

# Crescimento econômico estocástico: a teoria do *quantum* de conhecimento\*

JOILSON DIAS\*\*

*Neste artigo desenvolvemos um modelo de crescimento econômico estocástico baseado na Teoria do Quantum de Conhecimento com o objetivo de analisar a influência do nível de especialização do capital humano no crescimento econômico de longo prazo. O elemento propulsor do crescimento econômico é a mercadoria composta denominada "quantum médio de conhecimento", sendo que a variância desta representa o nível de especialização da sociedade. O principal resultado encontrado é que a taxa de crescimento de longo prazo é influenciada positivamente pelo nível de especialização do capital humano para o caso em que a preferência pelo consumo futuro seja maior que a preferência pelo consumo presente.*

## 1 - Introdução

Dias (1992, 1993 e 1995) expõe um novo fundamento microeconômico para os modelos de crescimento econômico de longo prazo, baseado na premissa de que as firmas adquirem equipamentos que demandam um certo nível de conhecimento para serem operados e, a fim de satisfazer esta necessidade, contratam capital humano de tal forma que o nível médio de conhecimento do mesmo satisfaça o nível exigido pelos equipamentos. Esta condição é obedecida tanto no setor final como no intermediário da economia. A principal diferença entre estes dois setores está em que, no intermediário, o nível médio de conhecimento dos capitais humanos dita também a qualidade do produto. Assim, este setor, ao fabricar o produto intermediário, fixa o nível de conhecimento a ser demandado por este produto quando da sua utilização pelo setor final.

A contribuição feita pelo autor é baseada na introdução de uma definição de capital humano até então não existente na literatura, segundo a qual o capital humano equivale às horas disponíveis para trabalhar de um indivíduo vezes o nível de conhecimento deste — anos de escolaridade mais experiência no trabalho. Esta definição permite que se desenvolvam os fundamentos microeconômicos que se ajustam perfeitamente aos mo-

---

\* O autor agradece as sugestões recebidas de Maria Helena Ambrósio Dias, João Rogério Sanson e dois pareceristas anônimos. Entretanto, deve-se ressaltar que qualquer erro remanescente é de sua exclusiva responsabilidade. O autor agradece também o apoio financeiro recebido do CNPq.

\*\*Professor Doutor da Universidade Estadual de Maringá.

delos já consagrados na literatura, em especial os de Romer (1986, 1987 e 1990), Lucas (1988), King e Rebelo (1990) e Rebelo (1991).

No modelo a ser desenvolvido, o conceito de especialização refere-se à crescente dedicação ao aprendizado de um assunto específico e/ou à produção de um determinado produto (anos de escolaridade e experiência no trabalho). Esta crescente combinação de educação com experiência no trabalho é transformada neste artigo automaticamente em níveis de conhecimento, o que nos permite criar uma escala de valores, a qual, para facilitar o seu tratamento matemático, é suposta como sendo contínua. Assim, esta hipótese nos permite utilizar a variância da mesma para representar o nível de especialização existente na economia.

## 2 - Setor final<sup>1</sup>

O setor final é formado por um contínuo de indústrias que produzem um contínuo de produtos diferentes. Cada indústria contém  $N$  firmas que produzem o mesmo produto. Desta forma, se denotarmos a produção de cada firma por  $y(i)$ , temos que  $y(i) \in [Y(1), Y(q)]$ , onde  $i \in [1, q]$ . Em outras palavras:  $y(i)$  é a produção da firma que produz o produto do tipo  $i$ ;  $Y(i)$  é a produção da indústria que produz o produto do tipo  $i$ , ou seja, a soma da produção das firmas; e  $[Y(1), Y(q)]$  refere-se ao *spectrum* de indústrias existente no setor final. Para exemplificar, as empresas que produzem o produto  $y(1)$  formam a indústria  $Y(1)$ .

A variável  $i$ , apresentada acima, reflete a qualidade do produto, a qual é resultado do nível de conhecimento requerido para se produzir esta mercadoria. De acordo com este nosso critério, a indústria  $Y(1)$  produz a mercadoria que requer o menor nível de conhecimento para ser produzida, enquanto a indústria  $Y(q)$  produz a mercadoria que requer o mais elevado nível de conhecimento. Em síntese, o fator que distingue os produtos do setor final é a quantidade de conhecimento neles embutida.

De acordo com nosso modelo,  $y(1)$  representa o produto que requer o menor nível de conhecimento para ser produzido, enquanto  $y(q)$  representa o produto que exige o mais alto nível de conhecimento para ser produzido. Usando este critério, a produção agregada da indústria  $i$  do setor final é a seguinte:

$$Y(i) = \int_0^N y(i) dn \quad (1)$$

---

<sup>1</sup> Procuraremos apresentar de forma breve os fundamentos microeconômicos deste artigo. No entanto, um maior nível de detalhe pode ser encontrado em Dias (1993).

onde:  $Y(i)$  é a produção total da indústria  $i$ , em que  $i \in [1, q]$ ; e  $N \in \mathbb{R}^+$  é o número de firmas na indústria  $i$ .

Na produção do produto final de qualidade  $i$ , o setor final da economia como um todo possui duas restrições: a primeira é que os equipamentos devem ser adequados à produção do serviço com a qualidade desejada; e a segunda pressupõe que o capital humano a ser empregado deve ter nível de conhecimento médio compatível com o requerido para operar os equipamentos (produtos intermediários).

Para facilitar a exposição, assumimos que a tecnologia da firma no setor final possui a seguinte forma:

$$y(i) = [\theta h(i)]^\alpha [m(i)]^{1-\alpha}$$

$$Y(i) = \int_0^N y(i) dn \approx N [\theta h(i)]^\alpha [m(i)]^{1-\alpha} = [\theta H(i)]^\alpha [M(i)]^{1-\alpha} \quad (2)$$

onde:  $Y(i)$  é o produto da indústria  $i$ ;  $\theta \in (0, 1)$  é um parâmetro;  $H(i) = Nh(i)$  é a quantidade total de conhecimento  $i$ ;  $M(i) = Nm(i)$  é a quantidade total de produtos intermediários, os quais requerem nível de conhecimento  $i$  para ser operado;  $\alpha$  é o parâmetro da função tecnologia; e  $N$  é o número de firmas na indústria  $i$ .

As variáveis  $\theta H(i)$ , que aparecem na equação do setor final, representam a parcela do conhecimento total de nível  $i$  alocada ao setor final. Já as variáveis  $\theta H_i$  representam a parcela do total de horas de nível  $i$  utilizada pelo setor final. Em suma, as empresas do setor final quando da sua maximização tomam o parâmetro  $\theta$  como dado. A sua importância, portanto, está em dividir a quantidade total de conhecimento de determinado nível entre os setores final e intermediário. O setor encarregado de fazer esta divisão, como veremos adiante, é o intermediário.

Na equação (2), a quantidade de conhecimento de nível  $i$ ,  $H(i)$ , é composta de duas partes, pois  $H(i) = iH_i$ , onde  $i$  é o nível de conhecimento e  $H_i$  é a quantidade de horas disponíveis do mesmo. Para facilitar, assumimos que as empresas podem combinar capital humano de diferentes níveis de conhecimento, mas de tal forma que o nível médio de conhecimento deste capital humano seja igual ao requerido pelos equipamentos. Ou seja, estamos supondo o seguinte:

$$H(i) = iH_i = iN h_i = Nh(i) \quad (3)$$

onde podemos ter as seguintes condições:  $\int_z^{z'} x g(x) dx = i$  e  $\int_z^{z'} x H_x dx = H(i)$ , onde

$z, z'$  e  $x \in [1, q]$  e  $g(x)$  é a função distribuição do nível de conhecimento  $x$  no processo de produção, enquanto  $H_x$  é a quantidade de horas disponíveis do mesmo. Em outras palavras, as restrições impostas pelas equações são as seguintes: a) as firmas são livres

para contratar indivíduos de diferentes níveis de conhecimento desde que a média do conhecimento do conjunto contratado seja igual à exigida; e *b*) a quantidade total de conhecimento utilizado no processo de produção não pode ser superior à requerida. A primeira restrição é técnica e a segunda é de ordem econômica, como veremos adiante.

Ao agregar diferentes capitais humanos com diferentes níveis de conhecimento, em acordo com a restrição *a* acima, a empresa forma um time cujo nível médio de conhecimento atende ao conhecimento requerido pelos produtos intermediários. Assim, este nível médio de conhecimento agregado, que denominaremos *quantum* de conhecimento, reflete um número qualquer que está presente no capital humano e nos produtos intermediários.

Em suma, o *quantum* de conhecimento refere-se a uma combinação específica de produtos intermediários e grupo de capitais humanos colocados em conjunto para produzir um produto de determinada qualidade, sendo que esta qualidade reflete o *quantum* de conhecimento.

Neste modelo temos que, quanto maior for o *quantum* de conhecimento, maiores serão a qualidade do produto e a produtividade dos trabalhadores e dos produtos intermediários. O gráfico a seguir, que ilustra esta idéia em duas dimensões, apresenta a sobreposição de dois mapas de isoquantas, onde as quantidades produzidas dos produtos são as mesmas. O primeiro mapa refere-se ao produto  $y(i)$  e o segundo ao produto  $y(i+\Delta)$ . As quantidades utilizadas de produtos intermediários também são as mesmas. No entanto, o número de horas do *quantum* de conhecimento utilizado na produção do produto  $y(i+\Delta)$  é menor, tendo em vista que ele é superior ao do produto  $y(i)$ . Em síntese, os produtos mais avançados requerem um menor número de horas de capital humano para serem produzidos quando comparados aos que possuem um menor *quantum* de conhecimento embutido.

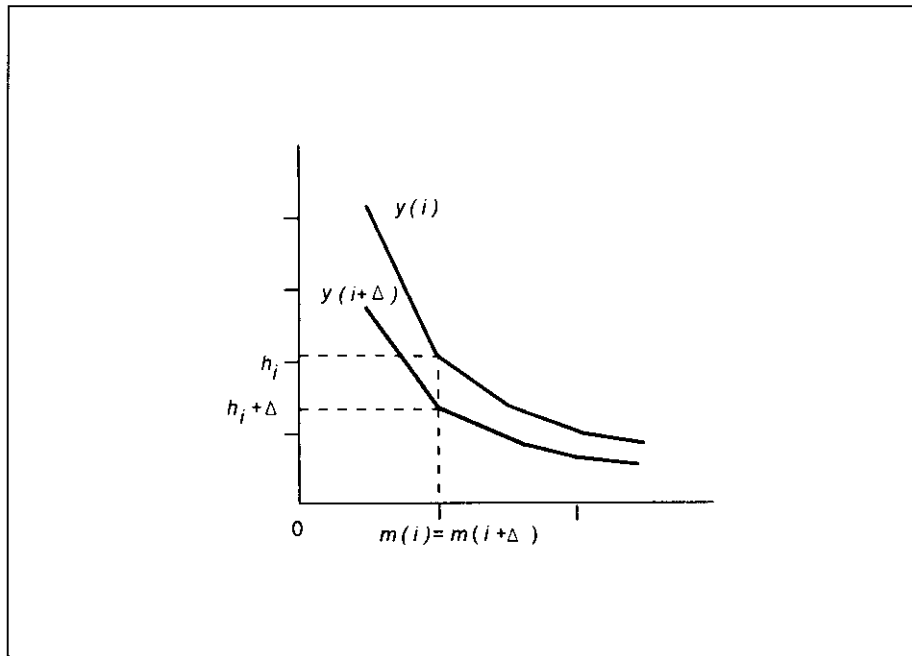
O objetivo de qualquer firma neste modelo é a maximização de lucros. A função de lucros de uma firma típica do setor final é a seguinte:

$$\Pi(i) = \left\{ i^\alpha [\theta H_i]^\alpha M(i)^{1-\alpha} - w(i)\theta H_i - p(i)M(i) \right\} \left( \frac{1}{N} \right) \quad (4)$$

Na equação acima,  $w(i)$  é o salário do capital humano com *quantum* de conhecimento  $i$ , em termos do produto final  $y(i)$ , e  $p(i)$  é o preço do produto intermediário  $i$ , também em termos do produto final  $y(i)$ . O objetivo de cada firma é maximizar a equação (4). As condições de primeira ordem são as seguintes:

$$\frac{\partial \Pi(i)}{\partial H_i} = 0, \quad w(i) = \alpha i^\alpha [\theta H_i]^{\alpha-1} M(i)^{1-\alpha} \quad (5)$$

e



$$\frac{\partial \Pi(i)}{\partial M(i)} = 0, \quad p(i) = (1 - \alpha) i^\alpha [\theta H_i]^\alpha M(i)^{-\alpha} \quad (6)$$

Das equações (5) e (6), que representam as funções de salário e preços, respectivamente, podem ser facilmente derivadas as funções de demanda implícitas das horas a serem trabalhadas e das quantidades de produtos intermediários. Para tanto, basta que as resolvamos para a razão  $H_i/M(i)$ . No entanto, omitiremos esta derivação, visto que as informações que precisamos estão representadas nestas equações.

### 3 - O setor intermediário

O setor intermediário é formado por um contínuo de firmas produzindo diferentes mercadorias. Para simplificar, chamaremos o produto de cada uma de  $M(i)$ , onde  $i \in [1, q]$ . Portanto, a firma do setor intermediário é fornecedora única (monopolista) do produto  $M(i)$  à indústria  $Y(i)$  do setor final.<sup>2</sup>

<sup>2</sup> A forma pela qual a condição de monopólio surge está em Dias (1993).

Para iniciar nossa análise, definiremos como sendo o emprego total de conhecimento na economia a conjugação dos conhecimentos empregados nos setores final e intermediário, ou seja:

$$1 = \theta + \delta \quad (7)$$

onde  $\delta$  é a fração do total de conhecimento alocado ao setor intermediário, enquanto  $\theta$ , como vimos anteriormente, é a fração alocada ao setor final.

A função de produção do produto com qualidade  $i$  do setor intermediário ou da firma típica do setor é a seguinte:

$$M(i) = [\delta H(i)]^{1-\beta} i^\beta K_i^\beta$$

ou

$$M(i) = [(1-\theta)H_i i]^{1-\beta} i^\beta K_i^\beta = i[(1-\theta)H_i]^{1-\beta} K_i^\beta \quad (8)$$

Na equação acima foram substituídas as definições de  $H(i)$  na equação (3) e a dada pela equação (7). As variáveis ainda não definidas na equação (8) são  $K_i$ , a quantidade de capital físico empregada na produção do produto tipo  $i$ , e  $\beta$  o parâmetro da função de produção.

A função de lucro da empresa típica do setor intermediário é a seguinte:

$$\Pi = p(i)M(i) - w(i)[1-\theta]H_i - R(i)K_i \quad (9)$$

onde as variáveis  $w(i)$  e  $p(i)$  foram definidas anteriormente nas equações (5) e (6), respectivamente, enquanto  $R(i)$  representa o preço do capital físico  $K_i$  em termos do produto final  $y(i)$ .

Substituindo as equações (5) e (6) na expressão (9), após algumas simplificações obtemos o seguinte resultado:

$$\Pi = \{ (1-\alpha)\theta^\alpha [1-\theta]^\tau - \alpha\theta^{\alpha-1} [1-\theta]^{1+\tau} \} i H_i^{1-\omega} K_i^\omega - R(i)K_i \quad (10)$$

onde  $\omega = \beta(1-\alpha)$  e  $\tau = 1 - \omega - \alpha$ . Como podemos observar, as variáveis que influenciam os lucros são  $\theta$  e  $K_i$ . Ao maximizarmos esta função, obtemos o seguinte resultado:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \theta} = 0, \quad \theta^* = \frac{\sqrt{\alpha} \left( \sqrt{\alpha^2 + \alpha(\tau - 4) + 4} + \sqrt{\alpha(1 - \omega)} \right)}{2\sqrt{(1 - \omega)}} \quad (11)$$

e:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial K} = 0, \quad R(i) = R i k_i^{\omega - 1} \quad (12)$$

onde  $R = \omega((1 - \alpha)\theta^{*\alpha}(1 - \theta^*)^\tau - \alpha\theta^{*\alpha - 1}(1 - \theta^*)^{1 + \tau})$ , sendo que  $k_i = \frac{K_i}{H_i}$

A equação (12) está escrita em termos do valor ótimo de  $\theta$  da equação (11). A razão,  $K_i$ , capital-horas de trabalho na indústria  $i$  indica, em essência, a quantidade de horas necessárias para operar em média cada máquina no setor intermediário. Como podemos ver na equação (11), a empresa do setor intermediário, ao escolher o parâmetro  $\theta^*$ , está controlando a demanda por seu produto conforme a equação (6). O valor do parâmetro a ser escolhido é aquele que maximiza seus lucros.

Para obtermos a produção de cada indústria em termos dos insumos finais, basta substituir a equação (8) na expressão (2), ou seja:

$$Y(i) = B i H_i^{1 - \omega} K_i^\omega \quad (13)$$

onde

$$B = \theta^{*\alpha} (1 - \theta^*)^\tau$$

Para obtermos a renda média da economia como um todo, basta movermos nossa atenção para a indústria que utiliza o *quantum* médio de conhecimento, que definiremos como sendo representado por  $\mu$ . Portanto, a expressão (13) pode ser escrita da seguinte forma:

$$Y(\mu) = B \mu H_\mu^{1 - \omega} K_\mu^\omega \quad (14)$$

Assim, para obtermos a renda média por hora trabalhada desta economia, basta que dividamos a equação (14) pelo número de horas trabalhadas em média na economia, ou seja,  $H_\mu$ , o que nos dá o seguinte resultado:

$$y(\mu) = B \mu k^{\theta} \quad (15)$$

Na equação anterior, temos que  $k$  representa a razão média de capital-horas de trabalho na economia. Como podemos ver, a produção média por hora trabalhada,  $y(\mu)$ , apresenta retornos crescentes à quantidade média de conhecimento e a razão capital-horas de trabalho. Portanto, equipamentos que demandem menos tempo para serem operados aumentam a produtividade média por hora trabalhada, o mesmo acontecendo quando o *quantum* de conhecimento aumenta.

O resultado da equação (15) é extremamente interessante porque, se definirmos a variável  $\kappa = \mu k^{\theta}$ , então obtemos a expressão para a chamada *composite good* usada por King e Rebelo (1990), Barro (1990) e Rebelo (1991) em seus famosos artigos sobre crescimento econômico. Como é sabido, eles utilizaram uma mercadoria composta para gerar crescimento econômico endógeno. Portanto, a equação (15) ficaria da seguinte forma:

$$y(\mu) = B \kappa \quad (16)$$

onde a variável  $\kappa$  é o *quantum* médio de conhecimento presente no capital humano e físico e, portanto, representa a tecnologia utilizada pela indústria média na economia. Em outras palavras, uma composição entre o nível médio do conhecimento dos trabalhadores e o índice de produtividade média dos equipamentos da economia. Para simplificar, iremos nos referir a  $\kappa$  como sendo o *quantum* médio de conhecimento da economia.

#### 4 - As dinâmicas do modelo

Neste modelo procuramos utilizar uma função de acumulação estocástica com o objetivo de captar elementos econômicos e não-econômicos que influenciam a taxa de crescimento da variável *quantum* médio de conhecimento. Além deste aspecto importante, é nosso objetivo também captar outro aspecto da realidade, ou seja: quanto maior o nível de especialização de uma economia, maior será a taxa de acumulação de seu *quantum* médio de conhecimento. Em palavras simples, quanto maior for o nível de conhecimento que nos cerca, maior será nossa produtividade.

A variável especialização será aqui representada pela variância da variável *quantum* médio de conhecimento. A explicação para isto está em que maior acumulação de *quantum* de conhecimento leva a maior competição por conhecimento, o que faz com que se busque continuamente uma especialização ou produto diferenciado, tendo-se, conseqüentemente, um aumento na variância da distribuição da variável *quantum* médio de conhecimento.

A técnica a ser utilizada e que nos permite captar os aspectos teóricos desejados é a do controle estocástico — princípio do ótimo, onde a função de restrição é uma equação



diferencial de Itô [Kannan (1979) e Kamien e Schwartz (1981)].<sup>3</sup> Assim, introduziremos inicialmente a especificação da equação diferencial que será a restrição do modelo:

$$d\kappa = f(\kappa, c) dt + \sqrt{b(v, \kappa)} dz \quad (17)$$

onde  $f(\kappa, c)$  é a fração não-estocástica e  $b(v, \kappa)$  a fração estocástica da função de acumulação, ambas representadas em termos *per capita*, enquanto as variáveis  $v$  e  $dz$  são, respectivamente, o nível de especialização da economia e os incrementos de um processo Wiener, cuja definição se encontra no Apêndice.

Prosseguindo, assumimos que as funções possuem as seguintes formas:  $f(\kappa, c) = [\gamma(\mu) - c]$  e  $b(v, \kappa) = (v\kappa)^2$ . A seguir, substituímos estas definições na equação (17), operação que nos permite obter a função de acumulação da taxa de crescimento do *quantum* médio de conhecimento no tempo:

$$d\kappa = [B\kappa - c] dt + v\kappa dz \quad (18)$$

Como podemos ver, foi substituída na equação acima a definição de  $\gamma(\mu)$  da equação (16). Se dividirmos a equação (18) por  $dt$  e  $\kappa$ , temos que a taxa de crescimento do *quantum* médio de conhecimento depende da parcela não consumida da razão da renda média e da influência do nível de especialização no tempo, que *a priori* é positivo mas estocástico. Ou seja, a taxa de crescimento do nível médio de conhecimento aumenta de acordo com o excesso de produção sobre o consumo e com as variações positivas no nível de especialização.

Como a origem do *quantum* médio de conhecimento está nos capitais humanos, os quais são agregados para formá-lo e, como estes, são em última instância consumidores. É como tais têm que decidir o quanto acumular e/ou consumir de suas rendas. Mas, ao invés de tomarem esta decisão individualmente, os consumidores como um todo elegem um representante cujo objetivo é o de maximizar o bem-estar social da comunidade. Mais especificamente, o representante desta sociedade maximiza a seguinte função de bem-estar social:

$$E_t(W) = \int_0^{\infty} \left( \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma} \right) e^{-\rho t} dt \quad (19)$$

onde  $E_t$  é o operador matemático da expectativa;  $\sigma$  o parâmetro da função utilidade (o qual assumimos ser diferente de 1),  $c$  o consumo médio por trabalhador e  $\rho$  a taxa preferencial de desconto no tempo.

<sup>3</sup> Para maiores detalhes, ver Apêndice.

Portanto, o objetivo do representante eleito desta sociedade é maximizar a equação (19), sujeito à restrição imposta pela equação (18). Em outras palavras, o representante maximiza todo o consumo futuro esperado no tempo presente. Para resolver este problema, utilizamos a famosa equação de Hamilton-Jacobi-Bellman (ver Apêndice).

$$-J_t = \text{Max}_c \left( e^{\rho t} \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma} + J_\kappa (B \kappa - c) + \frac{1}{2} J_{\kappa\kappa} (v \kappa)^2 \right) \quad (20)$$

onde  $J$  é uma função contínua a ser encontrada de tal forma que satisfaça a equação diferencial parcial acima,  $J_t$  é a derivada desta função com respeito à variável tempo e  $J_\kappa$  e  $J_{\kappa\kappa}$  representam, respectivamente, as primeira e segunda derivadas desta função com respeito à variável *quantum* médio de conhecimento.

A condição de primeira ordem da equação (20) é a seguinte (ver Apêndice):

$$\text{Max}_c = 0 = \frac{-\partial J_t}{\partial c} = e^{-\rho t} c^{-\sigma} = J_\kappa \quad \text{ou} \quad c = \left( J_\kappa e^{\rho t} \right)^{-\frac{1}{\sigma}} \quad (21)$$

Agora substituímos a equação (21) na equação (20) e ao mesmo tempo multiplicamos o resultado desta substituição por  $e^{\rho t}$ . O resultado final é o seguinte:

$$-J_t e^{\rho t} = \frac{\left( J_\kappa e^{\rho t} \right)^{\frac{1-\sigma}{-\sigma}}}{1-\sigma} + e^{\rho t} J_\kappa \left( B \kappa - \left( J_\kappa e^{\rho t} \right)^{\frac{1}{-\sigma}} \right) + \frac{1}{2} e^{\rho t} J_{\kappa\kappa} (v \kappa)^2 \quad (22)$$

Para encontrarmos a solução da equação diferencial parcial acima, temos também que encontrar a função  $J(t, \kappa)$  que satisfaça a mesma. Infelizmente, não existe uma forma mágica para isto, sendo a melhor técnica empregada a da tentativa e erro. Mas, felizmente, a função acima é de fácil solução, sendo que a função que satisfaz a mesma é a seguinte:

$$J(t, \kappa) = e^{-\rho t} A \kappa^{1-\sigma} \quad (23)$$

onde  $A$  é uma constante a ser encontrada. Para demonstrar que (23) satisfaz a equação (22), precisamos, primeiramente, calcular as derivadas parciais, que serão utilizadas na computação da solução:

$$\frac{\partial j}{\partial t} = J_t = -\rho e^{-\rho t} A \kappa^{1-\sigma}$$

$$\frac{\partial J}{\partial \kappa} = J_{\kappa} = (1 - \sigma) e^{-\rho t} A \kappa^{-\sigma}$$

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \mu^2} = J_{\kappa\kappa} = -\sigma(1 - \sigma) e^{-\rho t} A \kappa^{-\sigma-1} \quad (24)$$

Nosso próximo passo é substituir o conjunto de equações acima em (22). Após algumas simplificações, obtemos o seguinte:

$$\rho = (1 - \sigma)^{-\sigma} A^{-\sigma} + (1 + \sigma)B - (1 - \sigma)^{-\sigma} A^{-\sigma} - \frac{1}{2}v^2 \sigma(1 - \sigma) \quad (25)$$

Para finalizar, basta que encontremos o valor da constante  $A$ , o que, de acordo com a equação (25), torna-se fácil, bastando isolá-la para obtermos o resultado desejado, ou seja:

$$A = \left( \frac{\rho - (1 - \sigma)B + \frac{1}{2}v^2 \sigma(1 - \sigma)}{(1 - \sigma)^{-\frac{1}{\sigma}} - (1 - \sigma)} \right)^{-\sigma} = \Lambda^{-\sigma} \quad (26)$$

Em suma, a equação (23) é a solução da equação (22), sendo que o valor da constante  $A$  é dado pela equação (26), resultado que nos permite encontrar a função de consumo desta sociedade. Assim, basta substituirmos a equação (26) na função  $J_{\kappa}$  da equação (24), e o resultado da mesma na equação (21). Portanto, após algumas simplificações, obtemos o seguinte:

$$c = \varphi \kappa \quad (27)$$

onde  $\varphi = (1 - \sigma)^{-\frac{1}{\sigma}} \Lambda$ . A equação (27) representa a função de consumo da sociedade por hora trabalhada e, contrariamente aos modelos não-estocásticos, se apresenta como sendo linear em relação ao *quantum* médio de conhecimento da sociedade, o que nos dá como resultado a condição de que o nível médio de consumo por hora trabalhada somente aumenta com aumentos no *quantum* médio de conhecimento da sociedade.

Ainda de acordo com (27), fica fácil verificar que o bem-estar social da sociedade depende diretamente do *quantum* médio de conhecimento dessa mesma sociedade. Mais especificamente, temos que:

$$E_t(W) = \int_0^{\infty} \left( \frac{(\varphi \kappa)^{1-\sigma}}{1-\sigma} \right) e^{-\rho t} dt \quad (28)$$

ou seja, o nível de bem-estar social futuro da população será maior quanto maiores forem seu *quantum* médio de conhecimento e seu nível de especialização, bem como uma menor taxa de desconto preferencial no tempo.

Agora direcionaremos nossa atenção para a taxa de crescimento média da produtividade desta economia. De acordo com (16), a taxa de crescimento real da produtividade da economia é a mesma do *quantum* médio de conhecimento  $e$ , ainda, de acordo com (27), idêntica à do consumo *per capita*. Em síntese, o que temos é o seguinte:

$$g = \frac{\dot{\kappa}}{\kappa} = \frac{\dot{c}}{c} = B - \varphi + v \dot{z} \quad (29)$$

onde

$$\dot{z} = \frac{dz}{dt}$$

A equação acima foi obtida da seguinte forma: primeiro, dividimos (18) por  $\kappa$ , em seguida, dividimos o resultado por  $dt$ , obtendo assim a taxa de crescimento do *quantum* médio de conhecimento; e, para finalizar, substituímos neste resultado a razão consumo-nível médio de conhecimento ( $\varphi$ ) da equação (27).

Como se pode observar, a taxa de crescimento depende da diferença entre o fator da produtividade do *quantum* médio de conhecimento ( $B$ ) e a constante ( $\varphi$ ), bem como do nível de especialização da economia ( $v$ ), que aparece em dois lugares: no termo  $\varphi$  e multiplicada pela variável estocástica  $\dot{z}$ .

Especificamente, queremos saber quais os efeitos da especialização na taxa de crescimento da economia. Para conhecermos os efeitos da mesma, basta que derivamos a equação (29) com respeito à variável  $v$ , cujo resultado é o seguinte:

$$\frac{\partial g}{\partial v} = -\frac{\partial \varphi}{\partial v} = v(1-\sigma) + \dot{z} \quad (30)$$

Como podemos ver na equação acima, o nível de especialização afeta positivamente a taxa de crescimento dependendo do valor assumido pelo parâmetro  $\sigma$ , que, se for maior que 1, faz com que o nível de especialização ajude a reduzir a taxa de crescimento e, se for menor que 1, faz com que ele torne maior a taxa de crescimento da economia.<sup>4</sup> A

<sup>4</sup> Estamos descartando da análise o valor  $\sigma = 1$ , tendo em vista termos assumido ser este diferente de 1. Para o caso em que o mesmo é igual a 1, teríamos que usar uma função de bem-estar social logarítmica.

variável estocástica que aparece na equação acima está captando outros fatores não-econômicos que influenciam positivamente e/ou negativamente o efeito da especialização na taxa de crescimento da economia. Cabe ressaltar, no entanto, que, por definição, a mesma possui média zero no tempo, o que significa que os efeitos positivos e negativos se autocancelam no tempo.

Assim, o elemento-chave está em entender o parâmetro  $\sigma$  que tem sua origem na função de bem-estar social, que será maior ou menor dependendo do valor de  $\sigma$  ser maior ou menor que 1. Este parâmetro na verdade reflete a elasticidade intertemporal de substituição de consumo, sendo sua definição a seguinte:  $1/\sigma$  [ver Blanchard e Fischer (1989)]. Portanto, economias que possuem uma baixa elasticidade ( $\sigma > 1$ ), ou seja, consumo presente preferível a consumo futuro, têm sua taxa de crescimento reduzida com o aumento no nível de especialização, ao contrário de economias em que esta elasticidade é alta ( $\sigma < 1$ ), ou seja, onde o consumo futuro é preferível ao consumo presente. Em síntese, preferência por consumo presente vem em detrimento de menor *quantum* médio de conhecimento no futuro, implicando menor produtividade média atual e futura na economia. De acordo com este resultado, qualquer mudança nesta elasticidade causará mudanças na taxa de crescimento da economia.<sup>5</sup>

## 5 - Conclusão

No modelo desenvolvido analisamos as condições de uma economia que acumula uma mercadoria composta, em cuja composição temos o nível médio de conhecimento dos capitais humano e físico. Esta combinação, interpretada como sendo o *quantum* médio de conhecimento da economia, é o fator que dita a produtividade média da mesma. Portanto, sua acumulação se faz iminente.

Os resultados encontrados foram os seguintes: primeiro, o nível médio de consumo da sociedade depende linearmente do seu *quantum* médio de conhecimento e, portanto, a razão entre ambos é constante; segundo, o bem-estar da sociedade depende diretamente do seu *quantum* médio de conhecimento; terceiro, a taxa de crescimento da economia é endógena e estocástica, sendo que a mesma depende em última instância dos parâmetros das funções de produções (setor final e intermediários), dos parâmetros da função de bem-estar social e do nível de especialização; e, quarto, o nível de especialização da economia afeta positivamente a taxa de crescimento econômico se, e somente se, o desejo por consumo futuro for maior que o desejo por consumo presente. Em síntese, a influência do crescimento da especialização verificada nas economias será fator positivo somente se o desejo por consumo futuro nas mesmas for preferível ao consumo atual.

---

5 Um trabalho empírico que justifica esta afirmação foi elaborado por Cavalcanti (1994), segundo o qual a elasticidade de substituição intertemporal de consumo no Brasil durante a década de 80 foi menor que 1, ou seja,  $1/\sigma < 1$ , o que, de acordo com a equação (30), causa uma menor taxa de crescimento da economia. Portanto, o resultado teórico obtido reflete este resultado encontrado pelo autor em relação à economia brasileira, pois na década de 80 houve uma sensível queda na taxa de crescimento econômico (aproximadamente 1,5%) em relação à taxa da década anterior (aproximadamente 5,6%) [IPEA (1993)].

## Apêndice

### A.1 - A definição de um processo Wiener

Um processo Wiener, ou *Brownian motion*  $\{x(t)\}$ ,  $t \geq 0$ , é dito estocástico se satisfaz as seguintes propriedades [Kannan (1979, p.230)]:

- a)  $x(0) = 0$ ; com probabilidade 1 (c.p. 1);
- b) qualquer incremento  $x(t) - x(s)$ , onde  $t > s$ , é distribuído normalmente com média zero e variância  $c^2 |t - s|$ , onde  $c$  é um parâmetro fixo; e
- c) para  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < \infty$ , os incrementos  $[x(t_i) - x(t_{i-1})]$ ,  $1 \leq i \leq n$ , são independentes e distribuídos conforme a propriedade b.

### A.2 - Definição de um processo estocástico diferenciável

O limite de um processo estocástico existe no sentido da média quadrada. Um processo estocástico de segunda ordem  $\{x(t), t \in T\}$  é considerado como diferenciável na média quadrada se para todo  $t_0 \in T$  o limite,  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t_0 + h) - x(t_0)}{h} = x'(t_0)$ , existe de acordo com o critério de convergência da média quadrada, ou seja,

$\lim_{h \rightarrow 0} E \left( \frac{x(t_0 + h) - x(t_0)}{h} \right)^2 = 0$ . Se o processo é diferenciável para todos os períodos  $t \in T$ , então este é um processo estocástico diferenciável.

### A.3 - Lema de Itô

Consideremos a seguinte equação:<sup>6</sup>

---

<sup>6</sup> A versão integral da equação diferencial acima é a seguinte:  $c(t) = c(0) + \int_0^t a(s) ds + \int_0^t b(s) dz(s)$ , onde a primeira integral é normal, enquanto a segunda é estocástica. Para maiores informações, ver Gihman e Skorohod (1972).

$$dx(t) = a(t, x) dt + \sqrt{(b(t, x))^2} dz \quad (A1)$$

que é conhecida como a equação diferencial de Itô, sendo seu lema o seguinte: suponhamos que o processo tem uma equação diferencial do tipo (A1); agora, consideremos a função  $J(t, x): [0, T] \times R \rightarrow R$ , sendo que a mesma é uma função contínua, não-aleatória, com as seguintes derivadas parciais:  $J_t$ ,  $J_x$  e  $J_{xx}$ ; então, o processo  $J[t, x(t)]$  possui uma equação estocástica da seguinte forma:

$$dJ[t, x(t)] = \{ J_t[t, x(t)] + J_x[t, x(t)] a(t, x) + (1/2) J_{xx}[t, x(t)] b^2(t, x) \} dt + J_x[t, x(t)] b(t, x) dz \quad (A2)$$

Prova: ver Malliaris (1982, p. 81).

#### A.4 - Controle estocástico: o princípio do ótimo

Consideremos o seguinte problema:

$$J(x, t) = \text{Max}_v E_t \int_0^T e^{-\rho t} U(x, v) ds \quad (A3)$$

sujeito à seguinte restrição:

$$dx = F(x, v) dt + \vartheta(x, v) dz \quad (A4)$$

onde:  $v$  = variável de controle;

$x$  = variável de estado;

$\rho \geq 0$  taxa de desconto subjetiva;

$E_t$  = operador da expectativa;

$U$  = função de bem-estar;

$F$  = parte não-aleatória da tecnologia de acumulação; e

$\vartheta$  = parte aleatória da tecnologia de acumulação.

A técnica a ser empregada na solução deste problema, conhecida como “programação dinâmica”, foi desenvolvida por Bellman, cujo princípio a ser empregado é o do ótimo. Usando a referida técnica, começamos por reescrever a equação (A3) da seguinte forma:

$$J(x, t) = \text{Max}_v E_t \int_0^T V(x, v) ds \quad (\text{A5})$$

onde  $V(t, x, v) = e^{-\rho t} U(x, v)$ . A seguir, dividimos a integral da equação (A5) em dois intervalos no tempo, ou seja:

$$J(x, t) = \text{Max}_v E_t \left[ \int_0^{t+\Delta t} V(t, x, v) ds + \int_{t+\Delta t}^T V(t, x, v) ds \right] \quad (\text{A6})$$

Agora, definamos a função  $J(x + \Delta x, t + \Delta t) = \int_{t+\Delta t}^T V(t, x, v) ds$ , o que faz com que a equação (A6) se torne:

$$J(x, t) = \text{Max}_v E_t \left[ \int_0^{t+\Delta t} V(t, x, v) ds + J(x + \Delta x, t + \Delta t) \right] \quad (\text{A7})$$

Agora, suponhamos que o intervalo  $\Delta t$  é positivo mas extremamente pequeno, o que nos permite aproximar a primeira integral do lado direito da função  $V(t, x, v) \Delta t$ . Ainda sobre (A7), iremos expandir a equação  $J(\cdot)$  em torno de  $(x, t)$  usando a regra de Taylor, ou seja,  $J(x + \Delta x, t + \Delta t) = J(x, t) + J_x \Delta x + J_t \Delta t + (1/2) J_{xx} (\Delta x)^2 + J_{xt} (\Delta x) (\Delta t) + J_{tt} (\Delta t)^2 + \text{restante}$ . Ao substituirmos estas duas condições na equação (A7), obtemos:

$$J(x, t) = \text{Max}_v E_t \left\{ V(t, x, v) \Delta t + J(x, t) + J_x \Delta x + J_t \Delta t + (1/2) J_{xx} (\Delta x)^2 + J_{xt} (\Delta x) (\Delta t) + J_{tt} (\Delta t)^2 + \text{restante} \right\} \quad (\text{A8})$$

Agora, vamos retornar nossa atenção por um momento para a equação (A4), reescrevendo-a da seguinte forma:



$$dx = \Delta x = F(x, v) \Delta t + \vartheta(x, v) \Delta z \quad (A9)$$

A seguir, substituímos (A9) em (A8). Queremos lembrar que, durante a substituição, estaremos usando a regra de Itô ( $\Delta t \Delta t = 0$ ,  $\Delta t \Delta z = 0$  e  $\Delta z \Delta z = \Delta t$ ), o que irá eliminar alguns termos. Para completar, tiramos a expectativa do resultado, conforme definição de um processo Wiener, o que faz com que os termos multiplicados por  $\Delta z$  desapareçam, dando-nos a seguinte equação final:

$$0 = \text{Max}_v \left( V(t, x, v) \Delta t + J_t \Delta t + J_x F(x, v) \Delta t + \frac{1}{2} J_{xx} \vartheta^2(x, v) \Delta t + \text{resto} \right) \quad (A10)$$

Para obtermos a equação desejada, basta dividirmos (A10) por  $\Delta t$  ao mesmo tempo em que usamos do critério de convergência da média quadrada,  $\Delta t \rightarrow 0$ , ou seja:

$$-J_t = \text{Max}_v V(t, x, v) + J_x F(x, v) + (1/2) J_{xx} \vartheta^2(x, v) \quad (A11)$$

A equação diferencial parcial (A11) é conhecida na literatura como a *Equação de Hamilton-Jacobi-Bellman da Teoria de Controle Estocástico*. A sua solução consiste em encontrar a função  $J(x, t)$  que satisfaz a igualdade em todos os tempos. Para finalizar, iremos comparar o princípio do ótimo com o lema de Itô, o que irá facilitar nosso trabalho de solucionar a equação (A11): primeiro, tiramos o valor esperado de (A2), equação de Itô, o que causa o desaparecimento do termo multiplicado por  $dz$ ; segundo, como estamos procurando um máximo, então o que temos a fazer é colocar a equação (A2) igual a zero; e, a seguir, resolvemos a mesma para a função  $J_t$ , obtendo assim a seguinte função:

$$-J_t = J_x [t, x(t)] a(t, x) + (1/2) J_{xx} [t, x(t)] b^2(t, x) \quad (A12)$$

Ao compararmos as equações (A12) e (A11), vemos as seguintes similaridades:  $a(t, x) = F(x, v)$ ,  $b^2(x, t) = \vartheta^2(x, t)$  e  $\text{Max}_v = 0$ . Portanto, a busca da solução da equação (A11) deve começar através da condição inicial  $\text{Max}_v = 0$ , após o que se deve procurar uma função  $J(t, x)$ , que seja contínua, não-randômica e duplamente diferenciável que satisfaça a equação diferencial parcial (A12) e/ou (A11).

## Abstract

*In this paper we develop a stochastic growth model based on The Quantum of Knowledge Theory. Our objective is to analyze the influence of the human capital specialization on the long run*

*economic growth. The element of growth is a composite good called average quantum of knowledge. Here, its variance represents society level of specialization. The main result is that the long run growth rate is positively influenced by the level of human capital specialization only for the case in which future consumption is preferred to actual consumption.*

## **Bibliografia**

- BARRO, R. J. Government spending in a simple model of endogenous growth. *Journal of Political Economy*, v. 98, n.5, p. S103-S125, Oct. 1990.
- BARRO, R. J. (ed.). *Modern business cycle theory*. Cambridge: Harvard University Press, 1989.
- BERGSTROM, A. R. Optimal control in wide-sense stationary continuous-time stochastic models. *Journal of Economic Dynamic and Control*, v.11, p.425-443, May 1987.
- BLANCHARD, J. O., FISCHER, S. *Lectures on macroeconomics*. Cambridge: The MIT Press, 1989.
- CAVALCANTI, C. B. Intertemporal substitution in consumption: an empirical investigation for Brazil. *Revista de Econometria*, v.13, n.2, p.109-126, abr. 1994.
- DIAS, J. *Economic growth: the quantum of knowledge theory*. University of South Carolina, 1992 (Tese de Doutorado).
- . The quantum of knowledge theory with physical capital. *Anais do XXI Encontro Nacional de Economia*. Belo Horizonte, 1993.
- . The quantum of knowledge theory. *Revista Brasileira de Economia*, v.49, n.1, p.109-126, Mar. 1995.
- GIHMAN, I.I., SKOROHOD, A. V. *Stochastic differential equations*. New York: Springer-Verlag, 1972.
- IPEA. *Perspectivas da economia brasileira — 1994*. Rio de Janeiro, v. 2, 1993.
- KAMIEN, M., SCHWARTZ, N. L. *Dynamic optimization: the calculus of variations and optimal control in economics and management*. New York: North Holland, 1981.
- KANNAN, D. *An introduction to stochastic processes*. New York: North Holland, 1979.
- KING, R. G., REBELO, S. Public policy and economic growth: developing neoclassical implications. *Journal of Political Economy*, v. 98, n. 5, p. S126-S150, Oct. 1990.
- LUCAS JR, R. E. On the mechanics of economic development. *Journal of Monetary Economics*, v.22, n.1, p.3-42, Jul. 1988.

MALLIARIS, A. G. *Stochastic methods in economics and finance*. New York: North Holland, 1982.

REBELO, S. *Long run policy analysis and long run growth*. NBER, Apr. 1990 (Working Paper, 3325).

\_\_\_\_\_. *Growth in open economies*. Carnegie-Rochester, Mar. 1991, mimeo.

ROMER, P. M. Increasing returns and long run growth. *Journal of Political Economy*, v.94, n.4, p.1.002-1.037, Oct. 1986.

\_\_\_\_\_. Growth based on increasing returns due to specialization. *American Economic Review*, v.77, n.2, p.56-62, May 1987.

\_\_\_\_\_. Endogenous technological change. *Journal of Political Economy*, v.98, n.5, p.S71-S102, Oct. 1990.

(Originais recebidos em maio de 1995. Revistos em setembro de 1995.)