	2,0885	2,1027
Parâmetro da forma funcional	-0,9	-0,7	-1,2
Box-Cox (λ)	(-1,07, -0,74)	(-0,94, -0,46)	(-1,55, -0,76)
Parâmetro para a formação de expectativas para o nível e a variância da inflação (β)	0,180 (0,167, 0,192)	0,11 (0,080, 0,137)	0,20 (0,180, 0,227)
Parâmetro para a formação de expectativas para a renda (β_y)	0,057 (0,046, 0,067)	0,075 (0,048, 0,104)	0,043 (0,001, 0,092)
Intercepto (Γ)	-1,685 (0,239)	-0,986 (0,296)	-4,005 (0,9392)
Coefficiente da tendência do processo para os preços (π)	-0,975 (0,049)	-1,263 (0,219)	-1,100 (0,057)
Coefficiente da variância da inflação (σ^2)	1,102 (0,065)	0,897* (0,956)	1,214 (0,074)

(continua)

Código da equação	B1	B2	B3
Coefficiente da taxa de juros de curto prazo normalizada (R)	-0,127 (0,029)	-0,146 (0,032)	-0,111 (0,058)
Coefficiente do índice de renda real esperada normalizado (Y)	3,634 (0,373)	2,504 (0,439)	6,903 (1,301)
Coefficiente da tendência temporal normalizada (t)	-1,157 (0,133)	-0,545 (0,239)	-1,901 (0,357)
Coefficiente da variável <i>dummy</i> para os meses de dezembro (S^*E)	0,150 (0,015)	0,112 (0,016)	0,200 (0,031)
Coefficiente de correlação dos resíduos (ρ)	0,637 (0,053)	0,819 (0,054)	0,419 (0,097)

^aOs valores entre parênteses abaixo das estimativas de Γ e ρ e dos coeficientes de π , σ^2 , R , Y , t e S^*E são erros padrões. Todos os coeficientes são significativos ao nível de 5%, com exceção daquele marcado com *. O par de valores sob as estimativas de λ , β_x e β_y é o seu intervalo de confiança de 95%. As equações foram estimadas com correções para heterocedasticidade e correlação serial dos resíduos. As estatísticas para o ajustamento da equação na parte superior da tabela referem-se à equação corrigida. Ver Apêndice A para maiores detalhes sobre o procedimento de estimação.

média vai de 5,1 para 16,5% nas amostras das equações B2 e B3, respectivamente. Isto é uma indicação da constância aproximada daquele parâmetro que, acoplado ao fato de que $\lambda = -1$ é suportado para todo o período e também para o período de inflação extrema, sugere que a forma funcional inversa da equação (11) é de fato a verdadeira, ou que elas são muito similares.

A estimativa do parâmetro para a formação de expectativas para o nível e para a variância da inflação (β_i), para a amostra completa, é igual a 0,18, implicando que os valores esperados são defasados com relação aos observados por uma média de 5,5 meses. Isto é apenas o valor médio da defasagem para toda a amostra, pois há evidência de que ele é maior quando a inflação é relativamente baixa e decresce quando ela acelera. Isto pode ser mostrado notando que a estimativa do parâmetro de expectativas para a fase inicial do processo é igual a 0,11, enquanto para a fase de inflação extrema é igual a 0,20. O aumento de β_i reflete a redução da defasagem média na formação de expectativas de nove meses para cinco, que ocorre em resposta ao aumento no nível médio de inflação

associado ao segundo subperíodo. Este é o mesmo efeito que aconteceu na hiperinflação alemã, como foi destacado na Subseção 4.2, e foi primeiro identificado por Cagan (1956).

Os intervalos de confiança para β_1 são razoavelmente estreitos em volta da estimativa pontual, permitindo grande segurança ao concluir que o prazo médio de formação de expectativas reduz-se substancialmente quando a inflação aumenta. Por exemplo, o limite superior para o intervalo de confiança na equação B2 é 0,14, enquanto o limite inferior na equação B3 é 0,18, indicando um deslocamento inequívoco na formação de expectativas.

A estimativa do parâmetro de expectativas para a renda esperada (β_1) na equação B1 é igual a 0,057, implicando uma defasagem média com relação ao índice verificado de renda de 17 meses. Esta defasagem — cerca de três vezes aquela da inflação esperada — é consistente com a idéia de que a renda esperada deve responder mais lentamente aos choques. A estimativa para aquele parâmetro na equação B2 é 0,075, correspondendo a uma defasagem média de 13 meses, que é mais curta que a da equação B1. Para a equação B3, a estimativa pontual é menor que a da equação B1, mas o intervalo de confiança é muito mais amplo, fazendo com que seja difícil colocar muito peso naquele valor.

5.3 - O nível e a variância da inflação, a taxa de juros e a renda

A outra implicação empírica importante do modelo da Seção 2 é resumida na equação (32), que especifica que os coeficientes do nível e da variância de taxa de inflação devem ser iguais a $-1/\kappa$ e $1/\kappa$, respectivamente. Os parágrafos seguintes discutem o teste destas hipóteses para cada uma das equações da Tabela 3.

Para a equação B1 (para a amostra completa), os valores estimados para os coeficientes de π e σ^2 são, respectivamente, $-0,975$ e $1,102$, e seus desvios padrões mostram que para $\kappa = 1$ nenhuma das duas hipóteses anteriores pode ser rejeitada ao nível de significância de 5%. A hipótese de que a soma dos coeficientes de π e σ^2 é nula, que é um teste direto da restrição imposta pela teoria, também não pode ser rejeitada ao nível de 5%. Como os intervalos de confiança sobre estes parâmetros são razoavelmente estreitos, o fato de que a forma reduzida da equação passou neste teste empírico pode ser visto como um argumento forte em favor do modelo proposto nas Seções 2 e 3, especialmente com relação ao sinal do coeficiente da variância da inflação, que é positivo, como esperado.

Nas equações B2 e B3, as estimativas do coeficiente da taxa de inflação são iguais a $-1,263$ e $-1,100$, respectivamente, que são menores que o valor encontrado na equação B1. Entretanto, devido ao valor de seus desvios padrões estimados, a hipótese de que $\kappa = 1$ não pode ser rejeitada ao nível de 5% em qualquer das equações, o que sugere que aquele parâmetro é estável no tempo, como apontado anteriormente.

Para a equação B2, a hipótese de que a soma dos coeficientes de π e σ^2 é nula não pode ser rejeitada ao nível de 5%, principalmente porque o desvio padrão da variância

da inflação é muito grande, demonstrando que de fato ele não é significativamente diferente de zero. Para a equação B3, entretanto, aquela mesma hipótese pode ser rejeitada mesmo ao nível de 5%, mas não ao nível de 2,5%. Os valores relativos dos coeficientes da variância nas equações B2 e B3 são os esperados: quando a inflação é relativamente baixa, os agentes não estão preocupados com sua variabilidade, dando origem a um coeficiente insignificante, enquanto na situação de inflação extrema eles se protegem de modo importante do risco inflacionário (especialmente devido aos vários choques do período), dando origem a um coeficiente mais elevado.

Outra implicação do modelo é que o coeficiente da taxa real de juros deveria ser igual a $-1/\kappa$ e igual ao coeficiente da taxa de inflação. Infelizmente, esta condição não é satisfeita para qualquer das equações, pois aquele coeficiente é da ordem de $-0,1$ em todas elas. Não tenho uma explicação para isto a esta altura, mas pode-se conjecturar que o valor estimado para este coeficiente pode estar sujeito a um problema de vies de equações simultâneas, pois a taxa real de juros seria o canal através do qual a interação com a equação de oferta de moeda se daria. Como mencionado anteriormente, este problema é deixado para ser abordado em outra ocasião.

Para resumir, pode-se argumentar que as estimativas obtidas para λ e para os coeficientes de π e σ são uma forte evidência em favor da relevância da forma funcional derivada do modelo da Seção 2 para a análise da demanda por saldos reais de moeda no Brasil, de 1974 a 1992.

A Tabela 4 mostra os valores da elasticidade dos saldos reais de moeda com relação à inflação, para várias taxas de inflação típicas, derivadas das equações para o período completo, e para as fases inicial e extrema do processo. Para a equação B1, o valor da elasticidade à taxa de inflação esperada que caracteriza o início da hiperinflação é $\varphi(0,5) = -1,04$, valor já bastante próximo à elasticidade limite quando a taxa de inflação cresce indefinidamente, o que demonstra que o aprofundamento da hiperinflação não produziria, para esta equação de demanda por moeda, um aumento significativo no valor absoluto da elasticidade com relação àquele já observado quando ela se estabelece. Esta implicação é completamente diferente da que se poderia tirar do modelo de Cagan, em que o valor absoluto daquela elasticidade aumentaria sem limite à medida que a hiperinflação prosseguisse. O valor calculado aqui para a elasticidade é apenas 34% do que se obteria da fórmula derivada por Cagan ($-3,02$), utilizando o valor da semi-elasticidade da demanda por saldos reais de moeda estimada por Rossi (1994) para o Brasil.³⁹

A elasticidade dos saldos monetários com relação à inflação, à taxa média de inflação para o período analisado por Cardoso (1983),⁴⁰ é igual a $-0,44$, que é também maior, em valor absoluto, que as estimativas obtidas para o mesmo período por Gerlach e De Simone (1985) e Darrat (1985), respectivamente iguais a $-0,08$ e $-0,20$. Como a elasticidade da

39 Rossi (1994) estima uma equação para o Brasil com a especificação log-linear de Cagan, para o período 1980:1/1993:12, por métodos de co-integração, obtendo uma estimativa superconsistente de $\alpha = 6,04$.

40 A média aritmética da taxa *trimestral* de inflação para o período amostral de Cardoso (1983) é, de acordo com Rossi (1988, nota 8), igual a 6,7%. A taxa média *mensal* com capitalização constante correspondente é igual a 2,16%, que, através da equação (19), produz a elasticidade desejada.

TABELA 4

Elasticidade da demanda por saldos reais de moeda com relação à inflação^a

Equação	B1	B2	B3
Data de referência	1985:11	1984:1	1992:1
Taxa de inflação mensal			
∞	-1,11	-1,43	-0,83
50%	-1,04	-1,26	-0,82
10%	-0,84	-0,86	-0,78
2,16%	-0,44	-0,35	-0,65
Intercepto da forma reduzida (γ)	0,784	0,573	0,766

^aPara calcular a elasticidade é necessário assumir valores para as outras variáveis exógenas da equação (30). Neste exercício, as variâncias esperadas da taxa de inflação e do índice de renda são iguais, respectivamente, ao seu valor médio na amostra para cada equação, a taxa real de juros é nula, o cálculo é feito para a data de referência indicada sob o código da equação, e não são meses de dezembro. Os coeficientes das equações foram usados para obter o valor de γ indicado na tabela.

função de demanda especificada por estes autores é constante, eles podem ter captado até certo ponto o comportamento médio na sua amostra da verdadeira elasticidade, que é de fato variável, se o modelo proposto aqui é correto. O valor da elasticidade obtido aqui é muito próximo de $-0,5$, valor teórico calculado por Barro (1970) no seu modelo de periodicidade ótima de pagamentos, com uma fração constante de transações monetizadas, para baixas taxas de inflação.⁴¹ Ela é 50% maior do que $-0,3$, que é o valor obtido do modelo log-linear com a estimativa de Rossi para a semi-elasticidade da demanda por moeda.

Para as equações B2 e B3, a elasticidade é, em valor absoluto, respectivamente, maior e menor do que na equação B1, devido ao fato de que λ é, também em valor absoluto, respectivamente, menor e maior do que na equação B1 (ver Gráfico 3). O menor valor

41 Aquele modelo é, acredito, dentre os propostos por Barro, o que corresponde à situação de fase inicial do processo inflacionário retratado no último cálculo de elasticidade contido no corpo do artigo.

absoluto da elasticidade na equação B3, quando comparado ao valor para a equação B2, pode possivelmente ser explicado como uma consequência do aumento na liquidez dos ativos indexados que ocorreu depois de 1985, que foi motivado pela demanda dos agentes econômicos por proteção contra as perdas de capital trazidas pela inflação. Este fato teria implicado que, apesar de os saldos monetários médios serem menores no período de inflação extrema, sua redução adicional é mais custosa do que antes, levando a uma curva de demanda mais inelástica, como sugerido pela especificação dos custos de transação, na equação (4).

A taxa ótima de elevação de preços, capitalizada continuamente, para arrecadação do imposto inflacionário, calculada da equação (22) para os coeficientes da equação B1, é 29,7% ao mês, que é muito maior do que a taxa anual média de cerca de 250% calculada por Giambiagi e Pereira (1990) a partir de uma equação estimada para o período 1979:4/1988:4 ou a taxa mensal de 15,2% calculada por Rossi (1994) a partir de dado para o período 1980:1/1993:12. A taxa de inflação ótima obtida aqui é consistente com a possibilidade de que o episódio de alta inflação que ocorreu no Brasil na última década foi causado por uma tentativa de aumentar a arrecadação do imposto inflacionário sobre os saldos reais de moeda, pois ela é maior do que a taxa média de inflação observada para o período e similar às taxas observadas logo antes dos planos de estabilização no subperíodo de inflação extrema. Ela também é consistente com a hipótese de que a aceleração da inflação no Brasil depois de 1985, que é a data de referência para o cálculo da taxa ótima antes mencionada, pode ter sido a consequência de uma tentativa racional de coletar senhoriagem.

Para a fase inicial do processo de inflação elevada, na equação B2, $\lambda = -0,7$ leva a uma taxa de inflação ótima $\pi^* = 16\%$ ao mês. Se considerarmos que $\lambda \equiv -1$ na equação B3 para a fase de inflação extrema, a taxa ótima de inflação é infinitamente elevada. Notando que foi argumentado anteriormente que não há evidência de que os outros parâmetros ($1/\kappa$, γ) na fórmula de elasticidade (14) sejam significativamente diferentes nas três equações, sugere-se uma explicação alternativa para a dinâmica do processo de elevação da inflação: se a demanda por saldos de moeda fica mais inelástica à medida que a taxa de inflação aumenta, devido a aumentos no valor absoluto de λ , isto induz à elevação das taxas ótimas de inflação, que por sua vez produzem mais aumentos na inflação e taxas ótimas ainda maiores de inflação. Este efeito ocorre apesar do fato de que o imposto inflacionário coletado a cada nível de inflação é progressivamente reduzido pelo decréscimo dos saldos monetários, no ramo direito da curva de Laffer.

A elasticidade-renda nas equações B1, B2 e B3 aos valores médios na amostra das variáveis independentes é igual, respectivamente, a 2,68, 1,38 e 3,72. Estes valores parecem ser algo elevados, especialmente o último, mas, como o coeficiente da renda esperada na equação B3 tem um desvio padrão estimado elevado, sua estimativa pontual deve ser encarada com reservas.

O efeito da tendência temporal pode ser interpretado como o efeito da inovação tecnológica e reduz a demanda real por moeda a cada mês em aproximadamente 1% em média para toda a amostra: 0,5% até 1984 e 1,9% após 1985. Existe uma interpretação natural disto em termos do progresso técnico, pois o período em que a redução é maior coincide com a difusão generalizada da automação no setor bancário brasileiro.

É também fácil verificar que a variável *dummy* para o mês de dezembro reduz o valor (total) do coeficiente da inflação esperada em aproximadamente 15% naqueles meses na equação B1 e que reduções similares ocorrem nas outras equações.

Finalmente, quando uma variável igual à taxa real de câmbio do dólar é introduzida nas equações, verifica-se que ela não é significativa, o que sugere que aquela moeda não oferecia oportunidades de proteção contra a inflação que já não estivessem disponíveis através de outros instrumentos nesta economia, neste período.

A igualdade dos coeficientes da parte linear da especificação nos dois subperíodos pode ser avaliada fazendo um teste de Chow nas equações estimadas com os valores de forma e de expectativas (λ e os β) iguais àqueles estimados para todo o período na equação B1. Aquele teste condicional, ao nível de significância de 5%, rejeita a hipótese de que aqueles coeficientes sejam iguais nos dois subperíodos. Entretanto, o mesmo teste ao nível de significância de 1% não é capaz de rejeitar a hipótese de estabilidade.

6 - Conclusão

Foi proposta uma especificação empírica para a demanda por saldos reais em processos de inflação elevada, que estende e generaliza o celebrado modelo hiperinflacionário de Cagan. Ele foi derivado de um modelo teórico de programação dinâmica estocástica para a demanda por moeda que capta a idéia de que o retorno de conveniência da moeda é violentamente reduzido nas hiperinflações, devido ao aparecimento de ativos substitutos. A solução do modelo indicou uma relação inversa entre os saldos monetários e a inflação e sugeriu o uso da transformada Box-Cox dos saldos reais de moeda, ao invés da transformada logarítmica empregada por Cagan, para estimar uma equação que é linear nas outras variáveis. O modelo teórico também mostrou a necessidade de introdução da variância da taxa de inflação na equação.

O modelo empírico foi especificado com a adoção de um mecanismo adaptativo de formação de expectativas para a taxa de inflação, a sua variância e a renda. A especificação empírica foi completada com a introdução da taxa de juros real, uma variável para captar os efeitos do progresso técnico e um fator sazonal. Um procedimento não-linear de máxima verossimilhança foi utilizado para estimar o modelo.

Este modelo de demanda por moeda para processos de inflação elevada foi testado aplicando-o aos dados da hiperinflação alemã e à análise da experiência inflacionária do Brasil nas duas últimas décadas. Os resultados validam o modelo proposto aqui e mostram que suas características são de fato importantes para compreender a demanda por moeda em processos de inflação elevada. De modo geral, eles revelam que a demanda por moeda nestes casos tem uma forma funcional similar à função inversa, que corresponde a um parâmetro Box-Cox $\lambda \approx -1$, em contraste com o modelo de Cagan, que corresponde a $\lambda = 0$. Esta diferença tem implicações cruciais para o comportamento de elasticidade com relação à taxa de inflação e para a forma da curva de Laffer do imposto inflacionário. Em particular, com formas funcionais próximas da função inversa, a taxa ótima de inflação é extremamente alta, o que possivelmente justifica a ocorrência de

episódios de inflação extrema como uma consequência da tentativa de maximizar o financiamento inflacionário, em claro contraste com o modelo de Cagan, em que isto não se verifica.

A relevância da variância da taxa de inflação como uma variável explicativa da demanda por moeda foi também estabelecida e a hipótese de que seu coeficiente é igual ao da taxa de inflação esperada, mas com o sinal oposto, não pôde ser rejeitada em nenhuma das equações.

Serão necessárias outras pesquisas para estabelecer se a boa *performance* exibida pelo modelo nestes episódios de alta inflação e hiperinflação é também obtida na sua aplicação a outros casos, em outros países.

Apêndice A - Estimação da demanda por moeda Box-Cox com expectativas adaptativas

A equação (30) e as definições (13), (27), (28) e (29) formam um sistema não-linear que pode ser estimado por um procedimento de máxima verossimilhança em dois estágios⁴² similar àquele proposto por Box e Cox (1964):⁴³

a) calculem-se os saldos de moeda normalizados z dividindo cada M/P pela média geométrica dos valores amostrais dos saldos reais de moeda;

b) para cada valor de λ , estime-se a regressão não-linear de $\Phi(z, \lambda)$ no vetor de variáveis explicativas da equação (30), obtendo no processo as variáveis não-observáveis E , V , e Y a partir das variáveis observadas C e I (as estimativas dos parâmetros da formação de expectativas são também obtidas desta forma); e

c) escolha-se o valor de λ para o qual $RSS(\lambda)$ é minimizado.

Os desvios padrões dos coeficientes de regressão condicionados a λ podem ser obtidos dos resultados dos programas usuais de regressão não-linear, para a equação com o valor ótimo para o parâmetro λ . O desvio padrão e o intervalo de confiança para λ podem ser obtidos por uma inversão da estatística do teste da razão de máxima verossimilhança. Suponha-se que estejamos testando a hipótese $\lambda = \lambda_0$ e defina-se $\theta = [RSS(\lambda^*) / RSS(\lambda)]^{n/2}$. A variável $-2 \log \theta$ é distribuída como qui-quadrado com um grau de liberdade. Portanto, o intervalo de confiança de 95% para λ incluirá todos os valores tais que a equação a seguir seja satisfeita:

$$n \log RSS(\lambda) - n \log RSS(\lambda^*) < 3,84$$

42 Uma rotina RATS 386 foi escrita para implementar este procedimento de estimação.

43 Uma referência mais facilmente encontrável é Maddala (1977, p. 316).

Os λ no item *b* anterior devem ser escolhidos de modo a cobrir o espaço de valores possíveis, que em nosso caso é dado pelas desigualdades (13). Os valores foram escolhidos entre -2 e 0 , igualmente espaçados por $0,1$, para facilitar a construção do intervalo de confiança, como descrito anteriormente.

Uma vez que, quando a taxa de inflação é muito alta, a transformada Box-Cox produz valores negativos elevados para $\Phi(z, \lambda)$ e neste caso o erro de medida é também provavelmente maior, considerou-se que a variância do erro é proporcional à inflação ($\sigma_e = \sigma E$). Lida-se com isto do modo usual, dividindo todas as variáveis da equação (30) por $\sqrt{E_t}$ antes da estimação. Além disto, como pode existir correlação serial nos resíduos da equação ótima, uma correção Cochrane-Orcutt é aplicada a ela, se necessário. Estas duas correções devem garantir que os desvios padrões dos coeficientes sejam estimativas não-viesadas dos valores verdadeiros.

Apêndice B - Dados para estimar o modelo para o Brasil

Os preços (P) foram medidos pelo Índice Geral de Preços-Disponibilidade Interna (IGP-DI) da Fundação Getúlio Vargas, que é uma média dos preços coletados ao longo do mês e, portanto, centrado no mês ao qual se refere. A taxa de inflação instantânea no final do mês t foi então aproximada pela taxa de crescimento exponencial do índice de preços entre os períodos t e $t+1$: $C_t = \ln(P_{t+1}/P_t)$.

A base monetária real foi calculada dividindo os saldos nominais de moeda no último dia do mês, como publicado pelo Banco Central do Brasil, pelo índice de preços no último dia do mês, estimado como a média geométrica entre o índice para o mês corrente e o próximo: $\sqrt{P_t * P_{t+1}}$.

A série para a taxa real de juros (R) foi construída deflacionando a série das taxas nominais médias de juros para operações de mercado aberto para um dia (N). O fator de deflação foi a inflação média para o mês ao qual a taxa de juros se refere, calculada como a média geométrica da taxa de inflação instantânea no início e no fim do mês. A taxa de crescimento aritmética para os preços (ao invés da taxa de crescimento exponencial utilizada para calcular C_t) foi adotada para medir a inflação instantânea para o cálculo da taxa média mensal de inflação, porque era desejável manter a consistência com o procedimento adotado pelo Banco Central do Brasil para calcular sua série de taxas de juros reais no passado recente. Como consequência, a série de taxas de juros reais é calculada como $R_t = (1 + N_t) / \sqrt{P_{t+1}/P_{t-1}} - 1$.

Para calcular a renda esperada, a disponibilidade de dados é limitada. Depois de 1973, uma série trimestral de um índice de produto real⁴⁴ (I) é disponível, e o seu valor no trimestre foi repetido para cada um dos meses que o compõe. Antes de 1973, uma vez

44 A série trimestral de índices de produto real é a do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE).

que somente uma série anual estava disponível, ela foi utilizada repetindo seu valor para todos os meses.

Finalmente, deve-se frisar que nenhuma das variáveis sofreu ajustamento sazonal e que nenhuma observação foi eliminada da amostra.

Ano/Mês	Base monetária real	Taxa de inflação mensal	Taxa real de juros mensal	Índice de renda real
1970				
1		0,0143		47,32
2		0,0141		47,32
3		0,0185		47,32
4		0,0046		47,32
5		0,0136		47,32
6		0,0223		47,32
7		0,0175		47,32
8		0,0214		47,32
9		0,0210		47,32
10		0,0165		47,32
11		0,0041		47,32
12		0,0081		47,32
1971				
1		0,0160		52,66
2		0,0157		52,66
3		0,0232		52,66
4		0,0152		52,66
5		0,0186		52,66
6		0,0219		52,66
7		0,0143		52,66
8		0,0106		52,66
9		0,0140		52,66
10		0,0104		52,66
11		0,0103		52,66
12		0,0102		52,66

(continua)

Ano/Mês	Base monetária real	Taxa de inflação mensal	Taxa real de juros mensal	Índice de renda real
1972				
1		0,0167		58,13
2		0,0197	0,0049	58,13
3		0,0129	0,0079	58,13
4		0,0127	0,0115	58,13
5		0,0094	0,0115	58,13
6		0,0094	0,0087	58,13
7		0,0123	0,0067	58,13
8		0,0152	0,0075	58,13
9		0,0120	0,0098	58,13
10		0,0089	0,0111	58,13
11		0,0088	0,0122	58,13
12		0,0058	0,0082	58,13
1973				
1		0,0173	0,0056	55,57
2		0,0114	0,0055	55,57
3		0,0141	0,0041	55,57
4		0,0139	0,0059	69,35
5		0,0110	0,0084	69,35
6		0,0108	0,0087	69,35
7		0,0081	0,0082	66,42
8		0,0106	0,0083	66,42
9		0,0105	0,0060	66,42
10		0,0156	0,0050	67,67
11		0,0103	0,0068	67,67
12		0,0127	-0,0008	67,67
1974				
1		0,0269	-0,0127	61,58
2	1.739,32	0,0433	-0,0234	61,58

(continua)

Ano/Mês	Base monetária real	Taxa de inflação mensal	Taxa real de juros mensal	Índice de renda real
3	1.673,89	0,0523	-0,0356	61,58
4	1.667,04	0,0343	-0,0307	76,65
5	1.671,01	0,0180	-0,0137	76,65
6	1.670,55	0,0126	-0,0003	76,65
7	1.637,59	0,0125	0,0035	73,15
8	1.663,36	0,0173	-0,0049	73,15
9	1.601,86	0,0145	-0,0022	73,15
10	1.616,93	0,0167	-0,0044	70,34
11	1.735,13	0,0211	-0,0044	70,34
12	1.772,66	0,0229	-0,0048	70,34
1975				
1	1.581,77	0,0224	-0,0049	63,62
2	1.533,99	0,0154	-0,0030	63,62
3	1.564,71	0,0173	-0,0061	63,62
4	1.549,12	0,0212	-0,0074	80,92
5	1.557,59	0,0208	-0,0065	80,92
6	1.597,24	0,0223	-0,0041	80,92
7	1.577,58	0,0277	-0,0086	75,41
8	1.623,38	0,0212	-0,0086	75,41
9	1.618,37	0,0227	-0,0064	75,41
10	1.574,26	0,0222	-0,0031	73,84
11	1.680,70	0,0217	0,0013	73,84
12	1.862,00	0,0300	-0,0061	73,84
1976				
1	1.664,75	0,0408	-0,0120	71,26
2	1.557,80	0,0360	-0,0129	71,26
3	1.511,74	0,0363	-0,0111	71,26
4	1.523,24	0,0336	-0,0052	87,61
5	1.541,31	0,0266	-0,0045	87,61

(continua)

Ano/Mês	Base monetária real	Taxa de inflação mensal	Taxa real de juros mensal	Índice de renda real
6	1.655,27	0,0372	-0,0061	87,61
7	1.647,92	0,0400	-0,0056	79,30
8	1.594,69	0,0345	-0,0096	79,30
9	1.648,71	0,0232	0,0039	79,30
10	1.686,33	0,0190	0,0104	81,44
11	1.767,42	0,0223	0,0087	81,44
12	1.902,41	0,0372	0,0058	81,44
1977				
1	1.879,18	0,0302	0,0002	75,13
2	1.755,37	0,0415	-0,0037	75,13
3	1.726,99	0,0398	-0,0097	75,13
4	1.770,03	0,0352	-0,0114	93,53
5	1.785,96	0,0192	-0,0053	93,53
6	1.821,31	0,0208	0,0105	93,53
7	1.900,92	0,0126	0,0158	84,71
8	1.846,74	0,0172	0,0115	84,71
9	1.886,51	0,0272	0,0122	84,71
10	1.946,96	0,0256	-0,0063	84,52
11	1.962,93	0,0214	-0,0028	84,52
12	2.076,09	0,0261	0,0175	84,52
1978				
1	1.989,48	0,0338	0,0054	77,35
2	1.907,71	0,0319	-0,0039	77,35
3	1.883,93	0,0332	-0,0032	77,35
4	1.915,98	0,0314	-0,0007	94,66
5	1.869,82	0,0356	-0,0087	94,66
6	1.910,83	0,0280	-0,0031	94,66
7	1.910,34	0,0265	0,0091	90,93
8	1.938,40	0,0252	-0,0033	90,93

(continua)

Ano/Mês	Base monetária real	Taxa de inflação mensal	Taxa real de juros mensal	Índice de renda real
9	1.965,64	0,0285	0,0086	90,93
10	2.021,36	0,0271	0,0023	90,08
11	2.061,19	0,0151	0,0124	90,08
12	2.125,58	0,0356	0,0196	90,08
1979				
1	2.118,69	0,0368	-0,0003	83,30
2	2.113,20	0,0561	-0,0126	83,30
3	1.970,46	0,0373	-0,0083	83,30
4	1.977,80	0,0231	0,0055	101,31
5	1.964,24	0,0342	-0,0004	101,31
6	1.957,56	0,0426	-0,0110	101,31
7	2.001,66	0,0565	-0,0304	94,94
8	1.928,66	0,0743	-0,0399	94,94
9	1.922,54	0,0509	-0,0277	94,94
10	1.950,56	0,0542	-0,0302	94,98
11	1.912,63	0,0706	-0,0410	94,98
12	2.182,31	0,0627	-0,0304	94,98
1980				
1	1.982,83	0,0401	-0,0221	95,49
2	1.845,86	0,0657	-0,0278	95,49
3	1.770,31	0,0553	-0,0243	95,49
4	1.834,45	0,0614	-0,0386	103,28
5	1.728,16	0,0550	-0,0384	103,28
6	1.756,30	0,0811	-0,0438	103,28
7	1.707,19	0,0678	-0,0415	102,20
8	1.621,52	0,0520	-0,0288	102,20
9	1.583,97	0,0733	-0,0285	102,20
10	1.535,23	0,0723	-0,0338	99,03
11	1.559,13	0,0580	-0,0251	99,03

(continua)

Ano/Mês	Base monetária real	Taxa de inflação mensal	Taxa real de juros mensal	Índice de renda real
12	1.625,00	0,0637	-0,0055	99,03
1981				
1	1.482,41	0,0813	-0,0207	95,37
2	1.380,21	0,0706	-0,0289	95,37
3	1.313,61	0,0531	-0,0127	95,37
4	1.231,99	0,0599	-0,0124	100,60
5	1.237,34	0,0437	0,0035	100,60
6	1.278,55	0,0505	-0,0002	100,60
7	1.272,90	0,0644	-0,0028	96,07
8	1.241,93	0,0496	-0,0000	96,07
9	1.252,03	0,0430	0,0085	96,07
10	1.255,36	0,0513	0,0114	90,97
11	1.353,75	0,0373	0,0091	90,97
12	1.415,94	0,0616	0,0171	90,97
1982				
1	1.440,41	0,0657	-0,0052	91,22
2	1.300,18	0,0696	-0,0162	91,22
3	1.262,55	0,0524	0,0025	91,22
4	1.187,22	0,0597	0,0015	101,39
5	1.179,18	0,0769	-0,0086	101,39
6	1.179,07	0,0585	-0,0082	101,39
7	1.188,30	0,0565	0,0064	99,81
8	1.171,11	0,0361	0,0273	99,81
9	1.162,18	0,0467	0,0244	99,81
10	1.186,94	0,0488	0,0231	94,11
11	1.275,19	0,0596	0,0244	94,11
12	1.310,97	0,0863	0,0109	94,11
1983				
1	1.312,61	0,0634	-0,0072	88,32

(continua)

Ano/Mês	Base monetária real	Taxa de inflação mensal	Taxa real de juros mensal	Índice de renda real
2	1.236,95	0,0957	-0,0142	88,32
3	1.110,86	0,0880	-0,0019	88,32
4	1.096,93	0,0649	0,0285	97,24
5	1.055,47	0,1160	0,0141	97,24
6	977,91	0,1248	-0,0119	97,24
7	966,78	0,0965	-0,0094	96,40
8	825,22	0,1204	-0,0120	96,40
9	837,68	0,1245	-0,0343	96,40
10	788,95	0,0809	-0,0101	93,28
11	798,01	0,0730	0,0129	93,28
12	824,53	0,0935	0,0067	93,28
1984				
1	780,76	0,1156	-0,0067	92,07
2	729,81	0,0950	0,0093	92,07
3	678,56	0,0856	0,0166	92,07
4	742,16	0,0849	0,0110	101,80
5	738,61	0,0884	0,0068	101,80
6	736,63	0,0982	0,0039	101,80
7	724,66	0,1010	0,0142	101,61
8	711,79	0,0999	0,0022	101,61
9	717,55	0,1184	0,0032	101,61
10	693,18	0,0942	0,0150	100,14
11	708,57	0,1002	0,0059	100,14
12	864,17	0,1190	-0,0001	100,14
1985				
1	759,26	0,0968	0,0228	98,43
2	810,80	0,1196	0,0048	98,43
3	722,80	0,0697	0,0288	98,43
4	696,72	0,0749	0,0536	107,66

(continua)

Ano/Mês	Base monetária real	Taxa de inflação mensal	Taxa real de juros mensal	Índice de renda real
5	681,91	0,0755	0,0418	107,66
6	598,92	0,0854	0,0217	107,66
7	716,88	0,1310	-0,0126	110,93
8	604,81	0,0874	-0,0188	110,93
9	638,31	0,0866	0,0126	110,93
10	593,46	0,1393	-0,0115	109,98
11	622,86	0,1240	-0,0316	109,98
12	763,91	0,1637	-0,0131	109,98
1986				
1	663,24	0,1396	0,0025	105,64
2	675,44	0,0538	0,0399	105,64
3	896,11	-0,0058	-0,0120	105,64
4	1.214,45	0,0032	0,0138	115,84
5	1.390,98	0,0053	0,0078	115,84
6	1.529,22	0,0063	0,0083	115,84
7	1.728,04	0,0132	0,0096	119,87
8	1.809,62	0,0109	0,0134	119,87
9	1.837,12	0,0138	0,0168	119,87
10	1.895,86	0,0242	-0,0003	117,90
11	1.976,15	0,0729	-0,0248	117,90
12	1.867,43	0,1136	-0,0389	117,90
1987				
1	1.591,97	0,1320	-0,0182	113,89
2	1.324,20	0,1397	0,0442	113,89
3	1.160,49	0,1830	-0,0473	113,89
4	1.036,27	0,2436	-0,0685	123,76
5	806,98	0,2301	-0,0165	123,76
6	633,86	0,0892	0,0060	123,76
7	763,71	0,0440	0,0189	120,54

(continua)

Ano/Mês	Base monetária real	Taxa de inflação mensal	Taxa real de juros mensal	Índice de renda real
8	890,46	0,0771	0,0171	120,54
9	973,32	0,1057	-0,0144	120,54
10	725,50	0,1351	-0,0294	117,79
11	897,50	0,1474	-0,0196	117,79
12	988,09	0,1751	-0,0266	117,79
1988				
1	837,65	0,1625	-0,0136	113,88
2	660,03	0,1669	0,0036	113,88
3	796,22	0,1851	-0,0222	113,88
4	713,86	0,1782	0,0029	123,26
5	685,14	0,1892	-0,0126	123,26
6	615,04	0,1951	-0,0084	123,26
7	554,54	0,2062	0,0203	123,35
8	481,29	0,2292	-0,0135	123,35
9	500,35	0,2436	-0,0033	123,35
10	507,90	0,2466	0,0158	115,19
11	469,67	0,2538	-0,0002	115,19
12	586,05	0,3116	-0,0182	115,19
1989				
1	534,65	0,1116	-0,0050	110,75
2	591,91	0,0414	0,1018	110,75
3	669,20	0,0504	0,1502	110,75
4	688,70	0,1200	0,0241	127,49
5	771,00	0,2372	-0,0677	127,49
6	677,00	0,3212	-0,0284	127,49
7	537,50	0,3110	-0,0295	129,77
8	461,34	0,3287	-0,0249	129,77
9	438,15	0,3343	-0,0051	129,77
10	400,14	0,3665	0,0404	122,93

(continua)

Ano/Mês	Base monetária real	Taxa de inflação mensal	Taxa real de juros mensal	Índice de renda real
11	441,23	0,4014	0,0109	122,93
12	514,07	0,5417	0,0061	122,93
1990				
1	356,52	0,5404	-0,0243	113,77
2	352,31	0,5951	0,0319	113,77
3	606,45	0,1074	-0,0371	113,77
4	935,59	0,0869	-0,0536	115,84
5	1.358,24	0,0863	-0,0310	115,84
6	1.111,37	0,1220	-0,0200	115,84
7	895,50	0,1216	0,0077	124,90
8	818,19	0,1108	-0,0072	124,90
9	854,11	0,1324	0,0201	124,90
10	736,34	0,1609	0,0058	115,52
11	702,48	0,1524	0,0243	115,52
12	939,03	0,1817	0,0393	115,52
1991				
1	629,13	0,1915	0,0040	105,74
2	764,13	0,0700	-0,0620	105,74
3	790,25	0,0838	0,0092	105,74
4	735,41	0,0632	0,0189	124,66
5	754,42	0,0940	0,0127	124,66
6	745,52	0,1207	-0,0092	124,66
7	678,54	0,1440	-0,0154	127,69
8	640,62	0,1501	-0,0007	127,69
9	604,71	0,2299	-0,0094	127,69
10	520,90	0,2292	0,0011	117,63
11	537,21	0,2000	0,0685	117,63
12	615,65	0,2378	0,0539	117,63

(continua)

Ano/Mês	Base monetária real	Taxa de inflação mensal	Taxa real de juros mensal	Índice de renda real
1992				
1	441,57	0,2215	0,0258	110,79
2	512,07	0,1881	0,0491	110,79
3	440,20	0,1701	0,0605	110,79
4	481,65	0,2025	0,0285	121,88
5	432,90	0,1941	0,0088	121,88
6	409,15	0,1963	0,0224	121,88
7	398,70	0,2274	0,0211	121,17
8	384,23	0,2420	-0,0064	121,17
9	379,47	0,2226	0,0120	121,17
10	384,00	0,2169	0,0289	116,67
11	410,81	0,2127	0,0196	116,67
12			-0,0021	116,67

Abstract

This article proposes and tests an equation for the demand for real money balances in high inflation processes that extends and generalizes Cagan's celebrated model of hyperinflations. It is derived from a stochastic dynamic programming theoretical model of portfolio choice, and its solution suggests the adoption of an inverse relation between money balances and expected inflation. It also shows the need for the inclusion of the variance of the inflation rate as one of the explanatory variables, in addition to the real interest rate, and of a variable to capture the effects of the technical progress, and a seasonal factor. To complete the specification, expectations regarding the level and the variance of the inflation rate are assumed to be adaptive. To test the model, it was applied to the German hyperinflation and to the high inflation episode that occurred in Brazil in the last two decades, making use of the Box-Cox flexible functional form. One concludes for its general validity, and it is determined that Cagan's semi-logarithmic functional form is inappropriate to model the demand for real money balances in Brazil from 1974 to 1992. It is also shown that both the expected level and variance of the inflation rate are significant explanatory variables, and that the hypothesis that their coefficients are equal in absolute value, as predicted by theory, cannot be rejected.

Bibliografia

- ABEL, A. *et alii*. Money demand during hyperinflation. *Journal of Monetary Economics*, v. 5, p. 97-104, 1979.
- BARRO, R. J. Inflation, the payments period, and the demand for money. *Journal of Political Economy*, v. 78, p. 1.228-1.263, 1970.
- BOX, G. E. P., COX, D. R. An analysis of transformations (with discussion). *Journal of the Royal Statistical Society*, v. 26, Series B, p. 211-243, 1964.
- BRUNO, M. *et alii* (eds.). *Stopping high inflation*. Cambridge, Mass.: MIT Press, 1988.
- CAGAN, P. The monetary dynamics of hyperinflation. In: FRIEDMAN, M. (ed.). *Studies in the quantity theory of money*. Chicago, Ill.: University of Chicago Press, 1956.
- CARDOSO, E.A. A money demand equation for Brazil. *Journal of Development Economics*, v. 12, p. 183-193, 1983.
- CASELLA, A. Testing for rational bubbles with exogenous or endogenous fundamentals. The German hyperinflation once more. *Journal of Monetary Economics*, v. 24, p. 109-122, 1989.
- CHECHETTI, S. G., LAM, Pok-Sang, MARK, N. C. Testing volatility restrictions on intertemporal marginal rates of substitution implied by Euler equations and asset returns. *The Journal of Finance*, v. 49, n. 1, p. 123-152, 1994.
- CHOW, G. C. Rational *versus* adaptive expectations in present value models. *The Review of Economics and Statistics*, v. 71, p. 376-384, 1989.
- DARRAT, A. F. The demand for money in Brazil — some further results. *Journal of Development Economics*, v. 18, p. 485-491, 1985.
- DORNBUSCH, R. Lessons from experiences with high inflation. *The World Bank Economic Review*, v. 6, n. 1, p. 13-31, 1992.
- DORNBUSCH, R., FISCHER, S. Stopping hyperinflations: past and present. *Weltwirtschaftliches Archiv*, v. 122, n. 1, p. 1-14, 1986.
- DORNBUSCH, R., STURZENEGGER, F., WOLF, H. Extreme inflation: dynamics and stabilization. *Brookings Papers on Economic Activity*, v. 2, p. 1-64, 1990.
- EVANS, J. L., YARROW, G. K. Some implications of alternative expectations hypotheses in the monetary analysis of hyperinflations. *Oxford Economic Papers*, v. 33, p. 61-80, 1981.
- ENGSTED, T. Testing for rational inflationary bubbles: the case of Argentina, Brazil and Israel. *Applied Economics*, v. 25, p. 667-674, 1991.
- . Cointegration and Cagan's model of hyperinflation under rational expectations. *Journal of Money, Credit and Banking*, v. 25, n. 3, p. 350-360, 1993.

- FAIR, R. International evidence on the demand for money. *Review of Economics and Statistics*, v. 69, p. 473-480, 1987.
- FISCHER, S. The demand for index bonds. *Journal of Political Economy*, v. 83, n. 3, p. 509-534, 1975.
- FLOOD, R. P., GARBER, P. M. An economic theory of monetary reform. *Journal of Political Economy*, v. 88, n. 1, p. 24-58, 1980.
- FRANKEL, J. A. Inflation and the formation of expectations. *Journal of Monetary Economics*, v. 1, p. 403-421, 1975.
- . The forward exchange rate, expectations, and the demand for money: the German hyperinflation. *American Economic Review*, v. 67, n. 4, p. 653-670, 1977.
- . Further evidence on expectations and the demand for money during the German hyperinflation. *Journal of Monetary Economics*, v. 5, p. 81-96, 1979.
- FRIEDMAN, B. Stability and rationality in models of hyperinflation. *International Economic Review*, v. 19, n. 1, p. 45-64, 1978.
- FRIEDMAN, M. The quantity theory of money — a restatement. In: FRIEDMAN, M. (ed.). *Studies in the quantity theory of money*. Chicago, Ill.: University of Chicago Press, 1956.
- . *A theory of the consumption function*. Princeton: National Bureau of Economic Research, Princeton University Press, 1957.
- GERLACH, S., De SIMONE, F. N. A money demand equation for Brazil — comments and additional evidence. *Journal of Development Economics*, v. 18, p. 493-501, 1985.
- GIAMBIAGI, F., PEREIRA, P. L. V. Déficit público e inflação: o caso brasileiro. *Pesquisa e Planejamento Econômico*, v. 20, n. 1, p. 191-210, Rio de Janeiro, abr. 1990.
- GOLDFELD, S. M., SICHEL, D. E. The demand for money. In: FRIEDMAN, B. M., HANS, F. H. (eds.). *Handbook of Monetary Economics*, v. 1, Elsevier, 1990.
- HANSEN, L. P., SARGENT, T. J. Aggregation over time and the inverse optimal predictor problem for adaptive expectations in continuous time. *International Economic Review*, v. 24, n. 1, p. 1-20, 1983.
- LIVIATAN, N., LEVHARI, D. Government intermediation in the indexed bonds market. *American Economic Review*, v. 66, n. 2, p. 186-192, 1976.
- . Risk and the theory of indexed bonds. *American Economic Review*, v. 67, n. 3, p. 366-375, 1977.
- MADDALA, G. S. *Econometrics*. McGraw-Hill Book Co., 1977.
- MERTON, R. Lifetime portfolio selection under uncertainty: the continuous-time case. *Review of Economics and Statistics*, v. 51, p. 247-257, 1969.

- . Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model. *Journal of Economic Theory*, v. 3, p. 373-413, 1971.
- MILLER, M. H., ORR, D. A model of the demand for money by firms. *Quarterly Journal of Economics*, v. 80, p. 413-435, 1966.
- MONTIEL, P. J. Empirical analysis of high-inflation episodes in Argentina, Brazil, and Israel. *IMF. Staff Paper*, v. 36, n. 3, Sep. 1989.
- MUTH, J. F. Rational expectations and the theory of price movements. *Econometrica*, v. 29, p. 315-335, July 1961.
- PHYLAKTIS, K., BLAKE, D. The Fischer hypotheses: evidence from three high inflation economies. *Weltwirtschaftliches Archiv*, v. 12, p. 591-599, 1993.
- PHYLAKTIS, K., TAYLOR, M. The monetary dynamics of sustained high inflation: Taiwan 1945-1949. *Southern Economic Journal*, v. 58, n. 3, p. 610-622, 1992.
- PRADO, E. F. S. Demanda por moeda no Brasil: o problema da forma funcional. *Pesquisa e Planejamento Econômico*, Rio de Janeiro, v. 8, n. 3, p. 781-794, 1978.
- ROSSI, J. W. A demanda por moeda no Brasil: o que ocorreu a partir de 1980? *Pesquisa e Planejamento Econômico*, Rio de Janeiro, v. 18, n. 1, p. 37-54, abr. 1988.
- . O modelo hiperinflacionário da demanda por moeda de Cagan e o caso do Brasil. *Pesquisa e Planejamento Econômico*, Rio de Janeiro, v. 24, n. 1, p. 73-96, abr. 1994.
- SARGENT, T. J. The demand for money during hyperinflations under rational expectations: I. *International Economic Review*, v. 18, n. 1, p. 59-82, 1977.
- SARGENT, T. J., WALLACE, N. Rational expectations and the dynamics of hyperinflation. *International Economic Review*, v. 14, n. 2, p. 328-350, 1973.
- . Rational expectations, the optimal monetary instrument, and the optimal money supply rule. *Journal of Political Economy*, v. 83, n. 2, p. 241-254, 1975.
- SPITZER, J. J. The demand for money, the liquidity trap, and functional form. *International Economic Review*, v. 17, n. 1, p. 220-227, 1976.
- TAYLOR, M. P. The hyperinflation model of money demand revisited. *Journal of Money, Credit and Banking*, v. 23, n. 3, Part 1, p. 327-351, 1991.
- WHITE, K. J. Estimation of the liquidity trap with a generalized function form. *Econometrica*, v. 40, n. 1, p. 193-199, 1972.
- ZAREMBKA, P. Functional form in the demand for money. *American Statistical Association Journal*, v. 63, p. 502-511, June 1968.

(Originais recebidos e revistos em janeiro de 1995.)